Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ

Μέθοδοι απόκρισης συχνότητας

Μέθοδοι απόκρισης συχνότητας

- Στις μεθόδους ανάλυσης της απόκρισης συχνότητας, η εισερχόμενη συχνότητα θα περιγραφεί ως $\omega_f (rad/s)$ αντί για ω (για να μη συγχέεται με τη ταχύτητα του δρομέα)
- Θεωρούμε ότι το εφαρμοζόμενο σήμα στην είσοδο είναι ένα ημητονοειδές σήμα με σταθερό πλάτος, $r(t) = Asin\, \omega_f t$
- Στην έξοδο, θα εμφανιστεί ένα σήμα $y(t)$ ίδιας συχνότητας (όταν ολοκληρωθούν τα μεταβατικά φαινόμενα)

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)A\frac{\omega_f}{s^2 + \omega_f^2}$$

Μέθοδοι απόκρισης συχνότητας

- Εφαρμόζοντας το διαχωρισμό σε κλάσματα

$$Y(s) = \frac{AG(j\omega_f)}{2j(s - j\omega_f)} + \frac{AG(-j\omega_f)}{-2j(s + j\omega_f)} + ό\rho o\iota\ \tau\eta\varsigma\ \mu o\rho\varphi\eta\varsigma \frac{K_i}{s - p_i}$$

όπου p_i είναι οι πόλοι της $G(s)$ και K_i τα υπόλοιπα.

- Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, η χρονική απόκριση γίνεται:

$$y(t) = \frac{AG(j\omega_f)}{2j} e^{j\omega_f t} + \frac{AG(-j\omega_f)}{-2j} e^{-j\omega_f t} + \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\alpha\tau\iota\kappa o\iota\ ό\rho o\iota\ \pi o\upsilon\ \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\zeta o\nu\tau\alpha\iota\ \kappa\alpha\theta ώ\varsigma\ t \rightarrow \infty$$

Μέθοδοι απόκρισης συχνότητας

- Έστω $G(j\omega_f) = |G(j\omega_f)|e^{j\phi(\omega_f)}$ και $G(-j\omega_f) = |G(-j\omega_f)|e^{-j\phi(\omega_f)}$, όπου η φασική γωνία ϕ της $G(j\omega_f)$ είναι συνάρτηση της συχνότητας.

$$y(t) = A|G(j\omega_f)|\left[\frac{e^{j\left(\omega_f t+\phi(\omega_f)\right)} - e^{-j\left(\omega_f t+\phi(\omega_f)\right)}}{2j}\right]$$
$$= A|G(j\omega_f)|\sin\left(\omega_f t + \phi(\omega_f)\right)$$

όταν όλοι οι μεταβατικοί όροι έχουν μηδενιστεί.

- Επομένως, η απόκριση μόνιμης κατάστασης είναι

$$y(t) = A|G(j\omega_f)|\sin\left(\omega_f t + \phi(\omega_f)\right)$$

Μέθοδοι απόκρισης συχνότητας

- Επομένως, η απόκριση μόνιμης κατάστασης είναι ημιτονοειδές σήμα με πλάτος $A\left|G\left(j\omega_f\right)\right|$ και φασική μετατόπιση $\phi\left(\omega_f\right)$ ανάλογα με το σήμα εισόδου.
- Η απόκριση συχνότητας της $G(s)$ είναι τα γραφήματα των $\left|G\left(j\omega_f\right)\right|$ και $\phi(\omega_f)$ καθώς το ω_f μεταβάλλεται σε ένα εύρος συχνοτήτων.
- Η απόκριση συχνότητας προκύπτει απλώς αλλάζοντας τη μεταβλητή s με $j\omega_f$ στην $G(s)$.

Διάγραμμα απόκρισης συχνότητας

- Το διάγραμμα απόκρισης συχνότητας (διάγραμμα Bode) μιας συνάρτησης μεταφοράς λαμβάνεται με κατάλληλο λογισμικό (function ‘bode’ στο Matlab)
- Για την ανάλυση της ευστάθειας ενός συστήματος κλειστού βρόχου, λαμβάνουμε το διάγραμμα απόκρισης συχνότητας για τη συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου (loop function) $G(j\omega_f)H(j\omega_f)$
- Το σύστημα διεγείρεται από ημιτονοειδές σήμα $r(t)$ μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας ω_f. Τα δύο διαγράμματα Bode (μέτρου και φάσης) δίνονται ως λογαριθμική συνάρτηση της συχνότητας, $log\omega_f$.
- Το Bode μέτρου δίνεται σε λογαριθμική βάση του 10 ($20log|G(j\omega_f)H(j\omega_f)|$), ενώ το Bode φάσης σε μοίρες $\angle G(j\omega_f)H(j\omega_f)$

Μορφή συνάρτησης μεταφοράς για εξαγωγή Bode διαγράμματος

- Οι όροι της συνάρτησης μεταφοράς είναι προτιμότερο να εκφραστούν στην πολυωνυμική μορφή $(1 + sa_1 + \cdots)$ αντί για τη μορφή πόλων-μηδενικών $(s + a)$.

$F(j\omega_f) =$			$F(s) =$
(i)	K	from	K, a scalar gain
(ii)	$(j\omega_f)^{\pm n}$	from	$s^{\pm n}$
(iii)	$(1 + j\omega_f T)^{\pm m}$	from	$(1 + sT)^{\pm m}$
(iv)	$\left\{1 - \left(\dfrac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2 + j\,2\delta\dfrac{\omega_f}{\omega_n}\right\}^{\pm p}$	from	$\left\{1 + 2\delta\dfrac{s}{\omega_n} + \dfrac{s^2}{\omega_n^2}\right\}^{\pm p}$

Παράδειγμα

$$G(j\omega_f)H(j\omega_f) = \frac{K}{j\omega_f(1 + j\omega_f T)}$$

- Πλάτος:

$$LM = 20\log|GH| = 20\left(log|K| - log\left|j\omega_f\right| - log\left|1 + j\omega_f T\right|\right)$$

- Φάση:

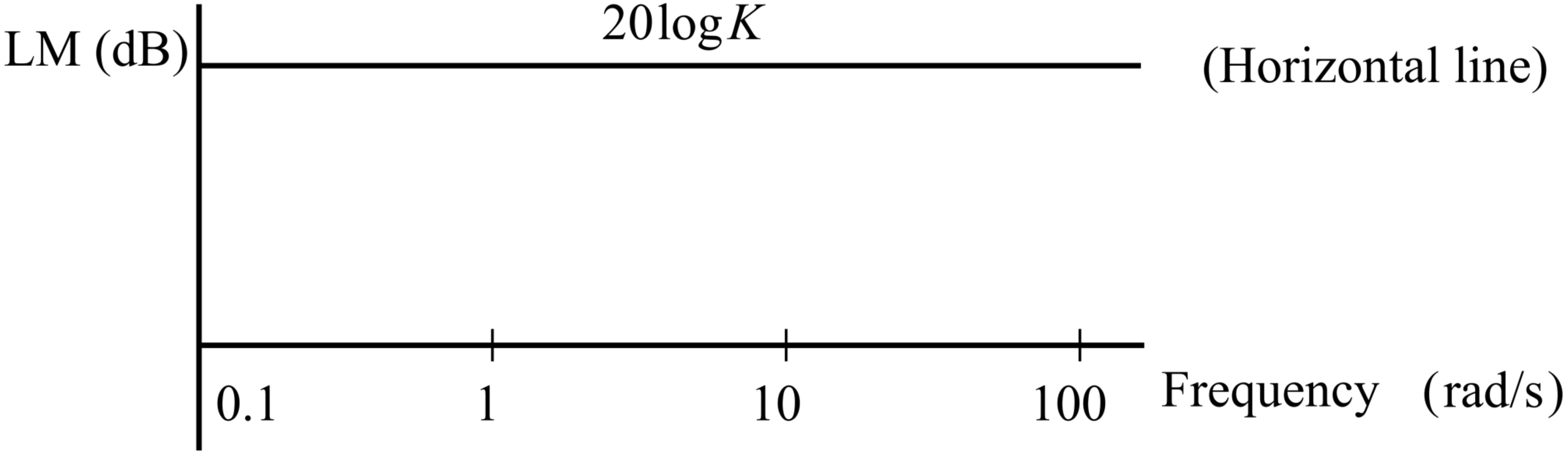
$$Arg(GH) = \angle K - \angle\left(j\omega_f\right) - \angle(1 + j\omega_f T)$$

Ας δούμε τα διαγράμματα Bode για κάθε όρο ξεχωριστά

Όρος με σταθερό κέρδος K

$$F(j\omega_f) = K$$

- $LM = 20log|K|$
- $\phi(j\omega_f) = 0$ (ή $\phi(j\omega_f) = 180^o$ αν $K < 0$)

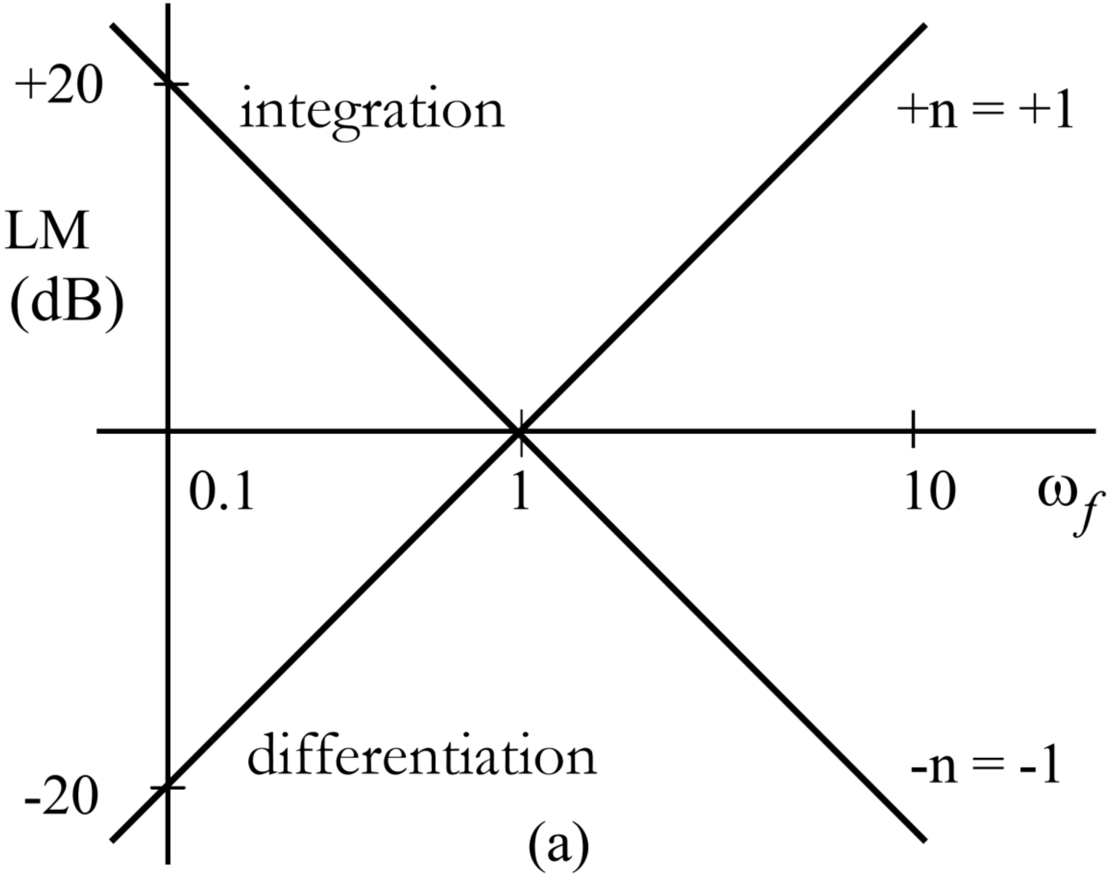


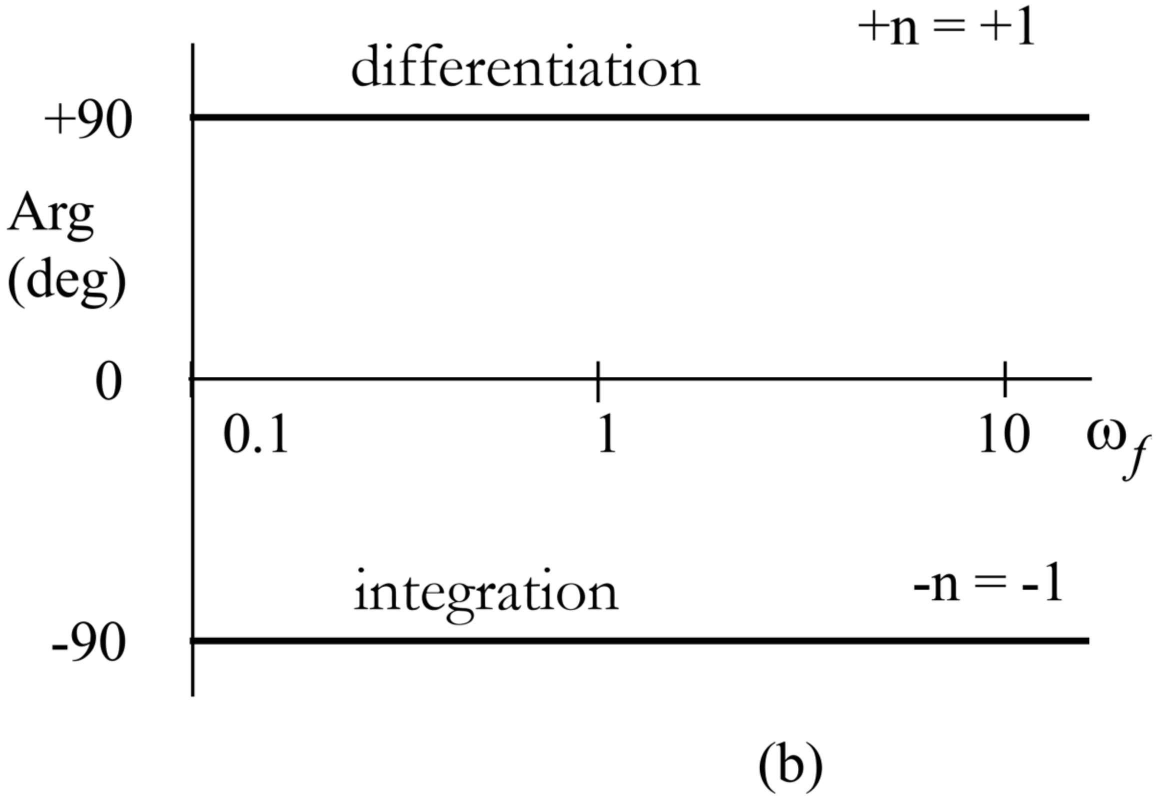
Όρος παραγώγου ή ολοκλήρωσης με πολλαπλότητα $\boldsymbol{n}$

$$F(j\omega_f) = (j\omega_f)^{\pm n}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

- $LM = 20log\left|(j\omega_f)^{\pm n}\right| = \pm 20n\log\omega_f \ \ dB$
- Αυτή η ασύμπτωτη, όταν σχεδιάζεται συναρήσει του $\log\omega_f$, είναι μια ευθεία γραμμή με κλίση $\pm 20n\ dB/decade$
- Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, τέμνει τον οριζόντιο άξονα της συχνότητας όταν $LM = 0$ στο $\log\omega_f = 0$, δηλαδή για $\omega_f = 1rad/s$
- Το διάγραμμα φάσης είναι $Arg\left[(j\omega_f)^{\pm n}\right] = \pm n90^o$, δηλαδή είναι σταθερό για ένα συγκεκριμένο n για όλες τις συχνότητες

Όρος παραγώγου ή ολοκλήρωσης με πολλαπλότητα n





Όρος που περιλαμβάνει πραγματικό πόλο/μηδενικό με πολλαπλότητα n

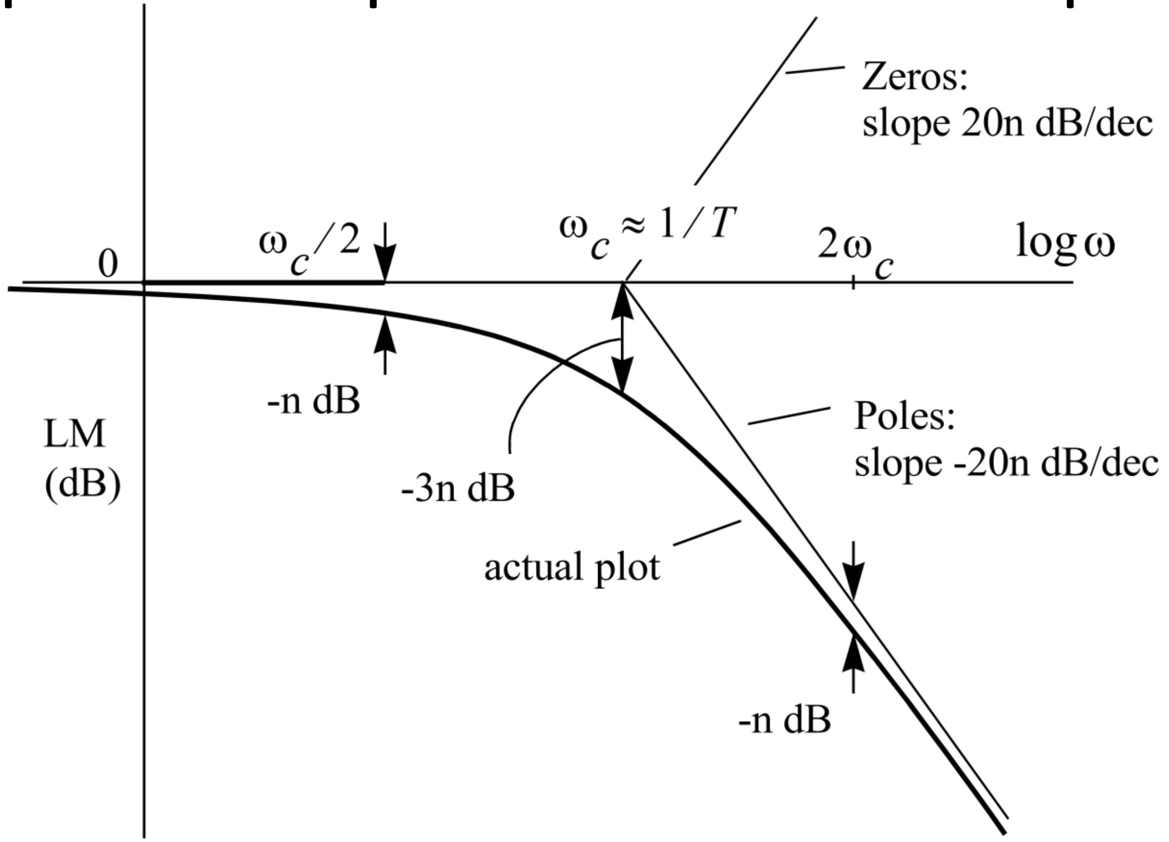
$$F(j\omega_f) = (1 + j\omega_f T)^{\pm n}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

- $LM = \pm 20n \log\left(1 + \omega_f^2 T^2\right)^{1/2} \ dB$
- Θεωρούμε τις ασύμπτωτες για α) την περίπτωση χαμηλής συχνότητας όταν $\omega_f T \ll 1$ και β) την περίπτωση υψηλής συχνότητας όταν $\omega_f T \gg 1$

α) $\omega_f T \ll 1, LM = \pm 20n \log 1 = 0dB$ (η ασύμπτωτη στις χαμηλές συχνότητες είναι οριζόντια γραμμή συναρήσει του $\log \omega_f$

β) $\omega_f T \gg 1, LM = \pm 20n \log \omega_f T = \pm 20n(\log \omega_f + \log T)\ dB$ (η ασύμπτωτη στις υψηλές συχνότητες είναι ευθεία γραμμή συναρτήσει του $\log \omega_f$ με κλίση $\pm 20n\ dB/decade$

Όρος που περιλαμβάνει πραγματικό πόλο/μηδενικό με πολλαπλότητα n



- Η διαφορά μεταξύ του πραγματικού διαγράμματος Bode και των ασυμπτώτων στο σημείο τομής τους (corner frequency $\omega_c = 1/T$) είναι 3n dB.

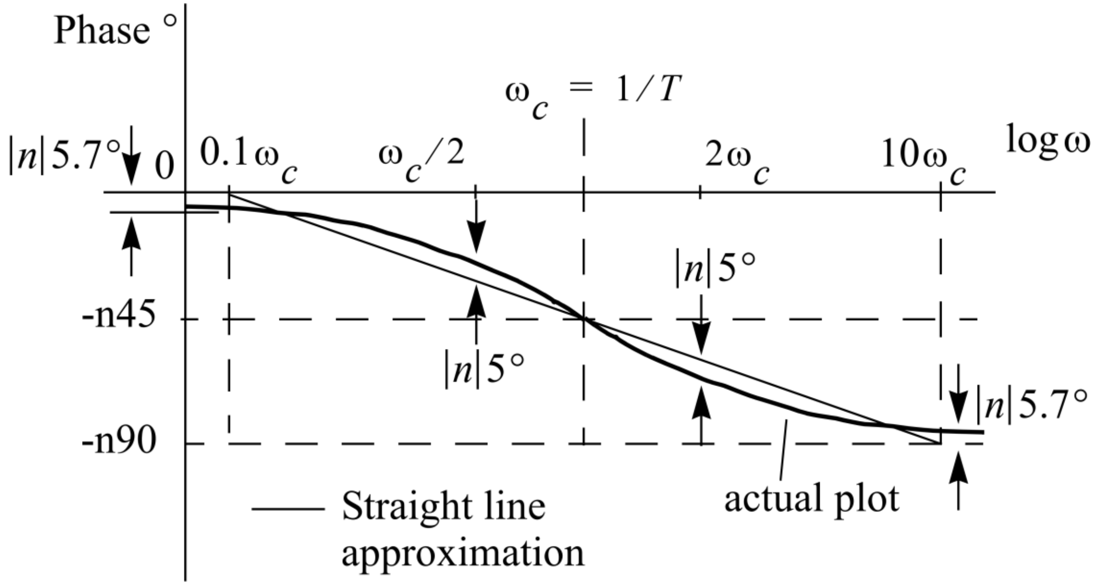
Όρος που περιλαμβάνει πραγματικό πόλο/μηδενικό με πολλαπλότητα n

- Ας δούμε τώρα το διάγραμμα Bode φάσης $\phi(j\omega_f)$ της συνάρτησης μεταφοράς $F(j\omega_f) = \left(1 + j\omega_f T\right)^{\pm n}, \quad n = 1,2, \ldots$

α) Για $\omega_f T \ll 1$: $\phi = \pm n \tan^{-1}(\omega_f T \to 0)$, δηλαδή $\phi \to 0^o$

β) Για $\omega_f T \gg 1$: $\phi = \pm n \tan^{-1}(\omega_f T \to \infty)$, δηλαδή $\phi \to \pm n 90^o$

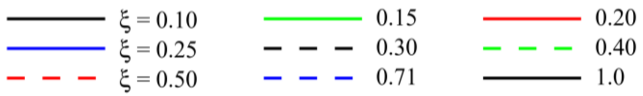
γ) Για $\omega_f T = 1$ $(corner)$: $\phi = \pm n \tan^{-1} 1$, δηλαδή $\phi \to \pm n 45^o$

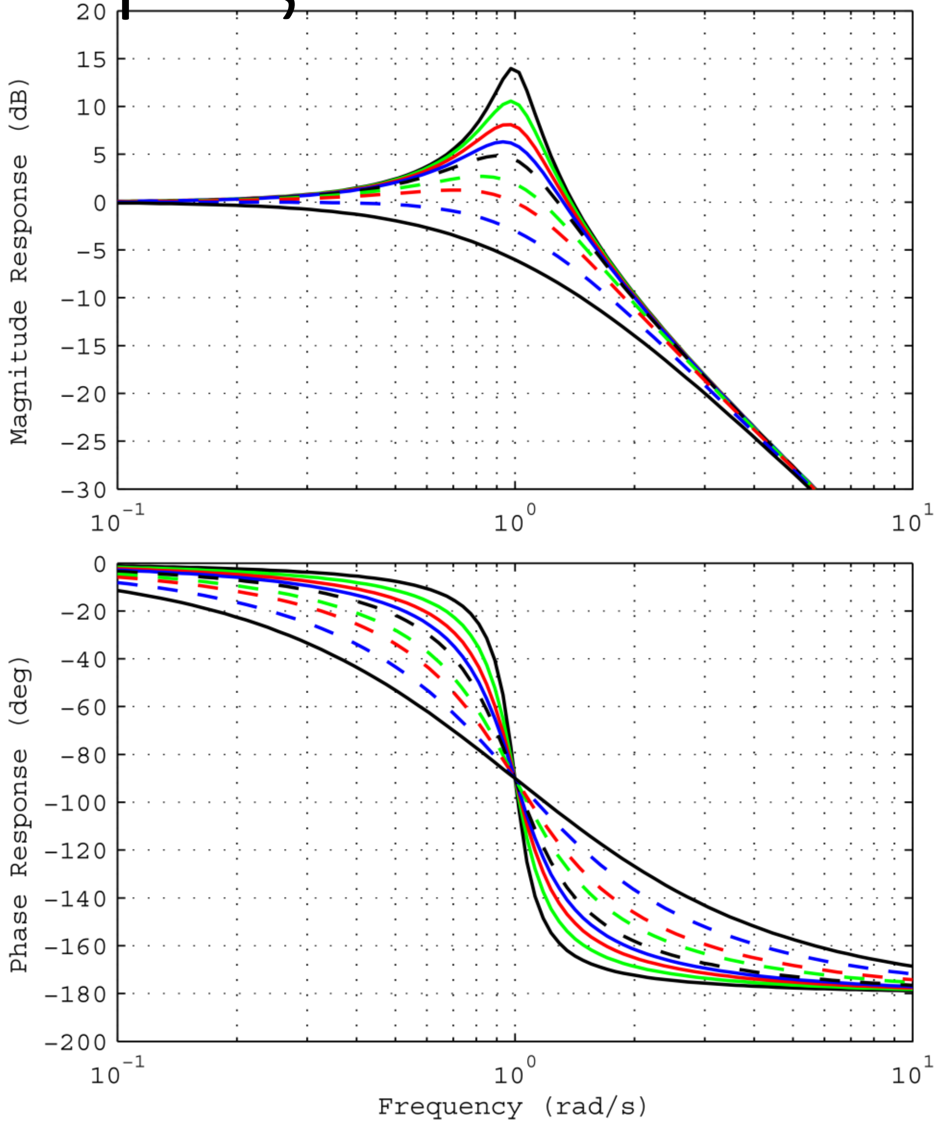


Όρος που περιλαμβάνει μιγαδικό ζεύγος πόλων ή μηδενικών πολλαπλότητας $\boldsymbol{n}$

$$F(j\omega_f) = \left\{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega_f}{\omega_n}\right\}^{\pm n}$$

- Η απόκριση συχνότητας ενός απλού ζεύγους μιγαδικών πόλων (n=-1) για διαφορετικές τιμές του λόγους απόσβεσης $0.1 \leq \xi \leq 1$ ως προς την κανονικοποιημένη συχνότητα ω_f/ω_n, όπου ω_n είναι η μη αποσβενύμενη φυσική συχνότητα, φαίνεται παρακάτω:





Παράδειγμα Lead αντιστάθμισης (lead compensation)

- Η lead αντιστάθμιση εφαρμόζεται συνήθως ως μια πιο πρακτική μορφή αντιστάθμισης παραγώγων σε ένα εύρος συχνοτήτων. Η εφαρμοφή της στον έλεγχο συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας βοηθά στην εισαγωγή όρου lead φάσης σε ένα εύρος συχνοτήτων.
- Η μορφή της συνάρτησης μεταφοράς lead είναι:

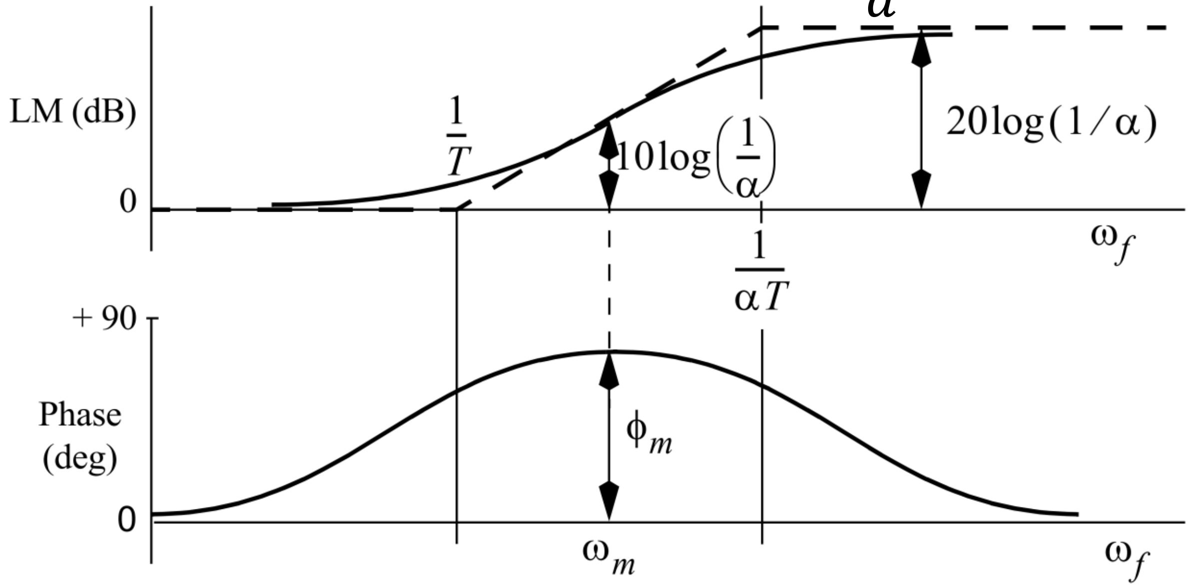
$$AG_{LD}(s) = A\frac{1 + sT}{1 + s(aT)}$$

όπου A είναι ένα μεταβλητό κέρδος.

- Το εύρος των τιμών του a είναι τυπικά $0.1 < a < 1$ όταν η συνάρτηση μεταφοράς υλοποιείται με αναλογικές συσκευές

Παράδειγμα Lead αντιστάθμισης (lead compensation)

- Για $a = 0.1$ η lead φάση είναι 56^o. Για τιμές του $a < 0.1$ η επιπλέον φάση lead που δημιουργείται είναι μικρή. Η σειριακή σύνδεση δύο όμοιων lead δικτύων με $a = 0.25$ οδηγεί σε μέγιστη μετατόπιση φάσης ενός απλού lead δικτύου με $a = 0.025$.
- Η μέγιστη lead φάση ϕ_m εμφανίζεται στο γεωμετρικό μέσο των άκρων $\omega_m = \left(\frac{1}{aT}\frac{1}{T}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}T}$. Η μέγιστη lead φάση είναι $\phi_m = \sin^{-1}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$. Στη συχνότητα ω_m το πλάτος είναι $LM = 10\log\frac{1}{a}$



Παράδειγμα

- Σχεδιάστε το προσεγγιστικό διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς:

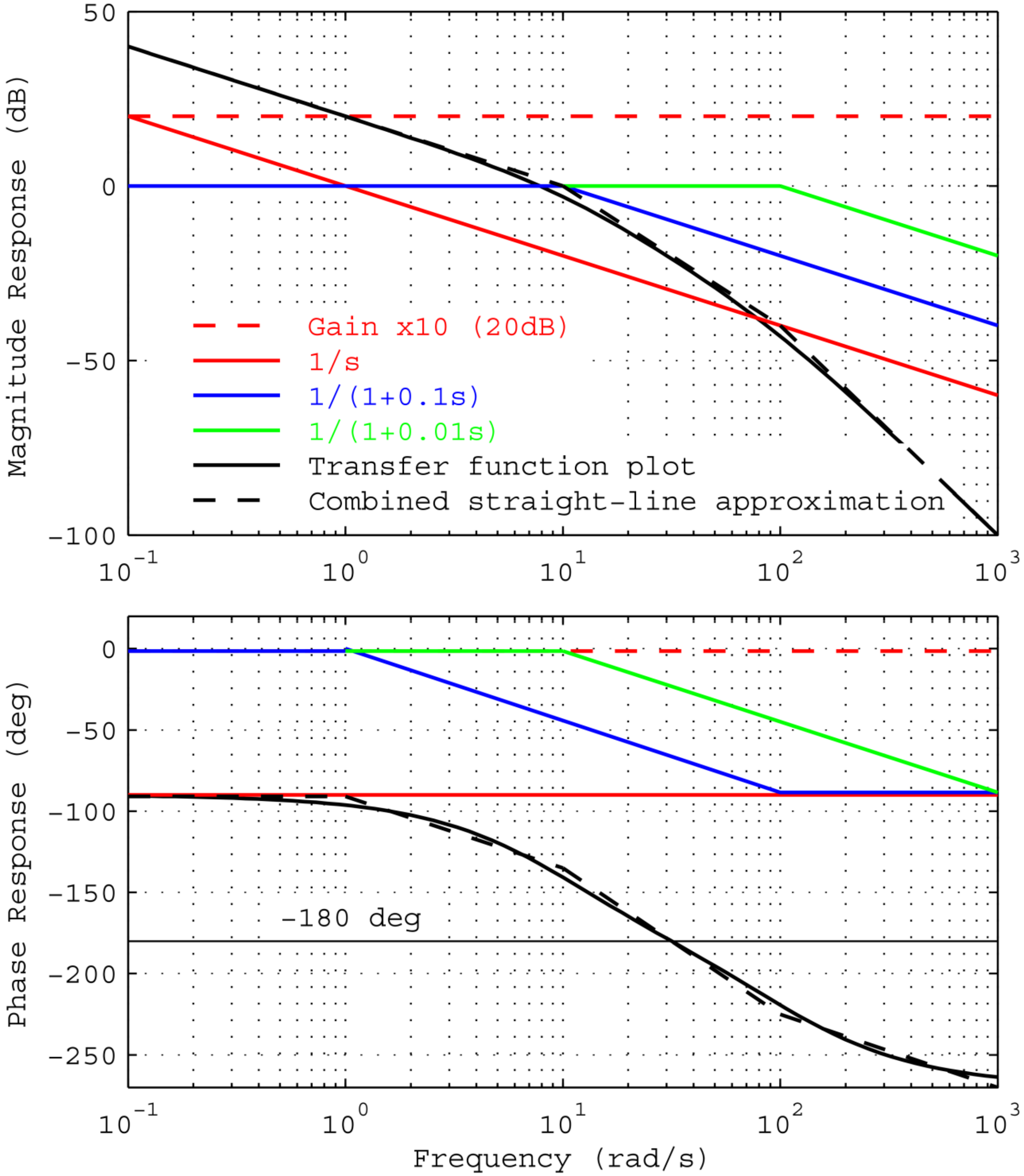
$$B(s) = \frac{10^4}{s(s+10)(s+100)}$$

- Ισοδύναμα:

$$B(s) = \frac{10}{s(1+s0.1)(1+s0.01)}$$

- Το κέρδος είναι 10 (ή 20bB)
- Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας όρος ολοκλήρωσης. Επιπλέον, οι συχνότητες στις οποίες αντιστοιχούν οι άλλοι πόλοι είναι $\omega_{c1} = \frac{1}{0.1} = 10 rad/s$ και $\omega_{c2} = \frac{1}{0.01} = 100 rad/s$

Παράδειγμα


Magnitude Response (dB)
50
0
-50
-100
Gain x10 (20dB)
1/s
1/(1+0.1s)
1/(1+0.01s)
Transfer function plot
Combined straight-line approximation
Phase Response (deg)
0
-50
-100
-150
-200
-250
-180 deg
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)