Μεταβλητες Κατάστασης & Προτυπο Μεταβλ. Κατάστασης

Εισαγωγη

Γενικά περί Θεωρίας Συστημάτων Ελέγχου

- «θεωρία μηχανών» (machines)
- Δεν εξετάζει 'πράγματα' αλλα 'τρόπους συμπεριφοράς'
- Ερώτημα: ΟΧΙ 'τι είναι;' αλλά 'τί κάνει;'
- Θεματικό αντικείμενο: ολες οι 'δυνατές' μηχανές (δυνητικότητα)
- Ερώτημα: ΟΧΙ 'ποιά δράση/πράξη μπορεί να κάνει' αλλά 'ποιές είναι ολες οι δυνατές συμπεριφορές που μπορεί να παράγει'
- Καινούργιο και ενιαίο λεξιλόγιο για κάθε τύπο συστήματος
- Μεθοδολογία ανάλυσης συστημάτων στα οποία η πολυπλοκότητά τους δεν μπορεί να αγνοηθεί
- Σχεδιάζουμε συστήματα ελέγχου για:ενίσχυση ισχύος, ακρίβεια
- χειρισμού
- απομακρυσμένο έλεγχο
- αντιστάθμιση διαταραχών

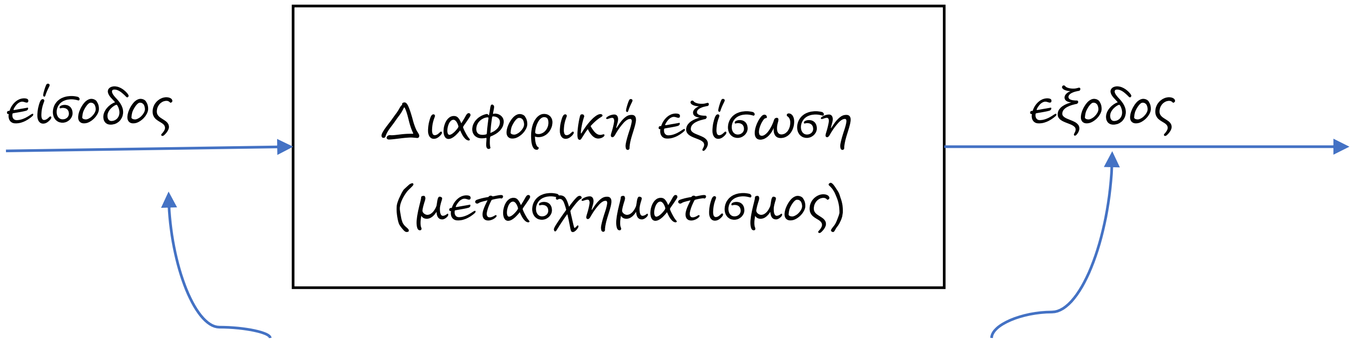
Περιγραφή του φυσικού συστήματος

- Εξαγωγή-δημιουργία μαθηματικού προτύπου ⇨ Δ.Ε.
- Σκοπός: ελεγχος φυσικών (πραγματικών) συστημάτων μέσω του μαθηματικού προτύπου τους
  - προσέγγιση συμπεριφοράς φυσικών συστημάτων
  - ποιότητα της προσέγγισης
  - πολλαπλά πρότυπα για το ιδιο σύστημα

- 2 τρόποι περιγραφής (δημιουργίας μαθημ.προτύπου), επίλυσης της Δ.Ε. που περιγράφει την συμπεριφορά του συστήματος
- προτυπο καταστατικών εξισώσεων (εσωτερική) (πλήρης)
- περιγραφή I/O (εξωτερική) ('λιγότερο' πλήρης)

- **Κατάσταση**: καλώς ορισμένη συνθήκη ή ιδιότητα που αναγνωρίζεται εύκολα, αν ξανασυμβεί
- **Σύστημα:** μια (απειρη) λίστα απο μεταβλητές

- **Μαθηματικό πρότυπο:** φυσικοί νόμοι που συσχετίζουν τις μεταβλητές μεταξύ τους



- ‘λεξιλόγιο’,   γενικευμένες μεταβλητές

Το Μαθηματικό πρότυπο

- Πως επιλέγεται;
- Φυσικοί νόμοι→ διαφορικές εξισώσεις
- Οι εξισώσεις 'συμπεριφοράς' απαρτίζουν το μαθηματικό πρότυπο

- Πόσο καλά προσεγγιζει την πραγματική συμπεριφορά του συστήματος;
- (υπερ-απλούστευση, υπερ-πολυπλοκότητα)

- Μελέτη του συστήματος $\Leftrightarrow$ μελέτη του μαθ.προτύπου

- Μελέτη των σημάτων I/O
- Μελέτη της Γεωμετρίας του χώρου που ανήκουν οι μεταβλητές I/O

Μαθηματικό Πρότυπο-Διαφορικές Εξισώσεις

Επίλυση Διαφορικής εξίσωσης

Μετασχ. Laplace

(SISO)

Συναρτήσεις Μεταφοράς

(κλασική θεωρία)

Χώρος Κατάστασης

(MIMO)

Πρότυπο Καταστατικών Εξισώσεων

(σύγχρονη θεωρία)

Η εννοια της κατάστασης

- Μοντελοποίηση στο χρόνο (χώρος κατάστασης)
- Ντετερμινιστικά συστήματα (πλήρως προβλέψιμη συμπεριφορά)
- απο κανονικές Δ.Ε. (οχι μερικές Δ.Ε.)
- (μονο ο χρόνος θεωρείται ανεξάρτητη μεταβλητή)

$$\dot{x} = f(x,t)$$

- 1ος τρόπος επίλυσης της Δ.Ε. του συστήματος
- Επίλυση Δ.Ε. n τάξης → γενική λύση και αρχ. Συνθήκες

  $y^{(n)} \approx$ έξοδος $(y(t))$ + $(n-1)$ παράγωγοι της εξόδου → μετρήσεις $(y(t_0), \dot{y}(t_0), \ldots)$

- Κατάσταση: συνολο φυσικών μεταβλητων που περιέχουν ολη την πληροφορία που μας χρειάζεται.
- Π.χ. (εκκρεμές): μάζα, θερμοκρασία, αγωγιμότης, κρυσταλλική δομή, χημικές προσμίξεις, ραδιενέργεια, ταχύτητα, γων. ταχύτητα, τάση ελκυσμού, επιφανειακή υγρασία, ελαστικότητα, σχήμα ....

- **Κατάσταση**: σύνολο n αριθμών $\{x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots x_n(t_0)\}$ οι οποίοι μαζί με την είσοδο επαρκούν για την περιγραφή της συμπεριφοράς του συστήματος για κάθε $t >, t_0$
- **Περιγραφή με εξισώσεις κατάστασης:** (πληρης εσωτερική συμπεριφορά, οχι μόνο I/O)
- Γραμμική Δ.Ε. n τάξης ⇔ συστημα n γραμμικών Δ.Ε. 1ης τάξης

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t)$$

← διαφ. εξίσωση

....

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t)$$

Οπου $x_i(t) \equiv \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\varepsilon\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\sigma\tau\alpha\sigma\eta\varsigma$

Και η εξοδος: $y(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t)$

← αλγεβρική

Σε μορφή πινάκων:

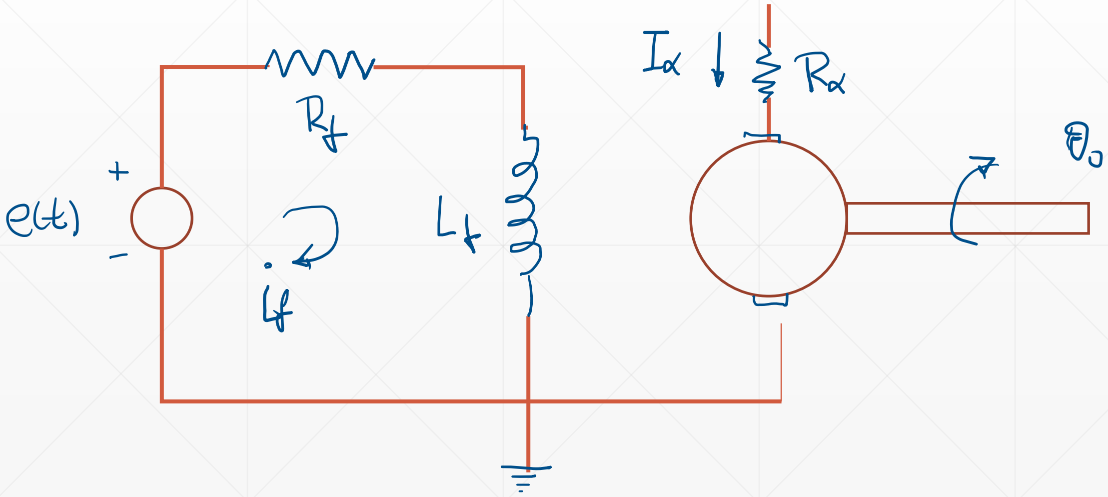
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Η αναλυτικά:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ασκηση: κινητήρας DC με ελεγχόμενη διέγερση



- Δυο τρόποι ελέγχου: απο διέγερση & απο ρότορα
- Υπόθεση:ρεύμα ρότορα σταθερό, είσοδος=τάση διέγερσης $e(t)$, εξοδος=γων.θέση αξονα $\theta_0(t)$
- Εξ. Kirchoff για κύκλωμα διέγερσης:

$$L_f \dot{i}_f(t) + R_f i_f(t) = e(t) \qquad (1)$$

- Εξ. Νεύτωνα για μηχαν. φορτίο:

$$J\ddot{\theta}_0(t) + B\dot{\theta}_0(t) = \tau(t) \qquad (2)$$

- Σχέση ροπής-ρεύματος

$$\tau(t) = K_\tau i_f(t)$$

- Επιλέγουμε σαν μεταβλητές κατάστασης $\theta_0(t)$, $\dot{\theta}_0(t)$, $i_f(t)$

τότε $x_1(t) \overset{\text{ορ}}{=} \theta_0(t)$, $x_2(t) \overset{\text{ορ}}{=} \dot{\theta}_0(t)$, $x_3(t) \overset{\text{ορ}}{=} i_f(t)$

και $u(t) = e(t)$

(Από τις εξισώσεις): $\boxed{\dot{x}_1(t) = x_2(t)}$

① $\Rightarrow$ $$L_f\, \dot{i}_f(t) + R_f i_f(t) = e(t)$$ $\Rightarrow$ $\boxed{L_f\, \dot{x}_3(t) + R_f\, x_3(t) = u(t)}$

② $\Rightarrow$ $$J\, \ddot{\theta}_0(t) + B\, \dot{\theta}_0(t) = \tau(t)$$ $\Rightarrow$ $\boxed{J\, \dot{x}_2(t) + B\, x_2(t) = K_\tau\, x_3(t)}$

Άρα,
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{B}{J} x_2(t) + \frac{K_\tau}{J} x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = -\frac{R_f}{L_f} x_3(t) + \frac{1}{L_f} u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A\underline{x} + Bu \\ y = Cx = \theta_0(t) \end{cases}$$

δηλαδή,
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{K_\tau}{J} \\ 0 & 0 & -R_f/L_f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_f \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πως επιλέγονται οι μεταβλητές κατάστασης

- Ενας τρόπος επιλογής των μεταβλητών κατάστασης : μια μεταβλητή και οι n-1 παράγωγοι της
- Εστω $G_p(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d^{(n)} y(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_0 y(t) = u(t) \quad (1)$$

- αν ορίσουμε $x_1(t) \overset{\Delta}{=} y(t)$ $\Rightarrow$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$$
$$x_3(t) = \ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$x_n(t) = y^{(n-1)}(t) = \dot{x}_{n-1}(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_n(t) + \alpha_{n-1} x_n(t) + \alpha_{n-2} x_{n-1}(t) + \dots + \alpha_0 x_1(t) = u(t)$$

μαζί με τις εξισωσεις ορισμου

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

με $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Τότε

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

‘ελεγξιμη κανονική μορφή’

- Παράδειγμα: <u>για το 3-διαστατο σύστημα</u>

$$G_p(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

τότε, $\dot{x}_1=x_2$

$\dot{x}_2=x_3$

$\dot{x}_3=-\alpha_1x_2-\alpha_2x_3+u(t)$

Άρα, $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-\alpha_0&-\alpha_1&-\alpha_2\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

❑ Οταν εχουμε μηδενικά : (αριθμητής ≠1)

στο ιδιο παράδειγμα συστήματος $3^{ης}$ τάξης $G_p(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_1s+c_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$

θετουμε

$x_1(t)=y(t)$

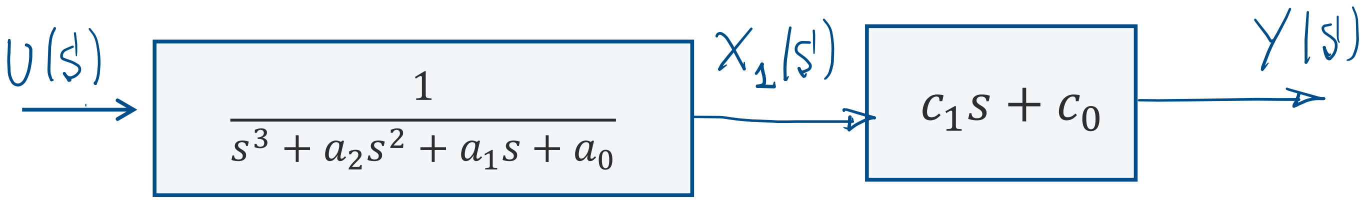
$x_2(t)=\dot{y}(t)$

$\vdots$

$\Rightarrow \dot{x}_3(t)+\alpha_2x_3(t)+\alpha_1x_2(t)+\alpha_0x_1(t)=C_1\dot{u}(t)+C_0u(t)$

- επειδή υπάρχει ο όρος $\dot{u}(t)$: διαιρούμε την Σ.Μ. σε δυο μέρη:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{X_1(s)}{U(s)}\frac{Y(s)}{X_1(s)} \quad \text{με} \quad \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0} \qquad \text{και} \quad \frac{Y(s)}{X_1(s)} = c_1s + c_0$$



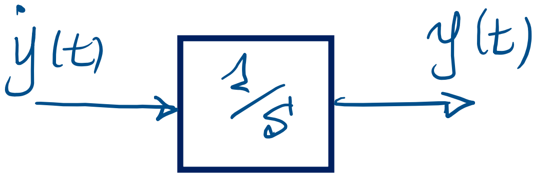
τοτε η περιγραφή αυτού του συστήματος , γίνεται:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

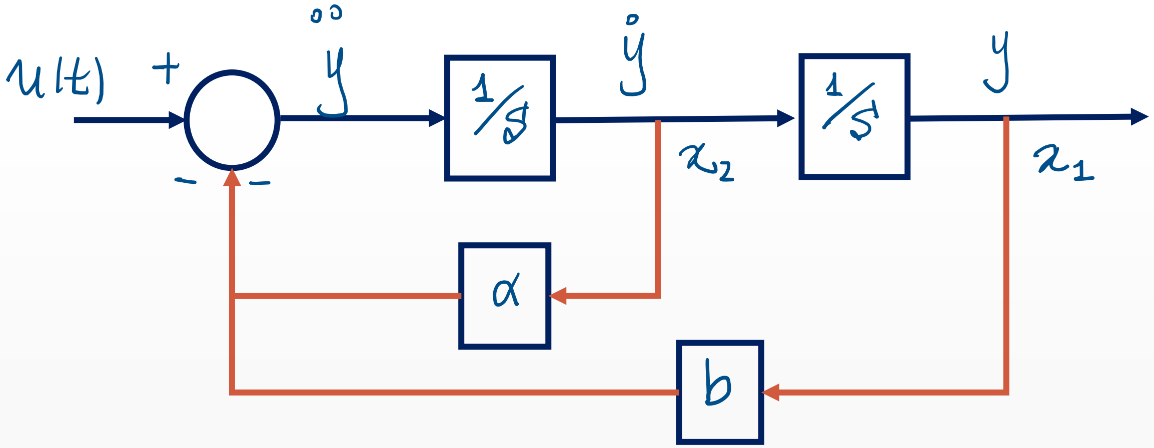
$$y(t) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$ (← η μόνη διαφορά)

Εφαρμογή των λειτουργικών διαγραμμάτων

- Για την εύρεση του προτύπου καταστατικών εξισώσεων



- εστω Δ.Ε. : $\ddot{y}(t)+\alpha\dot{y}(t)+by(t)=u(t) \Rightarrow \ddot{y}=-u-\alpha\dot{y}-by$



- (κανόνας) μεταβλητές κατάστασης=εξοδοι ολοκληρωτών

Άρα, $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \Rightarrow \ddot{y} \equiv \dot{x}_2 = u - \alpha x_2 - b x_1$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Προσοχή: το λειτουργικό διάγραμμα δεν παριστάνει τις Δ.Ε. αλλά τον μετασχ. Laplace τους

Γραμμικότης

$$u(t) \rightarrow \boxed{S(\cdot)} \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = S[u(t)]$$

$$\downarrow$$

$$S[\alpha u_1 + \beta u_2] = \alpha S[u_1] + \beta S[u_2]$$

$$= \alpha y_1 + \beta y_2$$

Γραμμικοποίηση γύρω απο Σημ. Ισορροπίας(λειτουργίας)

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots x_n)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots x_n)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots x_n)$$

ή $\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})}$ (1)

Σημείο Ισορροπίας: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\left(x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} \right)$, $\Rightarrow \boxed{f(x_0) = 0}$

Γιά x_0:

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1}, & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1}, & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \equiv \text{"Ιακωβιανή Μήτρα"}$$

Τότε, η γραμμικοποίηση της (1) γύρω από το x_0 είναι:

$$\boxed{\dot{\xi} = Df(x_0)\,\xi}$$

Στο παράδειγμα με το εκκρεμές: (Δ.Ε.) $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$

ή σαν πρότυπο καταστατικών εξισώσεων (Π.Κ.Ε.), άν $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{g}{L}\sin x_1$$

Βρήκαμε δυο σημεια ισορροπίας: $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$, $(x_1 = \pi,\ x_2 = 0)$

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Για το Σ.Ι. $(0,0)$: $Df(x_{01}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \dot{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mp\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \xi$
- Για το Σ.Ι. $(\pi,0)$: $Df(x_{02}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}$

Σχέση Σ.Μ και Π.Κ.Ε.

- Για ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται με μια Σ.Μ. υπάρχουν ‘απειρες’ περιγραφές με πρότυπα Κ.Ε.
- Αντίστροφα όταν το σύστημα περιγράφεται με Π.Κ.Ε. η Σ.Μ. ειναι πλήρως και μοναδικά ορισμένη (πληρέστερη περιγραφή)
- όταν $\dot{x} = Ax + bu$ ⇨ $sX(s) = AX(s) + bU(s)$ ⇨
  - y=Cx — $Y(s)=C^T X(s)$ — με αρχικές συνθήκες μηδέν

$$(sI - A)X(s) = bU(s) \Rightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1} bU(s) \equiv \Phi(s)\mathrm{b}U(s)$$

$$Y(s) = C^T (sI - A)^{-1} bU(s) \Rightarrow$$

$$G(s) = \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = C^T (sI - A)^{-1} \mathrm{b}}$$

οπου $\Phi(s) \triangleq (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{\det(sI-A)}$

- τοτε, ισχύει: $G(s) = CT\frac{adj(sI-A)}{\det(sI-A)}b$
- ο αριθμητής = πολυώνυμο του s =μηδενικά, ο παρονομαστής=πόλοι του συστήματος
- Αρα, λύσεις της $D_p(s) = 0 \rightarrow \det(sI - A) = 0$ *και αρα οι πόλοι του συστηματος* είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A
- Μητρα Διελεύσεως: για το σύστημα $\dot{x} = Ax$ οπως προκύπτει απο την λύση

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x(\tau) \quad \mu\epsilon \quad e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots$$

μετ.Laplace: $sX(s) - x(0) = AX(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$ και αρα

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}\, x(0)$$ και συγκρίνοντας, προκύπτει

$$\boxed{\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}}$$