

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ

**Ευστάθεια συστήματος κλειστού βρόχου
με τη βοήθεια διαγράμματος Bode**

Ευστάθεια συστήματος

- Η γενική μορφή της συνάρτησης κλειστού βρόχου είναι

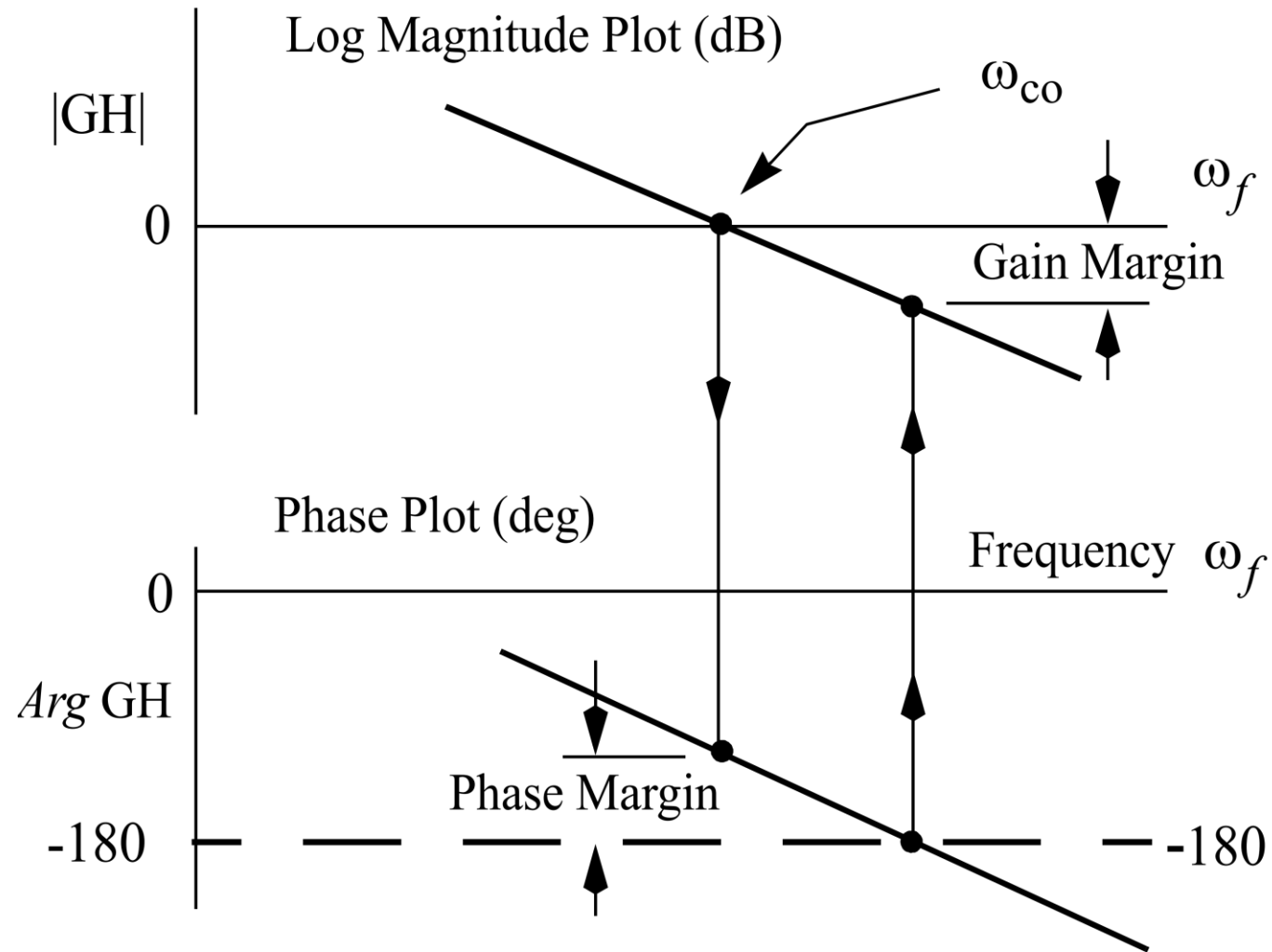
$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου από τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ανοικτού βρόχου $G(s)H(s)$ (loop function)
- Η θεωρητική βάση της παραπάνω πρότασης απαιτεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)H(s)$ να μην έχει κανένα πόλο ή μηδενικό στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο \rightarrow το σύστημα ανοικτού βρόχου πρέπει να είναι 'ευσταθές' και 'ελάχιστης φάσης' (minimum phase)
 - Αν τα μηδενικά της $G(s)H(s)$ βρίσκονται στο δεξί ημιεπίπεδο, το σύστημα (ανοικτού βρόχου) καλείται 'μη ελάχιστης φάσης' (non-minimum phase)

Ευστάθεια με χρήση διαγράμματος Bode

- Προκύπτει από το κριτήριο ευστάθειας Nyquist:
- Για να είναι το σύστημα κλειστού βρόχου ευσταθές, θα πρέπει στη συχνότητα ω_f όπου $\phi(\omega_f) = -180^\circ$, η τιμή του μέτρου $|GH|$ να είναι αρνητική. Το ποσό κατά το οποίο το κέρδος μπορεί να αυξηθεί πριν οδηγηθούμε στην αστάθεια ονομάζεται *Περιθώριο Κέρδους (Gain Margin)*
- Για να είναι το σύστημα κλειστού βρόχου ευσταθές, θα πρέπει στη συχνότητα ω_f όπου $|GH| = 0$, η διαφορά μεταξύ της φάσης $\phi(GH)$ και της τιμής -180° να είναι θετική. Η διαφορά αυτή καλείται *Περιθώριο Φάσης (Phase Margin)*

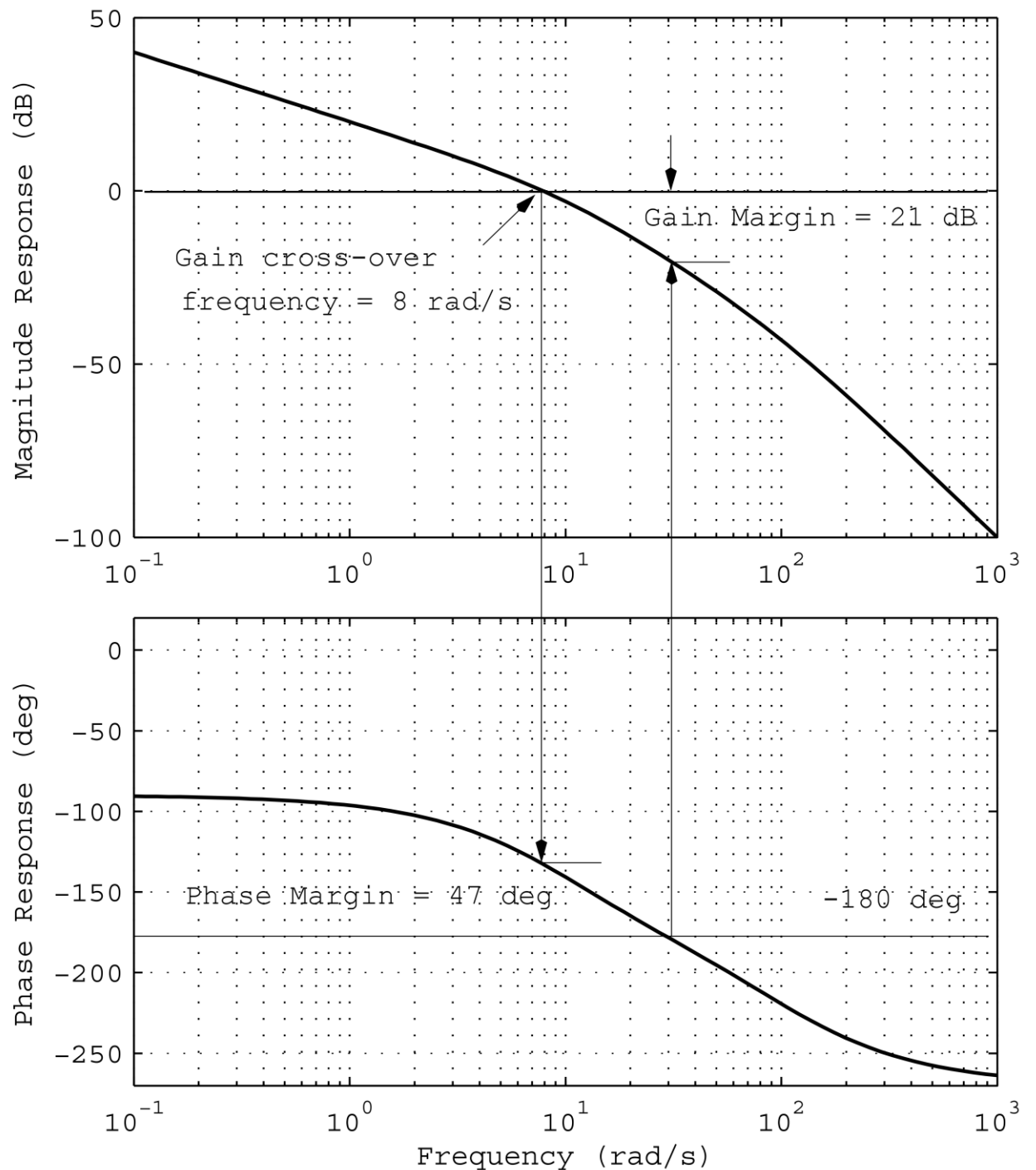
Εστάθεια με χρήση διαγράμματος Bode



ω_{co} is the “gain cross-over frequency” (rad/s)

Παράδειγμα

- Έστω το σύστημα κλειστού βρόχου με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου $G(s) = \frac{10}{s(1+s0.1)(1+s0.01)}$ και ανάδραση με μοναδιαίο κέρδος. Μελετήστε το σύστημα κλειστού βρόχου ως προς την ευστάθεια με τη βοήθεια διαγράμματος Bode.



Παράδειγμα

- Καθώς τόσο το περιθώριο κέρδους όσο και το περιθώριο φάσης είναι θετικά, το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές
- Αν το κέρδος της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου αυξηθεί κατά 21dB, το σύστημα κλειστού βρόχου θα γίνει οριακά ευσταθές και, ιδανικά, θα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος και συχνότητα στα 32rad/sec. Σημειώνεται ότι η gain-crossover συχνότητα μετατοπίζεται προς τα δεξιά (από τα 8 στα 32rad/sec)
- Περαιτέρω πληροφορίες για τη δυναμική απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου μπορούν να ληφθούν από το περιθώριο φάσης (PM). Ένας τυπικός κανόνας είναι ότι εάν το σύστημα κλειστού βρόχου έχει ένα κυρίαρχο ζεύγος μιγαδικών πόλων, τότε ο λόγος απόσβεσης των πόλων του συστήματος κλειστού βρόχου είναι περίπου $PM^{\circ}/100$
- Σε ένα μηχανικό σύστημα, για να έχουμε μια καλή μεταβατική απόκριση, το περιθώριο φάσης πρέπει να είναι περίπου 70° για ένα σύστημα κλειστού βρόχου που έχει κυρίαρχο ζεύγος μιγαδικών πόλων

Το Q-φίλτρο (Q-filter)

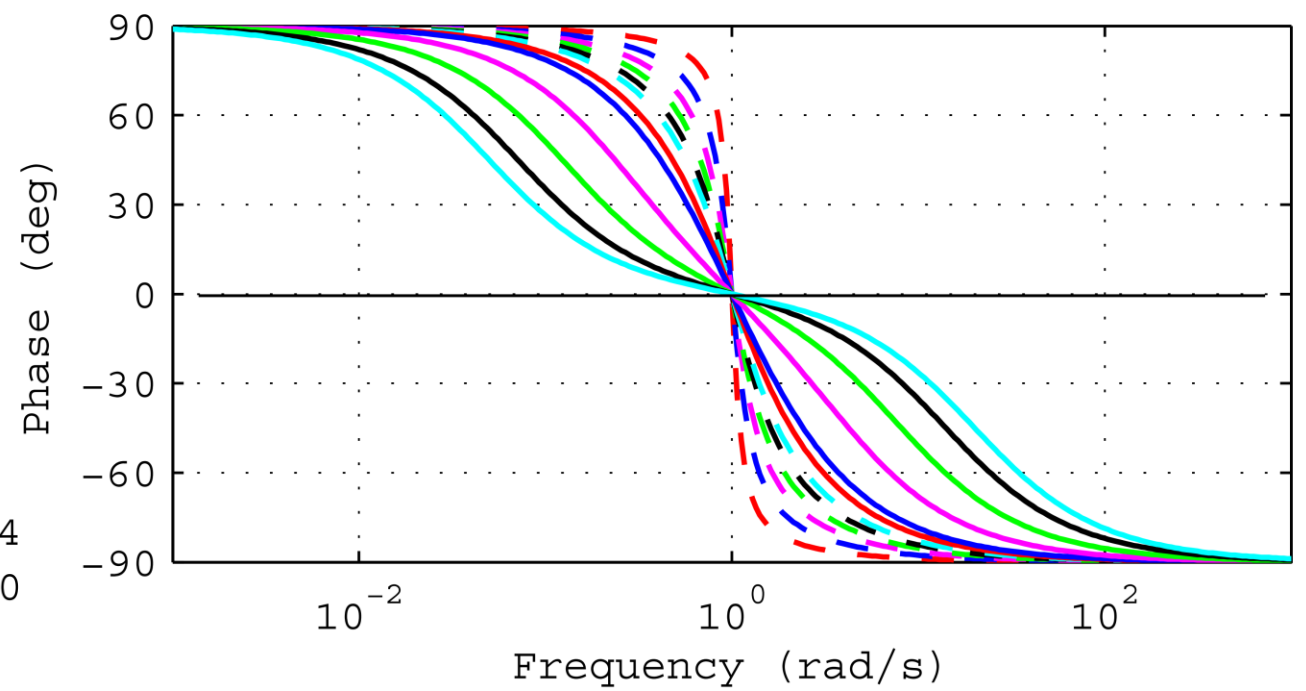
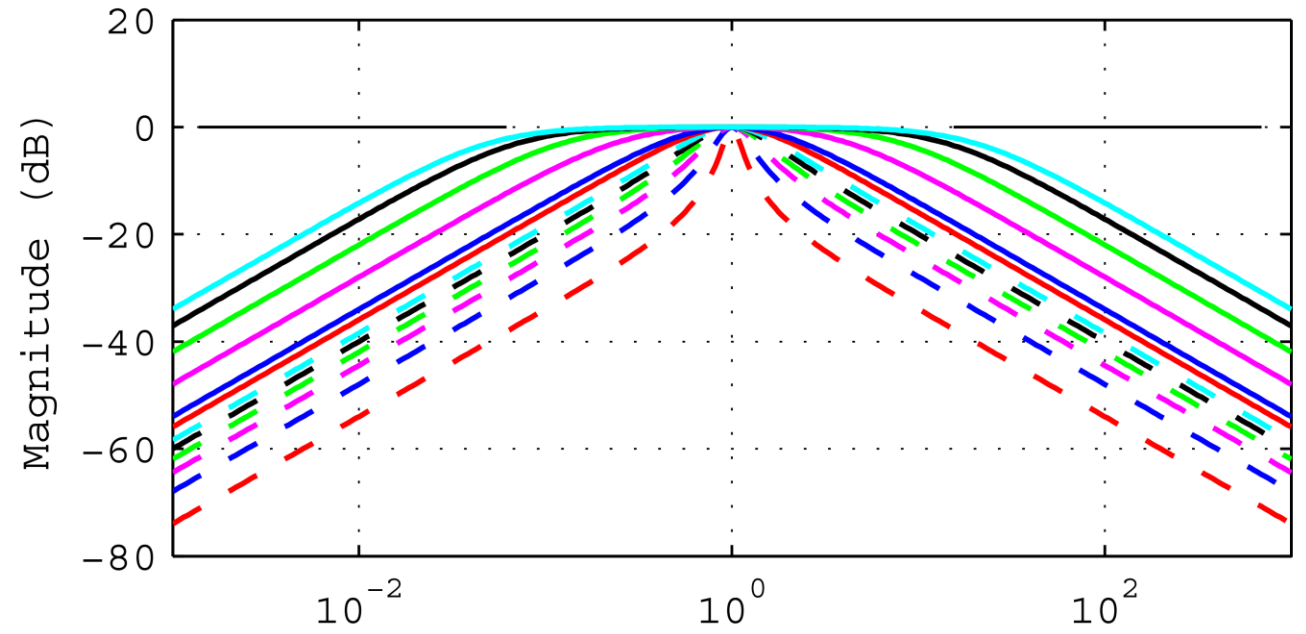
- Το Q-φίλτρο (Q-filter) είναι ένα ζωνοδιαβατό (bandpass) φίλτρο το οποίο επιτρέπει να περνά από αυτό ένα εύρος συχνοτήτων και αποκόπτει συχνότητες που βρίσκονται έξω από το εύρος αυτό.
- Η συνάρτηση μεταφοράς του Q-φίλτρου είναι:

$$Q(s) = \frac{\frac{2\xi}{\omega_m} s}{1 + \frac{2\xi}{\omega_m} s + \left(\frac{s}{\omega_m}\right)^2}$$

όπου ω_m είναι η κεντρική συχνότητα (ή συχνότητα συντονισμού), δηλαδή η συχνότητα όπου το μέτρο του $Q(s)$ γίνεται μέγιστο, και ξ ο λόγος απόσβεσης

- Το 3-bB bandwidth είναι $\omega_2 - \omega_1 = 2\omega_m\xi$ όπου $\omega_1\omega_2 = \omega_m^2$

Το Q-φίλτρο (Q-filter)



- | | | | | | | | |
|--|-------------|--|-------------|--|-------------|--|-------------|
| | $\zeta=0.1$ | | $\zeta=0.2$ | | $\zeta=0.3$ | | $\zeta=0.4$ |
| | $\zeta=0.5$ | | $\zeta=0.6$ | | $\zeta=0.8$ | | $\zeta=1.0$ |
| | $\zeta=2.0$ | | $\zeta=4.0$ | | $\zeta=7.0$ | | $\zeta=10$ |