

# Ανάλυση Μικρού Σήματος και Έλεγχος: Εφαρμογή στα ΣΗΕ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ

**Θεωρία συστημάτων και ελέγχου για Συστήματα  
Ηλεκτρικής Ενέργειας**

# Στόχος του μαθήματος

Κατανόηση της θεωρίας των Συστημάτων και Ελέγχου για εφαρμογή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας:

- Μαθηματική περιγραφή δυναμικών συστημάτων
- Συναρτήσεις μεταφοράς και απόκριση συστημάτων
- Ευστάθεια
- Σχεδιασμός και ανάλυση ελεγκτών
- Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης
- Παραδείγματα συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας

# Υλικό μαθήματος

- M. J. Gibbard, P. Pourbeik and D. J. Vowles, “Small-signal stability, control and dynamic performance of power systems”, University of Adelaide Press (2015)

+ σημειώσεις διάλεξης

+ διαφάνειες eclass

*Χρήσιμη προηγούμενη γνώση: Βασικές έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας, Διαφορικών Εξισώσεων*

# Τρόπος διδασκαλίας και εξέτασης

Τρόπος διδασκαλίας:

- Διαλέξεις (13 εβδομάδες x 4 ώρες = 52 ώρες) – θεωρία και παραδείγματα (ασκήσεις)

Απαιτείται διάβασμα στο σπίτι (98 ώρες)

**Σύνολο μαθήματος: 150 ώρες**

# Τρόπος επικοινωνίας με τους διδάσκοντες

Τρόπος επικοινωνίας:

Μέσω email:

- Γ. Κωνσταντόπουλος: [g.konstantopoulos@ece.upatras.gr](mailto:g.konstantopoulos@ece.upatras.gr)
- Δ. Καζάκος: [kazakos@ece.upatras.gr](mailto:kazakos@ece.upatras.gr)

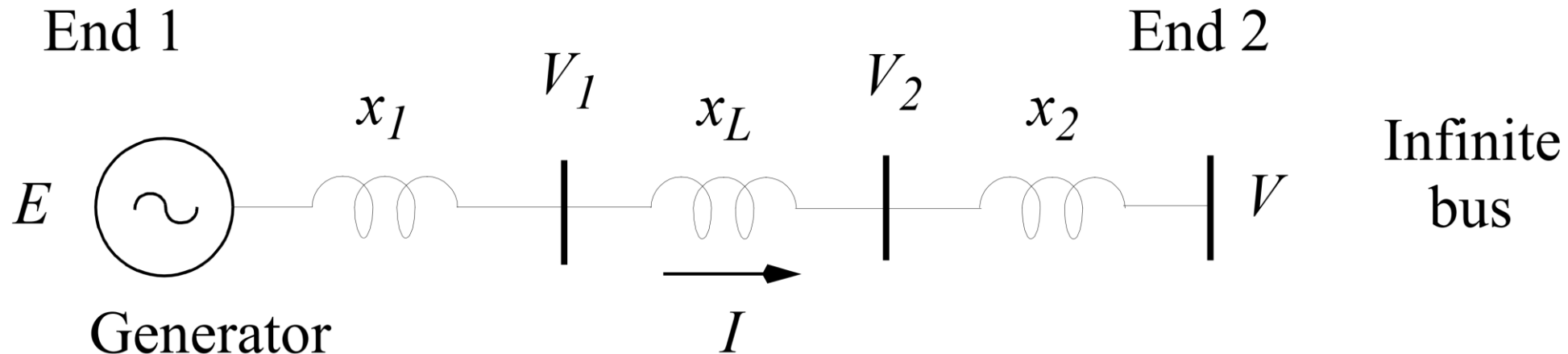
Γραφείο:

- Γ. Κωνσταντόπουλος: 3<sup>ος</sup> όροφος, Κτίριο Επέκτασης ΗΜΤΥ

Προτείνεται να στέλνετε email στους διδάσκοντες για προγραμματισμό συνάντησης

# Παράδειγμα συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας

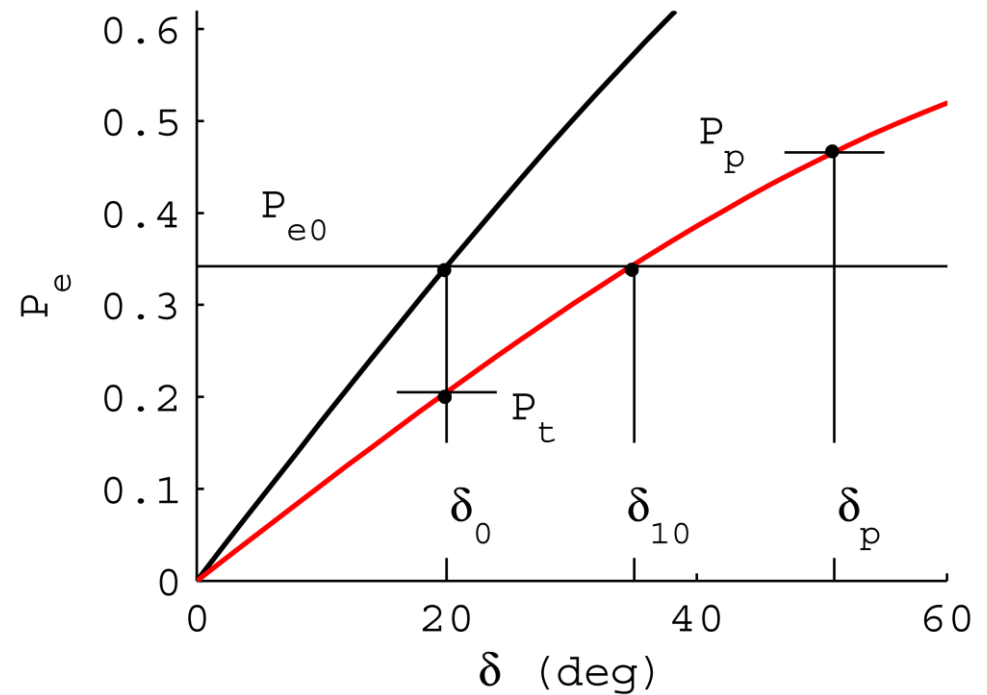
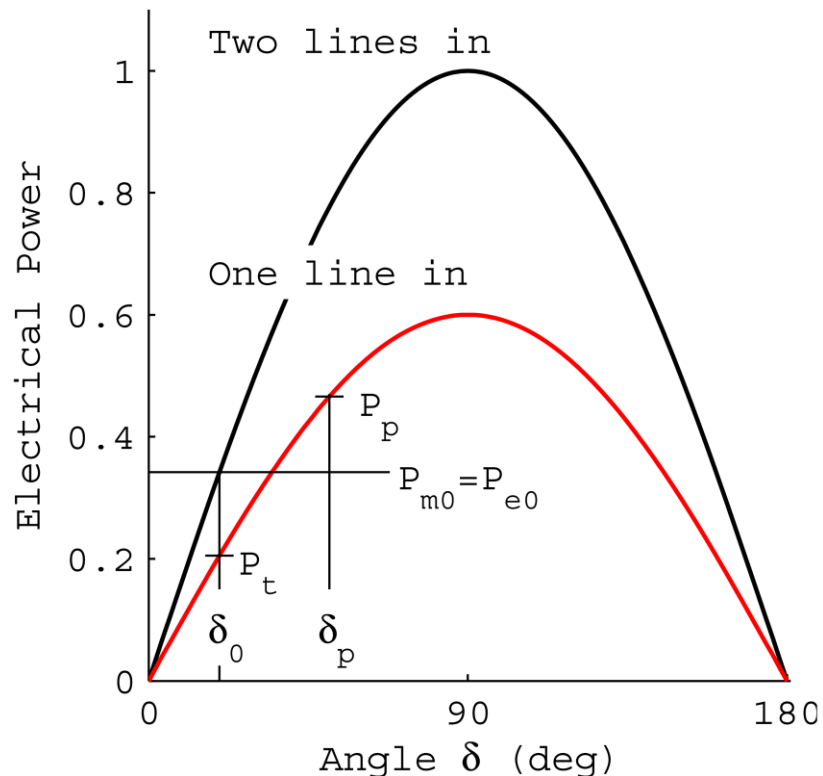
- Έστω μια σύγχρονη γεννήτρια η οποία συνδέεται μέσω μετασχηματιστή και 2 παράλληλες γραμμές σε άκρο άφιξης όπου υπάρχει μετασχηματιστής και ισχυρό δίκτυο



# Παράδειγμα συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας

- Η ισχύς εξόδου της γεννήτριας δίνεται από τη σχέση

$$P_e = \frac{EV}{x_1 + x_L + x_2} \sin \delta \quad (\text{per unit})$$



# Ευστάθεια συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας

“**Power system stability** is the ability of an electric power system, for a given initial operating condition, to regain a state of operating equilibrium after being subjected to a physical disturbance, with most system variables bounded so that practically the entire system remains intact.”

Ο παραπάνω ορισμός αναφέρεται κυρίως στα διασυνδεδεμένα συστήματα, ωστόσο περιλαμβάνει την αστάθεια και άμεση αποσύνδεση ενός στοιχείου, πχ. μιας γεννήτριας, χωρίς να γίνεται ασταθές το σύστημα



# Κατηγορίες ευστάθειας συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας

Η έννοια της ευστάθειας του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας περιλαμβάνει 3 κύριες κατηγορίες

- *Ευστάθεια γωνίας δρομέα (rotor-angle stability)*
- *Ευστάθεια τάσης (voltage stability)*
- *Ευστάθεια συχνότητας (frequency stability)*

Για να εγγυηθούμε τις παραπάνω έννοιες ευστάθειας, απαιτείται η σχεδίαση ελεγκτών, η οποία γίνεται με βάση τα χαρακτηριστικά της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος.

# Ευστάθεια γωνίας δρομέα

“**Rotor angle stability** refers to the ability of synchronous machines of an interconnected power system to remain in synchronism after being subjected to a disturbance. It depends on the ability to maintain/restore equilibrium between electromagnetic torque and mechanical torque of each synchronous machine in the system. Instability that may result occurs in the form of increasing angular swings of some generators leading to their loss of synchronism with other generators.”

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega_b(\omega - \omega_0) \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{2H} \left( T_m - T_g - D(\omega - \omega_0) \right)\end{aligned}$$

όπου  $H$  είναι η σταθερά αδράνειας (MWs/MVA) και  $D$  είναι ο συντελεστής απόσβεσης ροπής (pu torque/pu speed)

# Ευστάθεια συστήματος υπό διαταραχές

**Large-disturbance rotor angle stability or transient stability**, as it is commonly referred to, is concerned with the ability of the power system to maintain synchronism when subjected to a severe disturbance, such as a short circuit on a transmission line.

**Small-disturbance (or small-signal) rotor-angle stability** is concerned with the ability of the power system to maintain synchronism under small disturbances. The disturbances are considered to be sufficiently small that linearization of system equations is permissible for purposes of analysis.

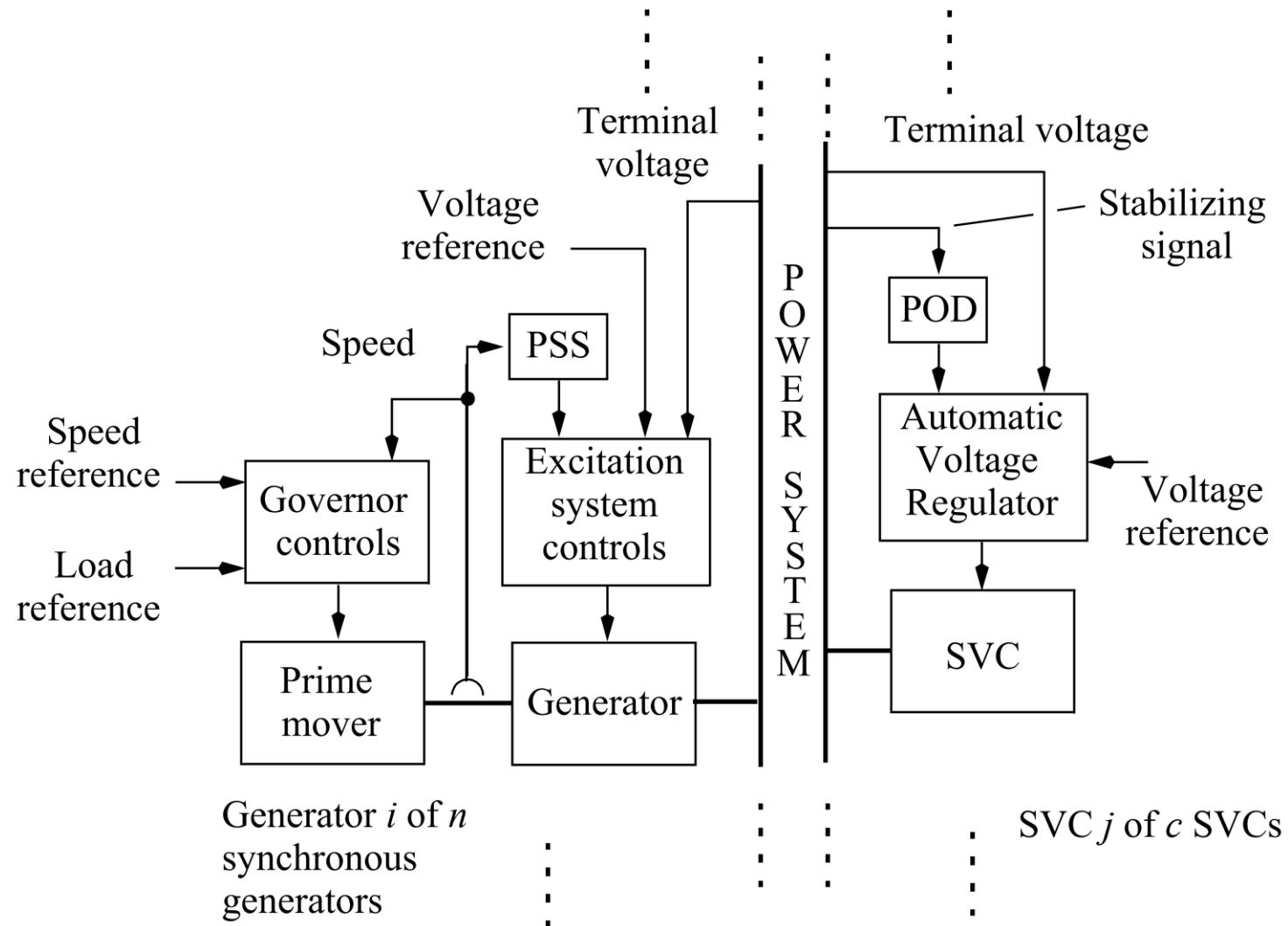
# Ευστάθεια τάσης και συχνότητας

- Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με την ευστάθεια μικρού σήματος (small-signal stability) – μικρές διαταραχές (πχ. αλλαγή φορτίου)
- Για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε τους ορισμούς ευστάθειας τάσης και συχνότητας

**Voltage stability** refers to the ability of a power system to maintain steady voltages at all buses in the system after being subjected to a disturbance from a given initial operating condition. It depends on the ability to maintain/restore equilibrium between load demand and load supply from the power system. Instability that may result occurs in the form of a progressive fall or rise of voltages of some buses.

**Frequency stability** refers to the ability of a power system to maintain steady frequency following a severe system upset resulting in a significant imbalance between generation and load. It depends on the ability to maintain/restore equilibrium between system generation and load, with minimum unintentional loss of load. Instability that may result occurs in the form of sustained frequency swings leading to tripping of generating units and/or loads.

# Έλεγχος σύγχρονης γεννήτριας και συστήματος μεταφοράς



# Ευστάθεια μικρού σήματος

- Με βάση το θεώρημα του Poincaré, το μη γραμμικό μοντέλο της συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας σε μια συγκεκριμένη κατάσταση λειτουργίας είναι ευσταθές εάν το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από τη κατάσταση αυτή ισορροπίας είναι ευσταθές
- Το πλάτος της διαταραχής πρέπει να είναι 'μικρό', πχ. βηματικές αλλαγές στο επιθυμητό σήμα εισόδου σε ένα σύστημα κλειστού βρόχου

how small is 'small'?

# Μικρές διαταραχές

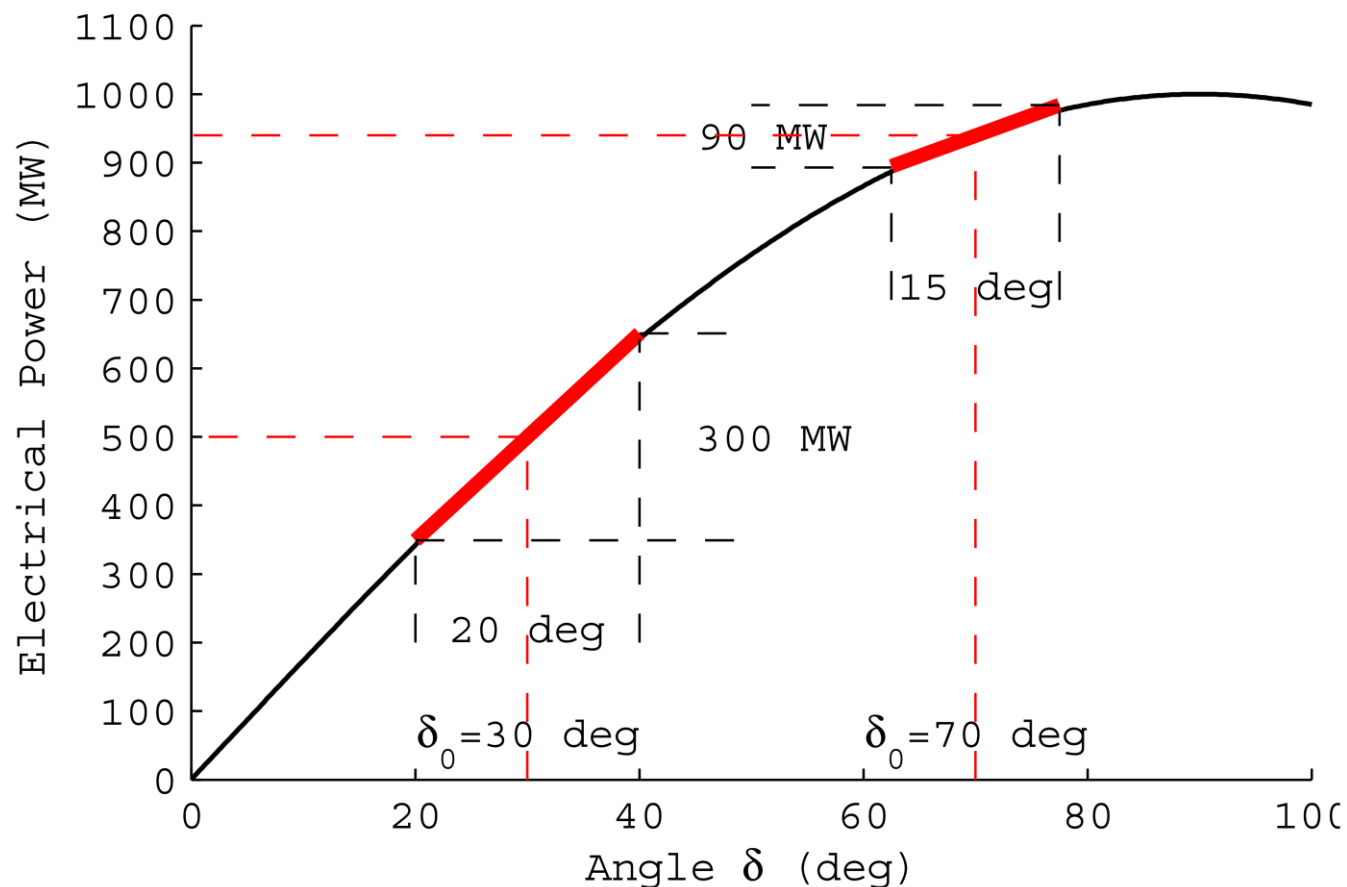
- Έστω η μη γραμμική συνάρτηση ισχύος-γωνίας:

$$P = \frac{V_s V_r}{X} \sin \delta = P_{max} \sin \delta$$

- Για μικρές διαταραχές, η μη γραμμική συνάρτηση μπορεί να γραμμικοποιηθεί γύρω από την αρχική κατάσταση ισορροπίας  $(P_0, \delta_0)$ . Η χαρακτηριστική εξίσωση μικρού σήματος γίνεται:

$$\Delta P = P_{max} \cos \delta_0 \Delta \delta$$

# Μικρές διαταραχές



- Το κριτήριο για τον καθορισμό των γραμμικών ορίων που χρησιμοποιήθηκε εδώ είναι ότι η μέγιστη διαφορά μεταξύ των γραμμικών και των μη γραμμικών χαρακτηριστικών να είναι μικρότερη από 8.5MW



# Μη γραμμικά και γραμμικά συστήματα

- Οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας, καθώς και τα επιμέρους στοιχεία που το αποτελούν, είναι μη γραμμικές.
- Περιλαμβάνουν μη γραμμικότητες όπως γινόμενα μεταξύ τάσεων και ρευμάτων, μη γραμμικές συναρτήσεις όπως ημίτονα και συνημίτονα και μη γραμμικές χαρακτηριστικές όπως ο μαγνητικός κορεσμός στις μηχανές.
- Η ανάλυση των μη γραμμικών δυναμικών είναι αρκετά σύνθετη. Από την άλλη, για τα γραμμικά συστήματα, υπάρχει βασική θεωρία και εκτενείς τεχνικές ανάλυσης της συμπεριφοράς και της ευστάθειας.

# Γραμμικοποίηση

- Όπως είδαμε στην ανάλυση μικρού σήματος για τα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, οι μη γραμμικές διαφορικές και αλγεβρικές εξισώσεις γραμμικοποιούνται γύρω από ένα σημείο ισορροπίας.
- Οι γραμμικές εξισώσεις που προκύπτουν περιλαμβάνουν **νέες** μεταβλητές, τις μεταβλητές διαταραχής (perturbed variables)
- Η γραμμικοποίηση της μη γραμμικής εξίσωσης

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x)$$

γίνεται η γραμμική εξίσωση

$$\Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + \dots + k_n \Delta x_n$$

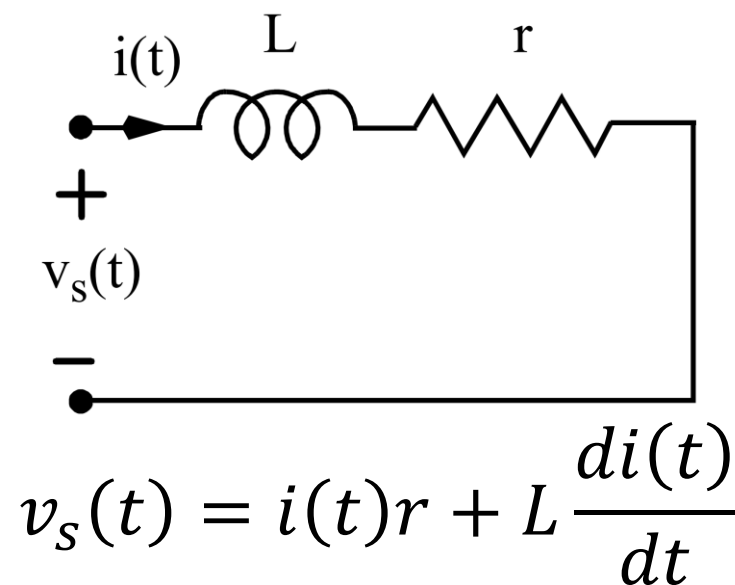
στο σημείο ισορροπίας  $Y_0, X_{10}, X_{20}, \dots, X_{n0}$ .

$$x_i = \Delta x_i + X_{i0}$$

# Μοντελοποίηση συστήματος

- Επιθυμούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος σε μια διαταραχή ή όταν εφαρμόζεται ένα σήμα ελέγχου στην είσοδο του.
- Χρειαζόμαστε ένα μαθηματικό μοντέλο του συστήματος: μπορεί να περιγραφεί από πολλά τέστ ή από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων

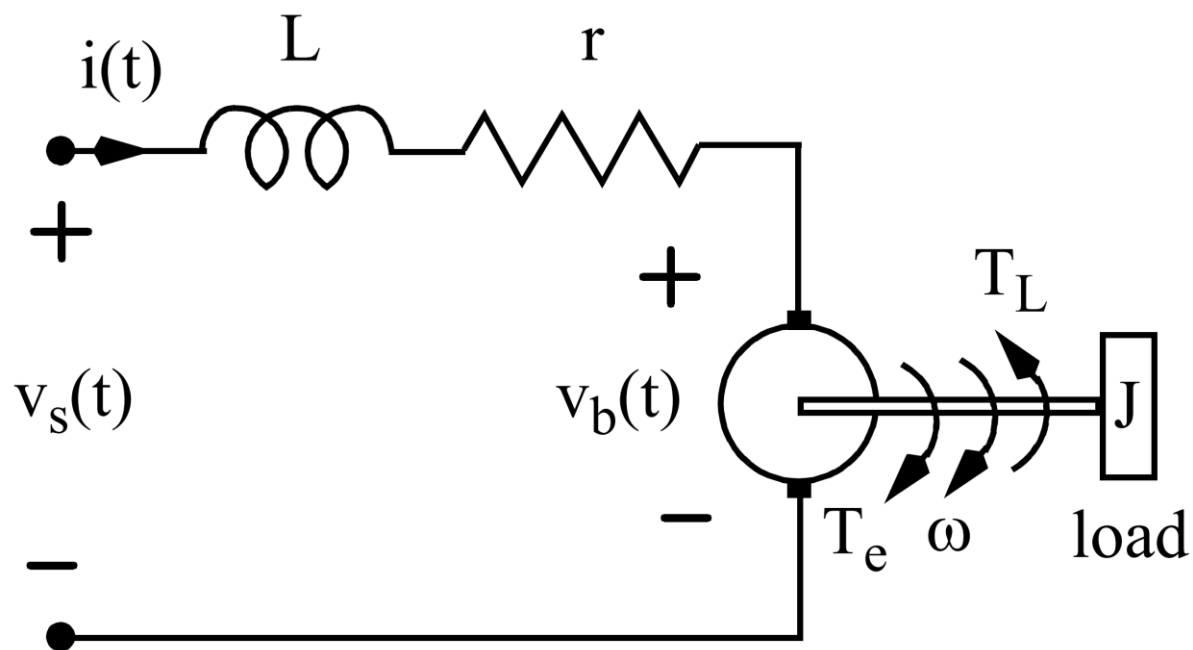
## Παράδειγμα 1:



$$\left(p + \frac{r}{L}\right) i = \frac{v_s}{L}$$

όπου  $p = d/dt$

# Παράδειγμα DC κινητήρα



Υποθέτουμε:  
 $T_L = k_L \omega$

$$\left[ p^2 + p \left( \frac{r}{L} + \frac{k_L}{J} \right) + \frac{k_L r + k_\omega k_i}{LJ} \right] \omega(t) = \frac{k_i}{LJ} v_s(t)$$

# Μοντελοποίηση συστήματος

- Γενική περιγραφή συστήματος:

$$\begin{aligned} & (p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)y(t) \\ & = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_0)u(t), \quad m \leq n \end{aligned}$$

- Γενικά  $m \leq n$ . Το σύστημα τάξης  $n$  λέγεται 'proper' όταν  $m = n$  και 'strictly proper' όταν  $m < n$ .

Είναι τα δύο προηγούμενα παραδείγματα proper ή strictly proper?

# Μετασχηματισμός Laplace

- Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται για τη λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.
- Έστω  $F(s)$  ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $f(t)$ :
  - $L[af(t)] = aF(s)$ , όπου ο  $a$  είναι σταθερός συντελεστής
  - $L[pf(t)] = sF(s) - f(0)$ , όπου  $f(0)$  η τιμή της  $f(t)$  τη χρονική στιγμή μηδέν
  - $L[p^2f(t)] = s^2F(s) - sf(0) - pf(0)$ , όπου  $pf(0)$  η τιμή της παραγώγου τη χρονική στιγμή μηδέν

# Μετασχηματισμός Laplace

Παράδειγμα:

$$p^2 y + a_1 p y + a_0 y = b_1 p u + b_0 u$$

Υποθέτουμε ότι η είσοδος  $u(t)$  ξεκινά τη στιγμή  $t(0^+)$  κι επομένως τη στιγμή μηδέν η είσοδος  $u(t)$  και όλες οι παράγωγοι της είναι μηδέν,  $u(0) = pu(0) = \dots = 0$ .

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} U(s) + \frac{(s + a_1)y(0) + py(0)}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

εξαναγκασμένη απόκριση  
(forced response)

ελεύθερη απόκριση  
(natural response)

# Συνάρτηση μεταφοράς

- Αν όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, τότε:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} = G(s)$$

όπου η  $G(s)$  καλείται **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)** μεταξύ της εισόδου  $U(s)$  και της εξόδου  $Y(s)$ .

- Άρα, αν υποθέσουμε ότι:
  - οι αρχικές συνθήκες της εξαρτημένης μεταβλητής και όλες οι παράγωγοι της είναι μηδέν,  $y(t_0) = py(t_0) = p^2y(t_0) = \dots = 0$ , και
  - το σήμα εισόδου εφαρμόζεται τη στιγμή  $t(0^+)$  ώστε το  $u(t_0)$  και όλες οι παράγωγοι του είναι μηδέν

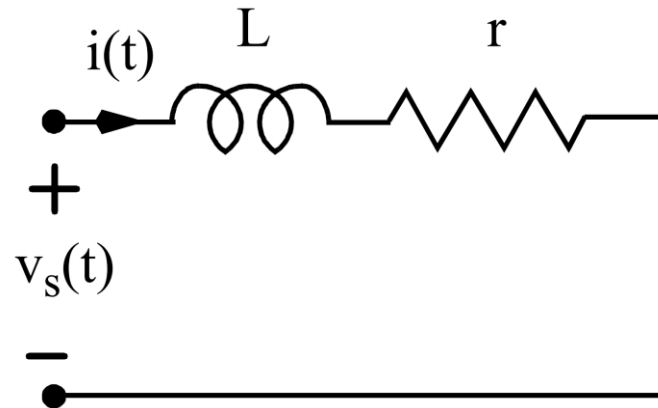
τότε ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να βρεθεί απ'ευθείας από τη διαφορική εξίσωση αντικαθιστώντας τον διαφορικό τελεστή  $p$  με το μιγαδικό τελεστή Laplace  $s$ .



# Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

$f(t)$	$F(s) = L[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2$	$\frac{2}{s^3}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$1 - \cos(\omega t)$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
$\omega t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)^2}$

# Παράδειγμα ηλεκτρικού κυλώματος



$$\left(p + \frac{r}{L}\right) i = \frac{v_s}{L}$$

- Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{r}{L}} V_s(s)$$

# Παράδειγμα ηλεκτρικού κυλώματος

- Ποιά είναι η απόκριση του συστήματος για βηματική είσοδο με  $V_0$  volts?

$$V_s(s) = V_0/s$$

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{r}{L}} \frac{V_0}{s} = \frac{V_0}{r} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + r/L} \right)$$

- Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace παίρνουμε την απόκριση του συστήματος στο χρόνο:

$$i(t) = \frac{V_0}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right)$$

# Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς

- Μπορούμε να λάβουμε σημαντικές πληροφορίες για την ευστάθεια και τη δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος από τη θέση των πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο
- Η πληροφορία αυτή μπορεί να ληφθεί χωρίς να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση του συστήματος

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad m < n$$

- Θέτοντας τον παρανομαστή ίσο με το μηδέν, λαμβάνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

# Πόλοι και μηδενικά συνάρτησης μεταφοράς

- Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_1, \dots, p_n$  λέγονται *πόλοι* (*poles*) της συνάρτησης μεταφοράς  $G(s)$  ενώ τα  $z_1, \dots, z_m$  ονομάζονται *μηδενικά* (*zeros*)
- Οι πόλοι και τα μηδενικά της  $G(s)$  μπορεί να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, η

$$G(s) = \frac{13(s + 5)}{s^2 + 4s + 13}$$

έχει πόλους  $p_1 = -2 + j3$ ,  $p_2 = -2 - j3$  και μηδενικά  $z_1 = -5$ .

# Διαχωρισμός σε κλάσματα

- Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_i}{s - p_i} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}, m < n$$

- Ας εξετάσουμε την απόκριση του συστήματος σε βηματική είσοδο. Καθώς  $U(s) = 1/s$ , τότε η απόκριση  $Y(s)$  είναι:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s}$$

η οποία μπορεί να χωριστεί σε κλάσματα ως:

$$Y(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

# Διαχωρισμός σε κλάσματα

- Η απόκριση του συστήματος στο χρόνο είναι:

$$y(t) = K_0 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}$$

- Σημειώνεται ότι:

- Η απόκριση  $y(t)$  αποτελείται από έναν όρο μόνιμης κατάστασης  $K_0$  και μεταβατικούς όρους. Το  $K_0$  είναι η απόκριση όταν όλοι οι μεταβατικοί όροι έχουν μηδενιστεί
- $K_i$ ,  $i > 0$ , είναι το πλάτος των μεταβατικών όρων  $K_i e^{p_i t}$  τη χρονική στιγμή 0
- Αν η βηματική είσοδος αυξηθεί κατά έναν παράγοντα  $A$ , τότε όλοι οι όροι πολλαπλασιάζονται με τον παράγοντα αυτό
- Η μορφή της μεταβατικής απόκρισης  $y(t)$  καθορίζεται από τις  $n$  ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $Q(s)$ , ή τους  $n$  πόλους της  $G(s)$
- Αν  $p_1$  και  $p_2$  είναι ένα ζεύγος μιγαδικών πόλων, δηλαδή  $p_2 = p_1^*$  τότε τα αντίστοιχα  $K_1$  και  $K_2$  είναι επίσης ένα ζεύγος μιγαδικών αριθμών,  $K_2 = K_1^*$

# Μορφή απόκρισης συστήματος

- Για αρχή, ας υποθέσουμε ότι όλες οι ρίζες του  $Q(s)$  έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Θεωρούμε πραγματικές και μιγαδικές ρίζες του  $Q(s)$ :

$p_i = a_i$  για κάθε  $i$  –στή πραγματική ρίζα, και

$p_k = a_k - j\omega_k$  και  $p_{k+1} = a_k + j\omega_k$  για το μιγαδικό ζεύγος  $k, k + 1$

- Ο όρος που σχετίζεται με την πραγματική ρίζα είναι

$$K_i / (s - a_i)$$

το οποίο οδηγεί στην χρονική απόκριση  $K_i e^{a_i t}$ . Αν το  $a_i$  είναι αρνητικός, η απόκριση έχει μια *μονότονη εκθετικά μειούμενη μορφή*.



# Μορφή απόκρισης συστήματος

- Αντίστοιχα, το μιγαδικό ζεύγος  $p_k = a_k - j\omega_k$  και  $p_{k+1} = a_k + j\omega_k$  οδηγεί στην ύπαρξη των όρων

$$\frac{K_k}{s - (a_k - j\omega_k)} + \frac{K_k^*}{s - (a_k + j\omega_k)}$$

Οι όροι αυτοί οδηγούν στην ύπαρξη του παρακάτω όρου στο πεδίο του χρόνου

$$Ae^{a_k t} \sin(\omega_k t + \phi_k)$$

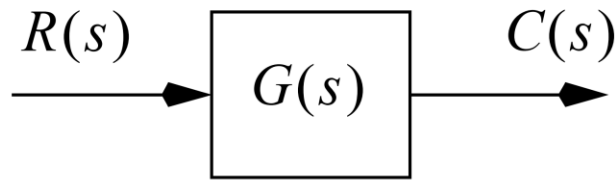
Αν το  $a_k$  είναι αρνητικός, η απόκριση έχει μια *ταλαντούμενη εκθετικά μειούμενη ημιτονοειδή μορφή*.

# Μορφή απόκρισης συστήματος

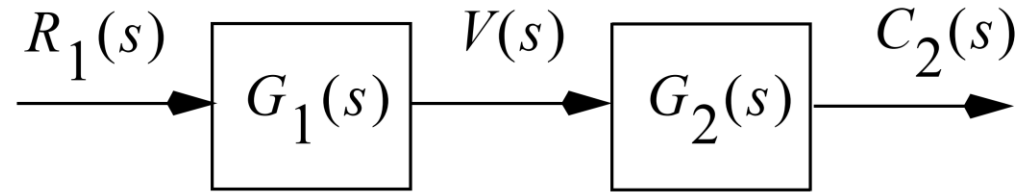
Συμπερασματικά:

- Η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε μια είσοδο αποτελείται από την απόκριση μόνιμης κατάστασης και τη μεταβατική απόκριση
- Ο όρος μόνιμης κατάστασης σχετίζεται απ'ευθείας με τη συνάρτηση εισόδου (πχ. διπλασιάζοντας το πλάτος της εισόδου, διπλασιάζεται το πλάτος της απόκρισης)
- Οι μεταβατικοί όροι καθορίζονται από το αρχικό πλάτος της συνάρτησης εισόδου τη χρονική στιγμή  $t(0^+)$ . Ωστόσο, η μεταβατική απόκριση έχει μια μορφή που χαρακτηρίζει το σύστημα και προσδιορίζεται από τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς
- Η πληροφορία που λαμβάνεται από το διαχωρισμό σε κλάσματα χρησιμεύει στο σχεδιασμό και την ανάλυση ενός μηχανικού ώστε να γίνει κατανοητή η χαρακτηριστική απόκριση του συστήματος στο χρόνο

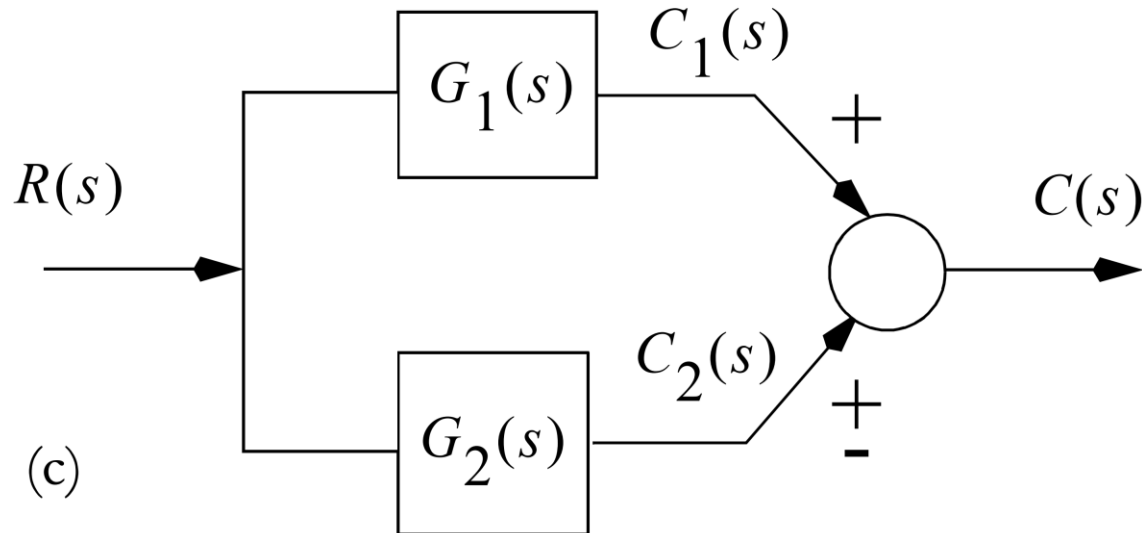
# Αναπαράσταση συναρτήσεων μεταφοράς με μπλοκ διαγράμματα



(a)  $C(s) = G(s)R(s)$

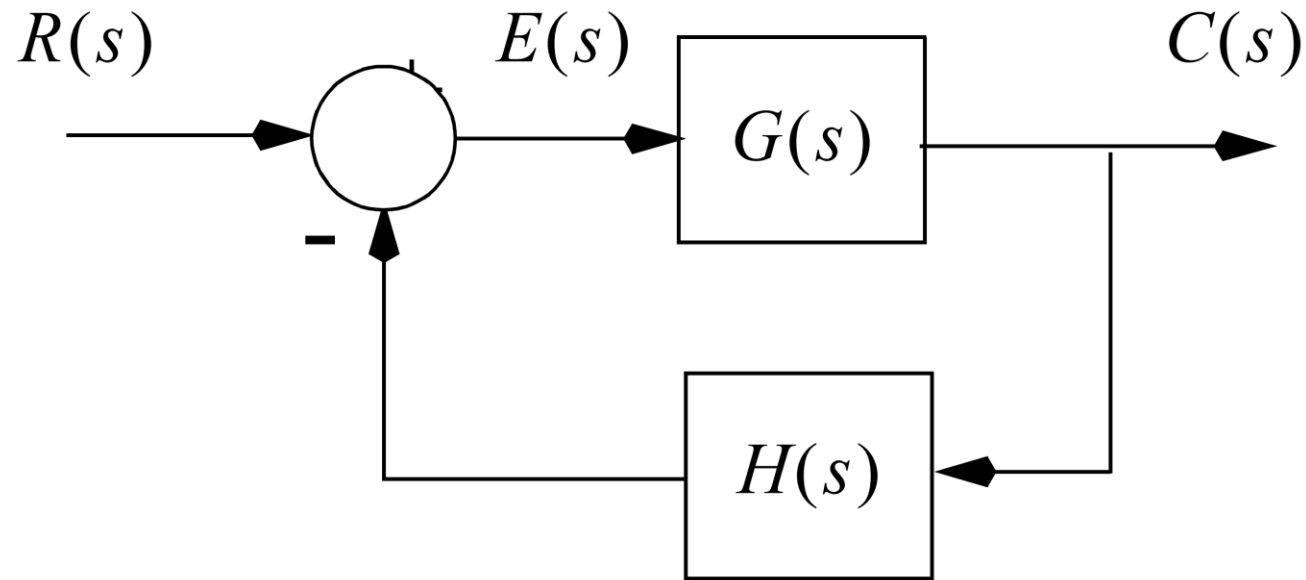


(b)  $C_2 = G_2V = G_2G_1R_1$



$C_1 = G_1R, \quad C_2 = G_2R$   
 $C = C_1 \pm C_2 = (G_1 \pm G_2)R$

# Αναπαράσταση συναρτήσεων μεταφοράς με μπλοκ διαγράμματα



$$W(s) = C(s)/R(s) = G(s)/[1 + G(s)H(s)]$$

# Χαρακτηριστικά συστήματος πρώτης τάξης

- Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος πρώτης τάξης είναι της μορφής:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+sT} = \frac{a}{s+a}, \text{ όπου } a = \frac{1}{T}$$

όπου  $T$  καλείται η χρονική σταθερά (time constant) του συστήματος.

- Η απόκριση σε μια βηματική είσοδο είναι  $U(s) = A/s$  είναι

$$Y(s) = \frac{a}{s+a} \frac{A}{s} = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) A$$

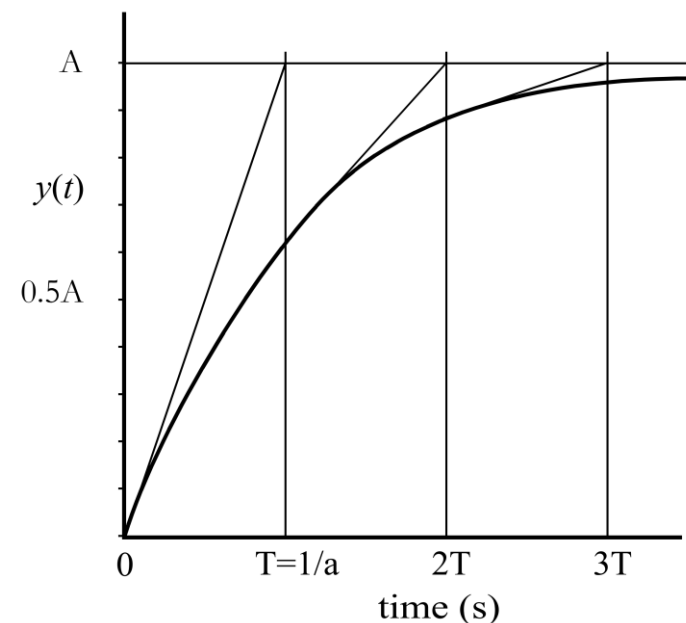
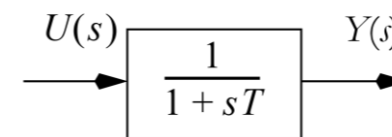
ή

$$y(t) = A(1 - e^{-at})$$

# Χαρακτηριστικά συστήματος πρώτης τάξης

Ιδιότητες συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης:

- Τη χρονική στιγμή  $t$ , ίση με τη χρονική σταθερά  $t = T = 1/a$ , ο όρος  $Ae^{-at}$  είναι  $Ae^{-at} = Ae^{-a/a} = Ae^{-1} = 0.368A$ , δηλαδή ο όρος έχει μειωθεί κατά 36.8% σε σχέση με την αρχική του τιμή  $Ae^{-at}|_{t=0} = A$ . Η τιμή της απόκρισης ωστόσο είναι  $y(t = T) = 0.632A$ , δηλαδή το 63.2% της τελικής τιμής
- Μετά από το χρόνο που ισούται με 4 χρονικές σταθερές, η απόκριση  $y(t)$  βρίσκεται μέσα στο 2% της τελικής τιμής  $A$ , δηλαδή πρακτικά ο όρος  $Ae^{-at}$  έχει σχεδόν μηδενιστεί. Αυτό είναι γνωστό ως ο “2% χρόνος αποκατάστασης”,  $t_s = 4T$ . Ομοίως ο “5% χρόνος αποκατάστασης” ορίζεται ως  $t_s = 3T$



# Χαρακτηριστικά συστήματος δεύτερης τάξης

- Η τυπική μορφή ενός συστήματος δεύτερης τάξης είναι:

$$(p^2 + a_1p + a_0)y(t) = b_0u(t)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \text{αν } a_0 = b_0$$

- $\omega_n$ : μη αποσβενύμενη φυσική συχνότητα (undamped natural frequency),  $\omega_n = \sqrt{a_0}$
- $\xi$ : λόγος απόσβεσης (damping ratio),  $0 \leq \xi < 1$ ,  $\xi = a_1/(2\omega_n)$

# Χαρακτηριστικά συστήματος δεύτερης τάξης

Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι μιγαδικοί όταν  $0 \leq \xi < 1$  και είναι της μορφής

$$s_{1,2} = a \pm j\omega_d$$

- $\omega_d$ : συχνότητα αποσβενύμενων ταλαντώσεων (frequency of damped oscillations) στη μεταβατική απόκριση
- $a$ : σταθερά απόσβεσης (damping constant)

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  έχει ρίζες

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{(\xi\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$



# Χαρακτηριστικά συστήματος δεύτερης τάξης

$$s_{1,2} = a \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm \sqrt{(\xi\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}\omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ a &= -\xi\omega_n\end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς  $\xi$ :

$$\xi = -a / \left( \sqrt{a^2 + \omega_d^2} \right) \approx -a / \omega_d \quad \text{εάν } a < 0.3\omega_d$$

# Χαρακτηριστικά συστήματος δεύτερης τάξης

- Η χρονική απόκριση του συστήματος δεύτερης τάξης σε βηματική είσοδο πλάτους  $A$  είναι:

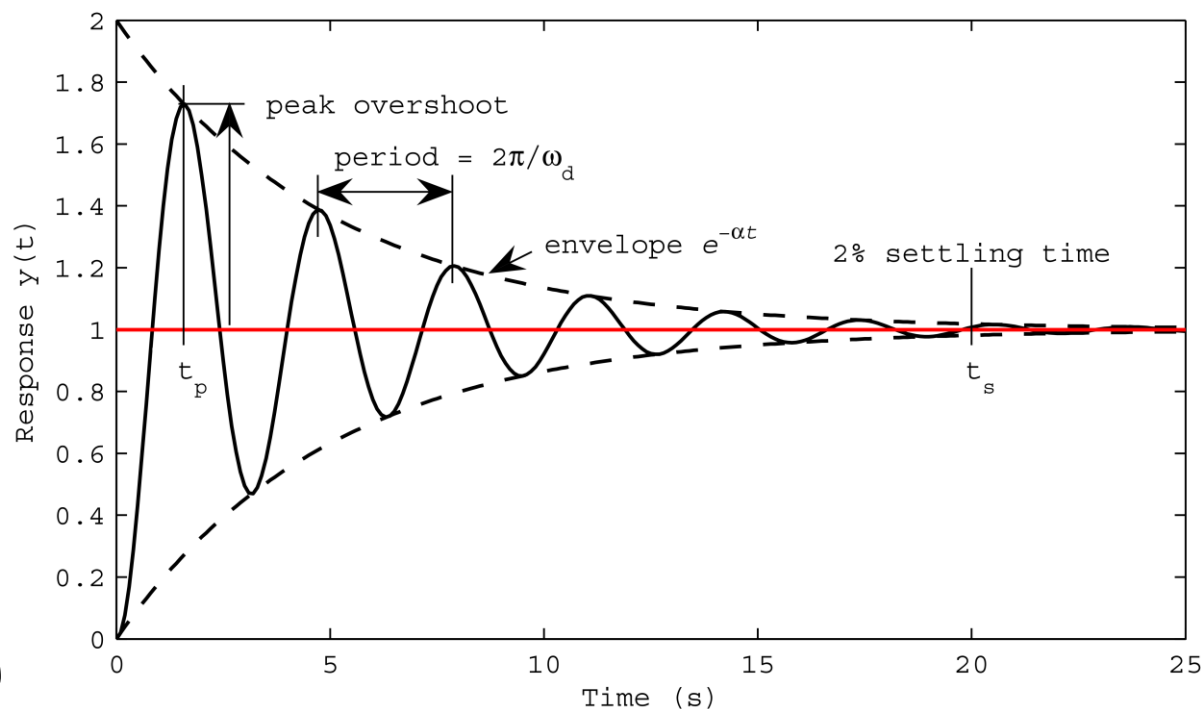
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{A}{s}$$

$$y(t) = A - \frac{A}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi), \quad 0 \leq \xi < 1$$

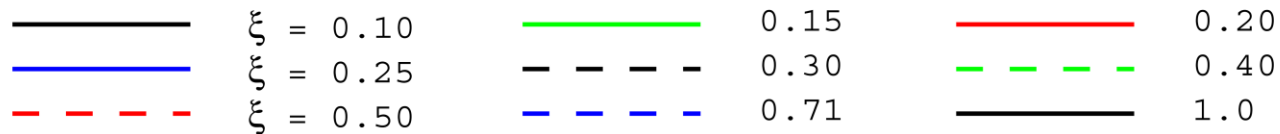
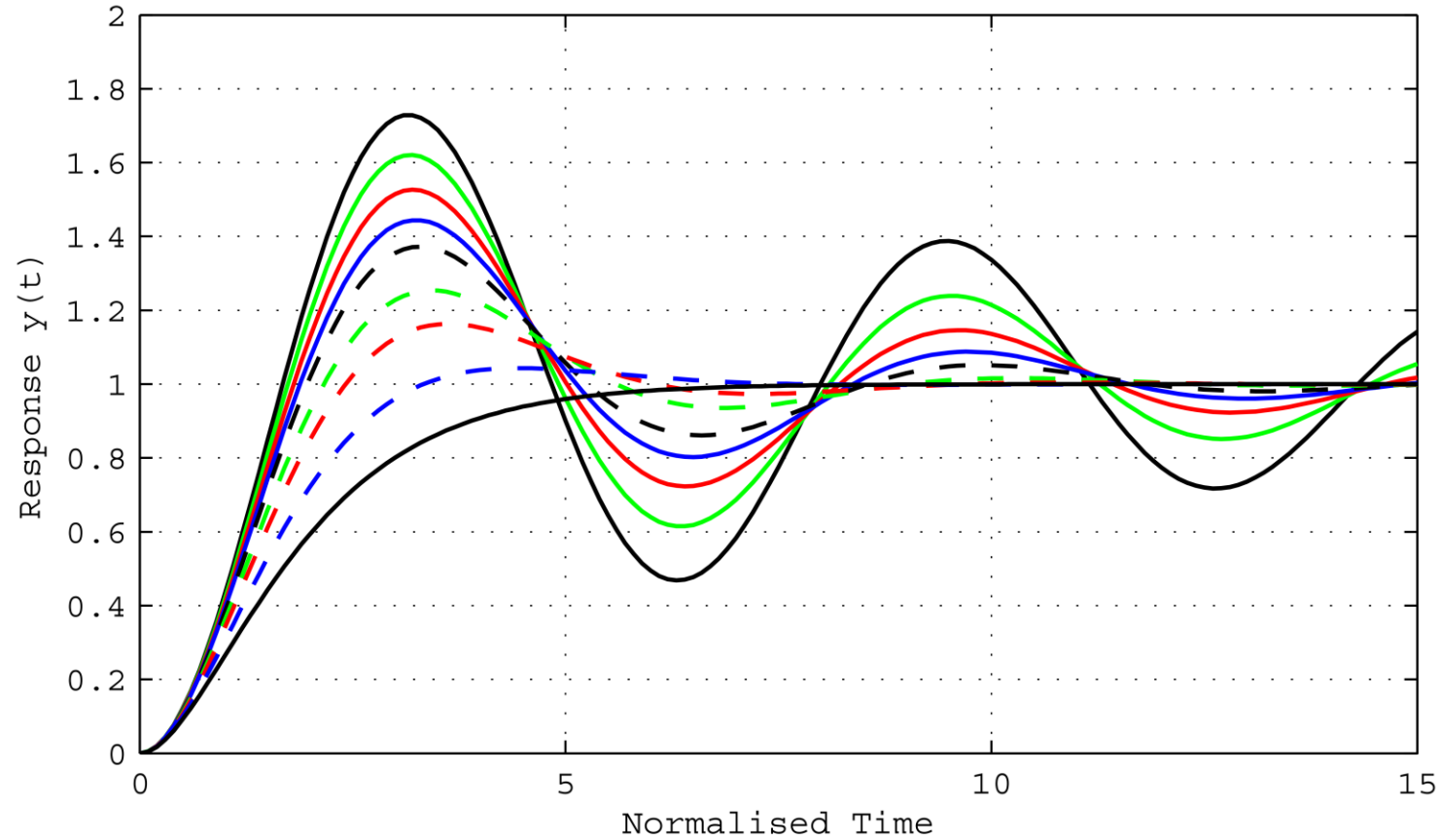
όπου  $\cos\phi = \xi$  και  $\sin\phi = \sqrt{1 - \xi^2}$

# Χαρακτηριστικά συστήματος δεύτερης τάξης

- Η συχνότητα της αποσβενύμενης ταλάντωσης είναι:  $f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} \text{ Hz}$
- Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:  $t_f = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi}{\omega_d} \text{ sec}$
- Ο χρόνος μέχρι την πρώτη υπερύψωση είναι το  $\frac{1}{2}$  της περιόδου:  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{ sec}$
- Για μοναδιαία βηματική είσοδο, η μέγιστη υπερύψωση συμβαίνει για  $t = t_p$  και είναι:  
$$M_0 = y(t_p) - 1 = e^{at_p} = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$
- Ο χρόνος αποκατάστασης  $t_s$  είναι ο χρόνος που η διακεκομμένη καμπύλη μειώνεται στο 2% της τελικής τιμής το  $y(t)$  και είναι ίσος με 4 χρονικές σταθερές:  $t_s = -\frac{4}{a} = \frac{4}{\xi\omega_n} \text{ sec}$



# Απόκριση συστήματος δεύτερης τάξης για διαφορετικές τιμές του λόγου απόσβεσης $\xi$



# Επιπτώσεις στη δυναμική συμπεριφορά των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας

- Μερικές ηλεκτρομηχανικές ταλαντώσεις, που σχετίζονται με τους δρομείς των γεννητριών, περιγράφονται από όρους που είναι μιγαδικοί και ελαφρώς αποσβενύμενοι της μορφής  $a \pm j\omega_d$
- Στην ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, ο λόγος απόσβεσης  $\xi$  χρησιμοποιείται για διάφορους λόγους, πχ. ένα κριτήριο για τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος είναι ο λόγος απόσβεσης για τη λειτουργία του δρομέα να είναι καλύτερος από 5%.

# Γεωμετρικός τόπος ριζών συστήματος 2<sup>ης</sup> τάξης

