Αποθήκευση κβαντικής πληροφορίας

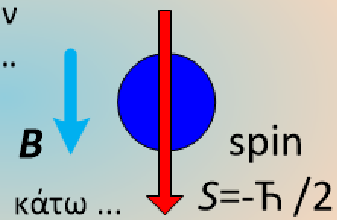
Η ιδιότητα των σωματιδίων του μικρόκοσμου (ηλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια κ.ά) να παράγουν μικροσκοπικό μαγνητικό πεδίο ή μαγνητική διπολική ροπή λόγω spin *S* (ιδιοπεριστροφής) αξιοποιείται για να αποθηκευτεί η πληροφορία σε μορφή qubit...

Παρόμοια με τη μαγνητική βελόνα, το spin ενός ηλεκτρονίου...

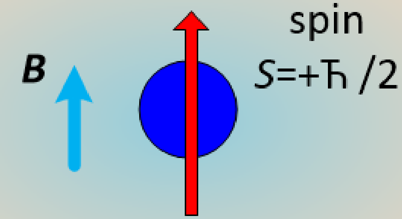
...μέσα σε ένα ασκούμενο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο **B**...

...έχει δύο δυνατότητες προσανατολισμού...

...προσανατολίζεται παράλληλα με το υπάρχων μαγνητικό πεδίο B...



...με spin κάτω ...



...ή με το spin επάνω...

Θεμελιώδης ή βασική κατάσταση 0

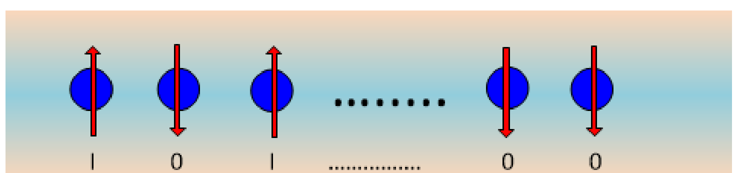
Θεμελιώδης ή βασική κατάσταση 1

Υιοθετώντας το συμβολισμό Dirac...

...συμβολίζεται με διανύσμα ket ως $|0>$

...συμβολίζεται με διανύσμα ket ως $|1>$

Έτσι με με αλληλουχίες τηλεκτρονίων με spin επάνω (I) και spin κάτω (0) μπορούμε να κωδικοποιήσουμε πληροφορίες στους κβαντικούς υπολογιστές.



...παρά μόνο θα παρείχε την δυνατότητα αποθήκευσης περισσότερων bit σε πολύ μικρές διαστάσεις.

Όμως αυτή η δυνατότητα **μόνο δεν θα προσέδιδε στους κβαντικούς υπολογιστές κάτι πολύ ξεχωριστό** από τους κλασσικούς υπολογιστές,

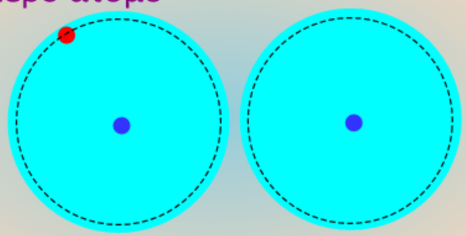
Είδαμε ότι υπάρχει και η ιδιότητα **της υπέρθεσης.**,

Άλλα παραδείγματα κβαντικού bit

Κάθε σωματίδιο του μικρόκοσμου που μπορεί να βρεθεί σε δύο ελεγχόμενες διαφορετικές καταστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν Qubit, όπως τα επόμενα παραδείγματα:

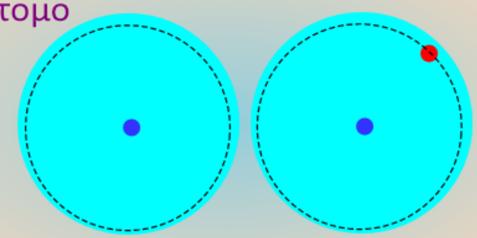
Να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο σε δύο διαφορετικά ιόντα υδρογόνου (πρωτόνια).

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου στο αριστερό άτομο



Αυτή μπορεί να είναι η θεμελιώδης ή βασική **κατάσταση 0**

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου στο δεξιό άτομο

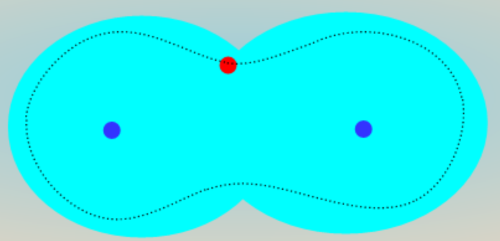


Μπορεί τότε να είναι η θεμελιώδης ή βασική **κατάσταση 1**

...συμβολίζεται με διανύσμα ket ως $|0>$

...συμβολίζεται με διανύσμα ket ως $|1>$

Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια κβαντική υπέρθεση των δύο προηγούμενων καταστάσεων όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να ανήκει και στα δύο άτομα..

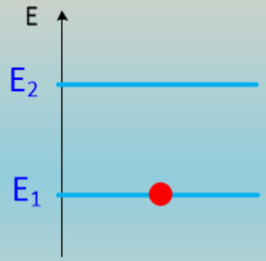


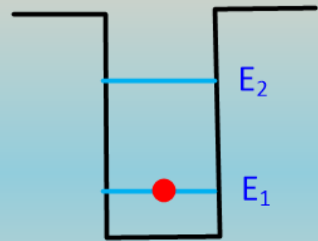
και γράφεται: $|\psi> = c_1\,|0> + c_2\,|1>$

με πιθανότητα $|c_1|^2$ να είναι στην 0 και $|c_2|^2$ να είναι στην 1.

μει: $\sqrt{|a|^2+|b|^2}=1$

Να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο σε δύο (ή περισσότερες) διαφορετικές ενεργειακές καταστάσεις E1 και E2



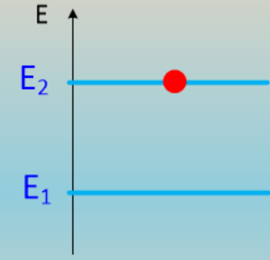


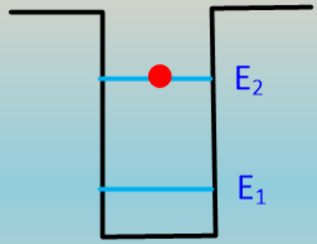
Η κατάσταση του ηλεκτρονίου στη κατώτερη ενεργειακή στάθμη

Αυτή μπορεί να είναι η θεμελιώδης ή βασική

κατάσταση 0

...συμβολίζεται με διανύσμα ket ως $|0>$





Η κατάσταση του ηλεκτρονίου στη ανώτερη ενεργειακή στάθμη

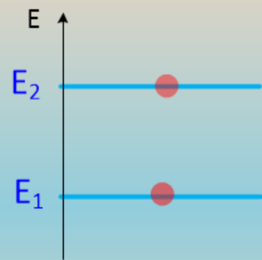
Αυτή μπορεί να είναι η θεμελιώδης ή βασική

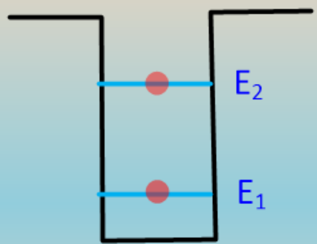
κατάσταση 1

...συμβολίζεται με διανύσμα ket ως $|1>$

Το ηλεκτρόνιο σε υπέρθεση των δύο βασικών ενεργειακών καταστάσεων E1 και E2

Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια κβαντική υπέρθεση των δύο προηγούμενων καταστάσεων όπου το ηλεκτρόνιο μπορεί να είναι και στις δύο...





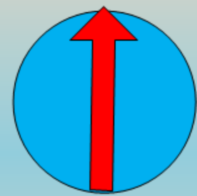
και γράφεται: $|\psi> = c_1|0> + c_2|1>$

με πιθανότητα $|c_1|^2$ να είναι στην E_1 και $|c_2|^2$ να είναι στην E_2.

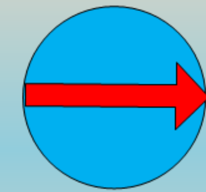
μει: $\sqrt{|a|^2+|b|^2}=1$

Qubit μπορεί να είναι τα φωτόνια χρησιμοποιώντας το φαινόμενο της πόλωσης του φωτός

Η πόλωση του φωτονίου μπορεί να είναι κατακόρυφη.



Η πόλωση του φωτονίου μπορεί να είναι οριζόντια.



Αυτή μπορεί να είναι η θεμελιώδης ή βασική

κατάσταση 0

...συμβολίζεται με διανύσμα ket ως $|0>$

Αυτή μπορεί να είναι η θεμελιώδης ή βασική

κατάσταση 1

...συμβολίζεται με διανύσμα ket ως $|1>$

Qubit μπορεί να είναι τα φωτόνια χρησιμοποιώντας το φαινόμενο της πόλωσης του φωτός

Μπορούμε να δημιουργήσουμε φωτόνια σε κβαντική υπέρθεση των δύο προηγούμενων πολώσεων...

και γράφεται: $|\Psi> = c_1 |0> + c_2 |1>$

με πιθανότητα $|c_1|^2$ να είναι στην E_1 και $|c_2|^2$ να είναι στην E_2.

μει: $\sqrt{|a|^2+|b|^2}=1$

Όπως οι καταστάσεις του κβαντικού κέρματος $|K> = a|H> + b|T>$

κάθε κβαντικό σύστημα δύο καταστάσεων γράφεται $|q> = a|0> + b|1>$

Οι βασικές καταστάσεις $|0>$ και $|1>$ γράφονται ως πίνακες με μια στήλη:
$$|0> = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad |1> = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$|q> = a|0> + b|1> = a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

όπου φυσικά ισχύει
$$|a|^2+|b|^2=1$$

Το εσωτερικό γινόμενο των βασικών καταστάσεων

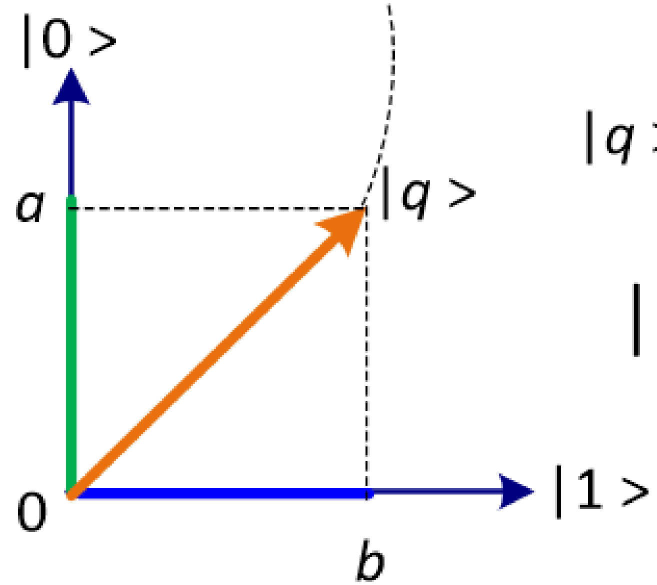
$$<0|1> = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = (1\,0 + 0\,1) = 0 \qquad <1|0> = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = (0\,1 + 1\,0) = 0$$

$$<0|0> = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\o\end{bmatrix} = (1\,1 + 0\,0) = 1 \qquad <1|1> = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = (0\,0 + 1\,1) = 1$$

Αφού το εσωτερικό γινόμενο των δύο βασικών καταστάσεων είναι μηδέν $<0|1> = 0$ $<1|0> = 0$ τότε οι δύο καταστάσεις είναι **ορθογώνιες** μεταξύ τους

Είδαμε πως η κβαντική κατάσταση ως αποτέλεσμα υπέρθεσης δύο καταστάσεων παριστάνεται από ένα διάνυσμα κατάστασης $|K>$ ...

...σε ένα χώρο δύο διαστάσεων με δύο ορθογώνιους άξονες.



$$|q> = a|0> + b|1>$$

$$|a|^2+|b|^2=1$$

Αυτό γίνεται όταν τα πλάτη *a*, *b* της πιθανοτητας είναι πραγματικοί αριθμοί

Όταν τα πλάτη a, b της πιθανοτητας είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε χρειαζόμαστε ένα χώρο Hilbert δύο διαστάσεων ή ένα πραγματικό χώρο τεσσάρων διαστάσεων για να παραστήσουμε το διάνυσμα κατάστασης του qubit.

Αν τα πλάτη πιθανότητας a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί $|q> = a|0> + b|1>$

...τότε αυτά γραφονται με την μιγαδική μορφή των

$$|q\rangle = \underbrace{e^{i\gamma}\cos\frac{\theta}{2}}_{a}|0\rangle + \underbrace{e^{i\delta}\sin\frac{\theta}{2}}_{b}|1\rangle$$

Όπου οι γωνίες γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί

Θυμίζουμε ότι $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $\quad |e^{i\varphi}| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ $\quad |e^{i\varphi}|^2 = 1$

Για τα πλάτοι πιθανότητας του $|q>$ επιβεβαιώνεται ότι ισχύει

$$\left|e^{i\gamma}\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 + \left|e^{i\delta}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 + \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 = 1$$

Η εξίσωση του $|q>$ μπορεί να γραφεί

$$|q\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i(\delta-\gamma)}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$

Συνήθως ο γενικός όρος φάσης $e^{i\gamma}$ παραλείπεται,...

...ενώ διαφορά φάσης $\varphi=\delta-\gamma$ είναι σημαντική.

Οπότε το qubit $|q>$ γράφεται

$$|q\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Όπου για τα πλάτοι πιθανότητας του $|q>$ επιβεβαιώνεται πάλι ότι ισχύει

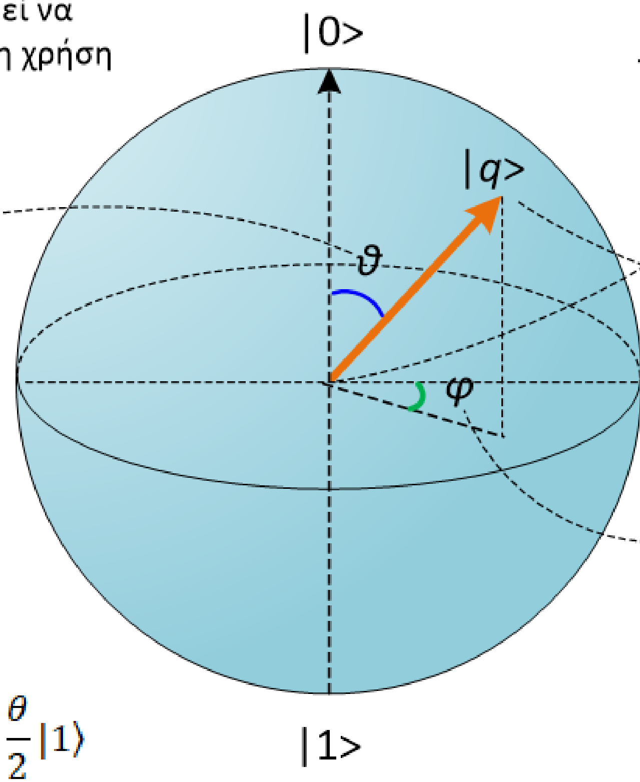
$$\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 + \left|e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 + \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 = 1$$

Σφαίρα Bloch

Το διάνυσμα κατάστασης του qubit μπορεί να αναπαρασταθεί σε τρεις διαστάσεις με τη χρήση της ονομαζόμενης σφαίρας Bloch

Αυτή έχει μοναδιαία ακτίνα

Η γωνία ϑ καθορίζει τα **πλάτη πιθανότητας**.



Το διάνυσμα κατάστασης $|q>$ έχει μήκος μονάδα,...

...αρχή το κέντρο της σφαίρας και...

...τέλος την επιφάνεια της σφαίρας που καθορίζεται από τις γωνίες ϑ και φ.

Η γωνία φ ονομάζεται **γωνία φάσης**.

$$|q\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

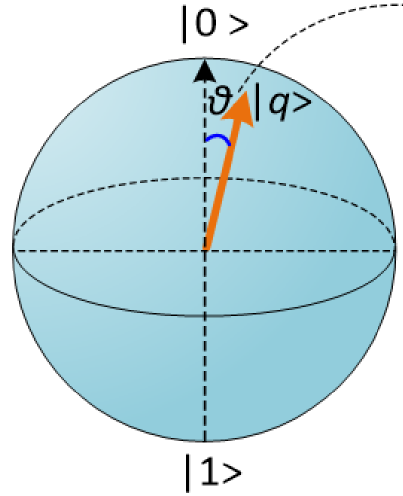
Η γωνία ϑ καθορίζει τα **πλάτη πιθανότητας**.

Με βάση την εξίσωση

$$|q\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Μικρή γωνία ϑ καθορίζει μεγάλο πλάτος πιθανότητας για την κατάσταση $|0\rangle$

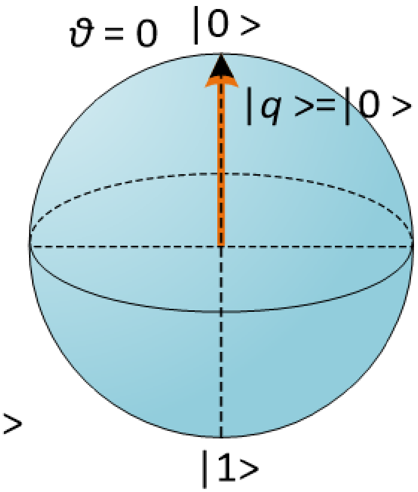
με πιθανότητα: $\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2$



Το τέλος του διανύσματος $|q\rangle$ πλησιέστερα στο βόρειο πόλο και στη κατάσταση $|0\rangle$ με την οποία ταυτίζεται όταν $\vartheta = 0$

$$|q\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle = |0\rangle$$

100% να πάρουμε την κατάσταση $|0\rangle$

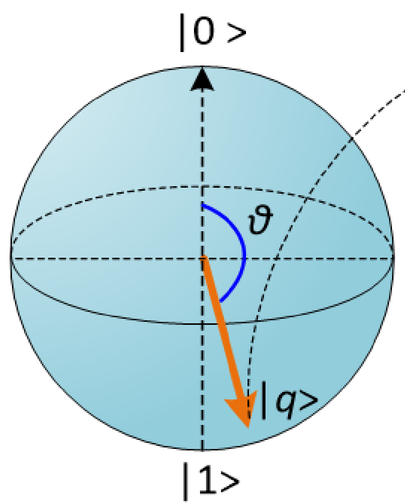


Με βάση την εξίσωση

$$|q\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

Μεγάλη γωνία ϑ καθορίζει μεγάλο πλάτος πιθανότητας για την κατάσταση $|1\rangle$

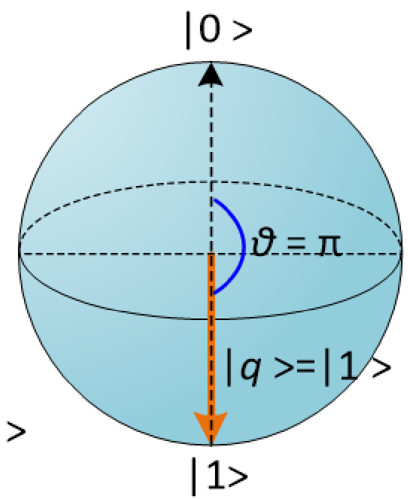
με πιθανότητα: $\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^2$



Το τέλος του διανύσματος $|1\rangle$ πλησιέστερα στο νότιο πόλο και στη κατάσταση $|1\rangle$ με την οποία ταυτίζεται όταν $\vartheta = \pi$

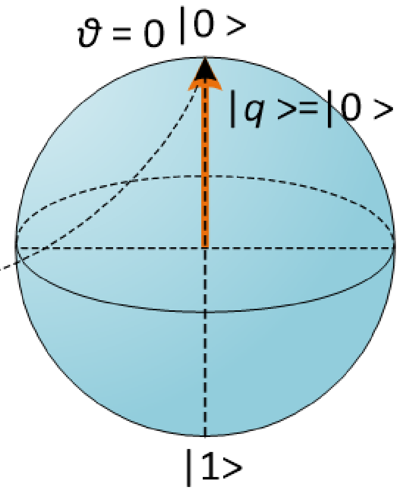
$$|q\rangle = e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle = |1\rangle$$

100% να πάρουμε την κατάσταση $|1\rangle$

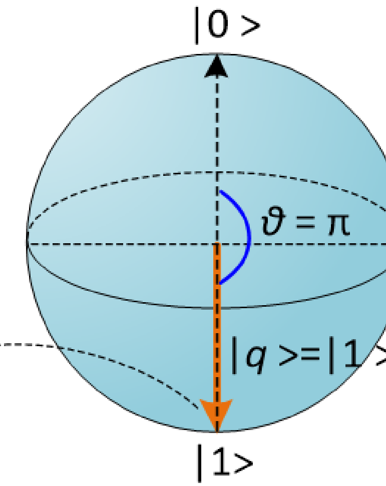


Με αυτό το τρόπο διαπιστώνουμε ότι όταν το Qubit...

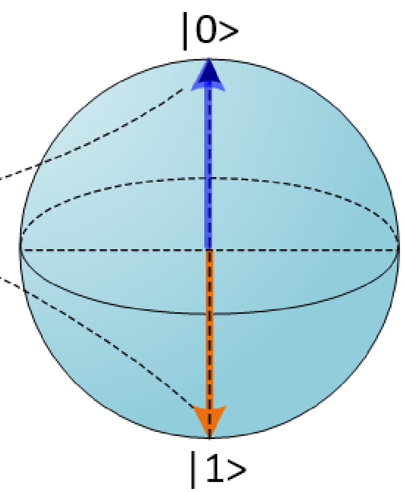
...βρίσκεται στη βασική κατάσταση $|0>$ το διάνυσμα είναι κατακόρυφο με φορά προς τα επάνω



...ενώ όταν βρίσκεται στη βασική κατάσταση $|1>$ το διάνυσμα είναι κατακόρυφο με φορά προς τα κάτω



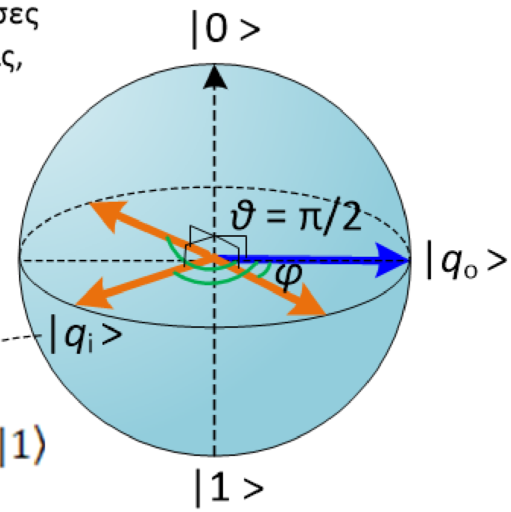
Παρατηρούμε ότι ενώ οι βασικές καταστάσεις $|0>$ και $|1>$ είναι ορθογώνιες, στη σφαίρα Bloch Βρίσκονται σε ευθεία γραμμή στη κατακόρυφο.



Παραδείγματα διανυσμάτων Qubits στη σφαίρα Bloch

Διανύσματα Qubit με $\vartheta=\pi/2$ που εξασφαλίζει ίσες πιθανότητες 50 % στις δύο Βασικές καταστάσεις, αλλά διαφορετικές γωνίες φάσης φ...

Τα διανύσματα Qubit με $\vartheta=\pi/2$ έχουν ίσες πιθανότητες 50 % για τις δύο Βασικές καταστάσεις και διαφορετικές γωνίες φάσης φ...



$$|q_\iota\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + e^{i\varphi_\iota}\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$\varphi = 0 \quad \vartheta = \pi/2$

$$|q_o\rangle = \cos\frac{\pi/2}{2}|0\rangle + e^{i0}\sin\frac{\pi/2}{2}|1\rangle$$

$$|q_o\rangle = \cos\frac{\pi}{4}|0\rangle + \sin\frac{\pi}{4}|1\rangle$$

$$|q_o\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle$$

$$|q_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

Δηλαδή πιθανότητες 50 % για τις δύο Βασικές καταστάσεις

Διανύσματα Qubit με ίδια γωνία ϑ και με ίδιες πιθανότητες για τη

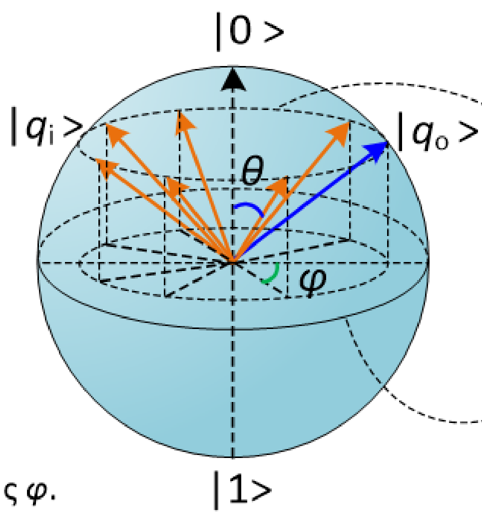
βασική κατάσταση |0 >

$$\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2$$

και τη βασική κατάσταση |1 >

$$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^2$$

...αλλά διαφορετικές γωνίες φάσης φ.



Το τέλος αυτών των διανυσμάτων Qubit Βρίσκεται σε ένα κύκλο....

...και οι προβολές των στο επίπεδο του ισημερινού κύκλου της σφαίρας Bloch έχουν ίδιο μήκος.

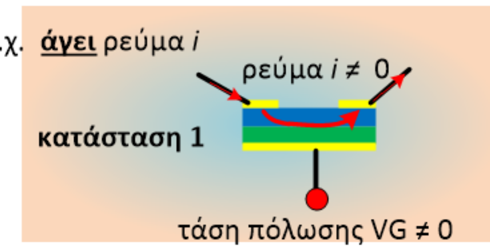
Αποθήκευση πληροφορίας στους κλασικούς και κβαντικούς υπολογιστές

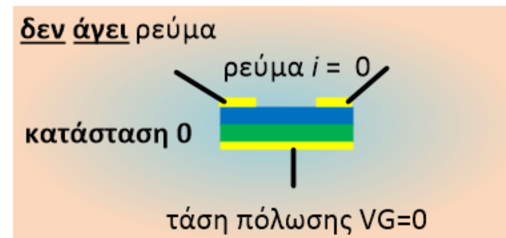
Στους κλασσικούς υπολογιστές:

Η πληροφορία αποθηκεύεται με μορφή αλληλουχίας Bit Δύο καταστάσεων 0 και 1
δηλαδή 01001110110001….

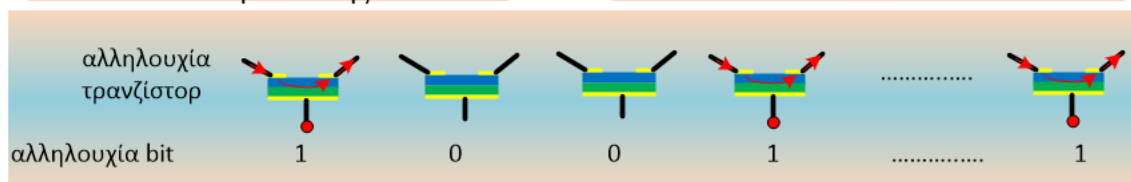
Για αυτό χρησιμοποιούνται π.χ. τρανζίστορ όπου διατηρείται αποθηκευμένη η πληροφορία (bit).

Όμως το bit μπορεί να είναι ένα ηλεκτρονικό στοιχείο π.χ.
ένα τρανζίστορ, το οποίο
όταν **πολώνεται** με κατάλληλη τάση **άγει** ρεύμα
(κατάσταση 1)
και όταν
<u>δεν</u> πολώνεται με τάση **<u>δεν</u> άγει** ρεύμα (κατάσταση 0)





Επομένως για την αποθήκευση της
πληροφορίας χρειάζονται τόσα τρανζίστορ
όσα και τα bit που θα χρειαστούμε



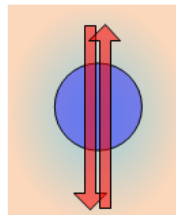
Η αλληλουχία των τρανζίστορ αυτών αποτελεί τον **Κλασσικός Καταχωρητής**

Προσοχή η αρίθμηση των bits γίνεται πάντα από δεξιά προς τα αριστερά.

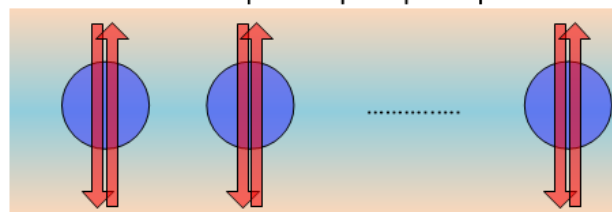
Στους κβαντικούς υπολογιστές:

Εδώ το bit είπαμε ότι μπορεί να είναι ένα κβαντικό σωματίδιο π.χ. το spin ηλεκτρονίου, πρωτονίου, νετρονίου.

Εκμεταλευόμενοι τη κβαντική υπέρθεση αποθηκεύουμε τεράστιες πληροφορίες **με πολύ λιγότερα κβαντικά Bit (qubit)**

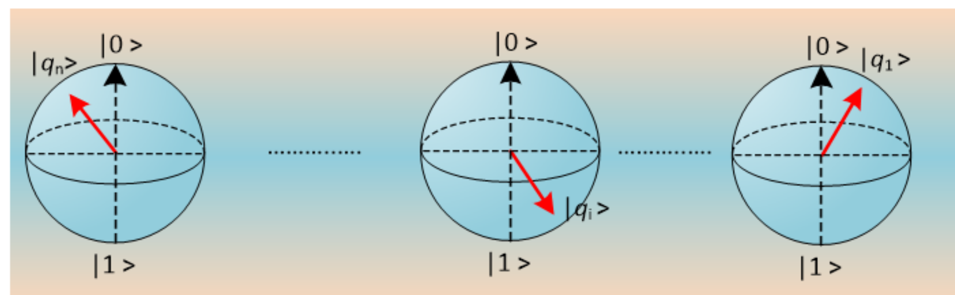


Συνδιάζοντας δύο ή περισσότερα spin το καθένα σε κβαντική υπέρθεση



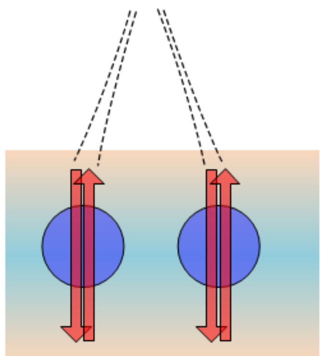
...μπορούμε να αποθηκεύσουμε σαν πληροφορία όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αυτών.

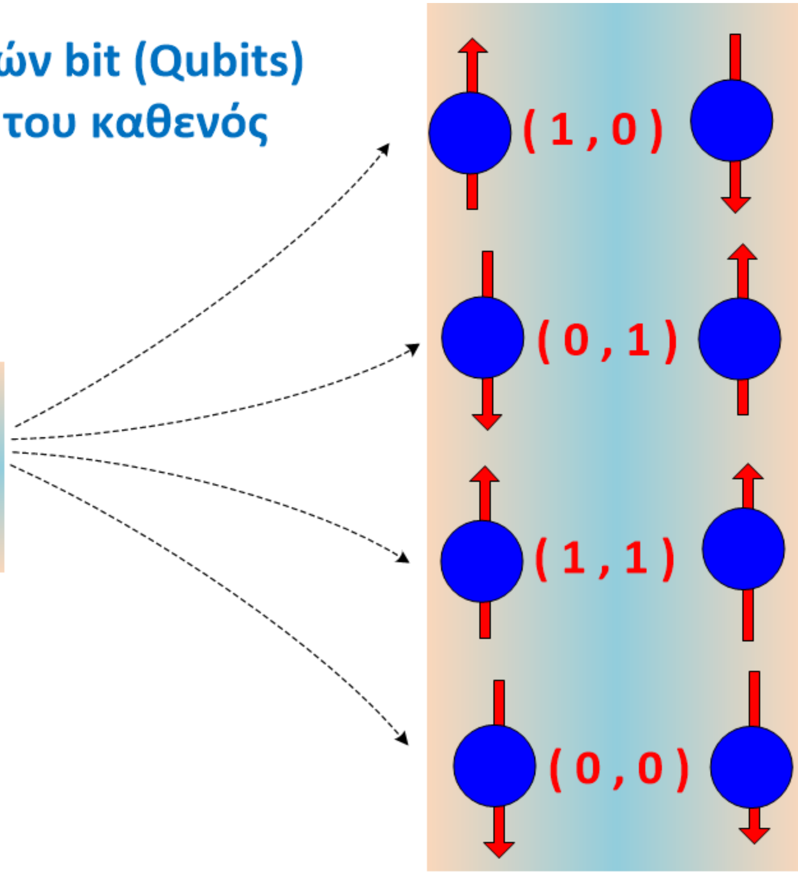
Η πληροφορία καθενός qubit δύο καταστάσεων παριστάνεται από τη σφαίρα Bloch



Η αλληλουχία Qubits τα οποία παριστάνονται με σφαίρες Bloch παριστάνουν έναν Κβαντικό Καταχωρητή qubits

Παράδειγμα 2 κβαντικών bit (Qubits) σε κβαντική υπέρθεση του καθενός σε spin πάνω και κάτω





Βρίσκονται σε υπέρθεση 4 δυνατών καταστάσεων του Spin

Αυτά μπορούν να βρίσκονται ταυτόχρονα σε κάθε μια από όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των ανά 2

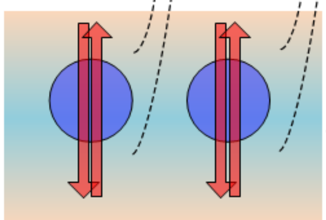
Δηλαδή από 2 κβαντικά bit....

παίρνουμε $4=2^2$ διαφορετικές καταστάσεις του spin

Αυτό σημαίνει πως χρειαζόμαστε μόνον έναν...

Κβαντικό Καταχωρητή 2 qubits

Αυτό σημαίνει πως αν μετρούμε τα δύο αυτά bit με μετρητικές συσκευές...

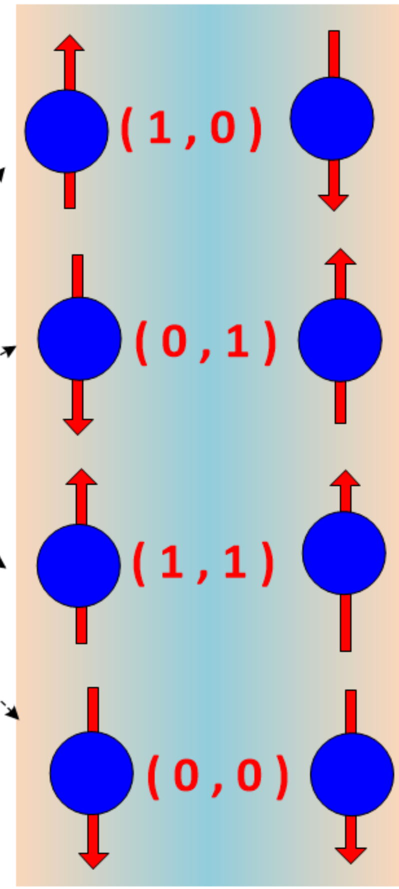


1/4 φορές

1/4 φορές

1/4 φορές

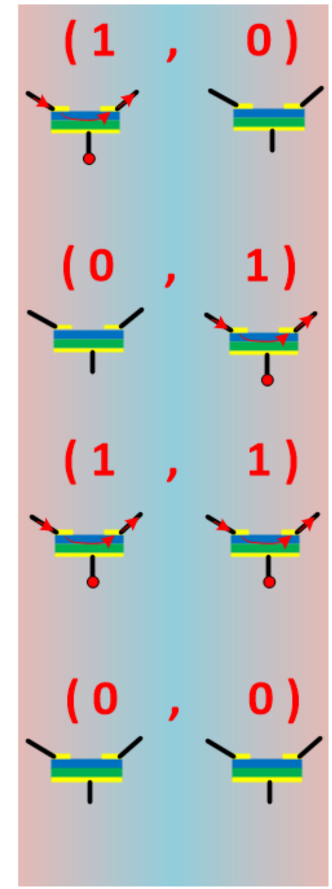
1/4 φορές



...θα τα βρίσκουμε 1 στις 4 φορές το κάθε ένα συνδυασμό από όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αυτών ανά 2...

Επομένως και οι 4 δυνατοί συνδυασμοί υπάρχουν ανά πάσα στιγμή και μπορούμε να τους επεξεργαστούμε...

....και αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας **μόνο δύο κβαντικά bit**
Σε ένα κβαντικό καταχωρητή δύο θέσεων



...αντί για κλασσικό κατχωρητή δύο θέσεων και 8 κλασικά bit ή ένα σύνολο 8 τρανζίστορ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε κλασικούς υπολογιστές οι τιμές κάποιων μεταβλητών καταχωρούνται σε ένα σύνολο από bit στους λεγόμενους καταχωρητές.

Στους κβαντικούς υπολογιστές υπάρχουν οι κβαντικοι καταχωρητές όπου οι πληροφορίες καταχωρούνται με τη μορφή qubit.

Κλασικός καταχωρητής

Σε ένα κλασικό καταχωρητή 2 bit μπορούμε να αποθηκεύσουμε :
ή τον δυαδικό αριθμό ή 0,0 ή 0,1 ή 1,0 ή 1,1

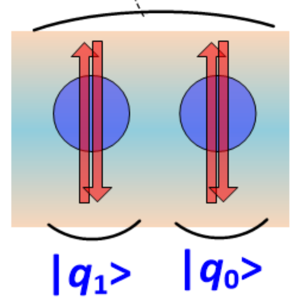
Κβαντικός καταχωρητής

Σε ένα κβαντικό καταχωρητή των 2 qubit μπορούμε να αποθηκεύσουμε :

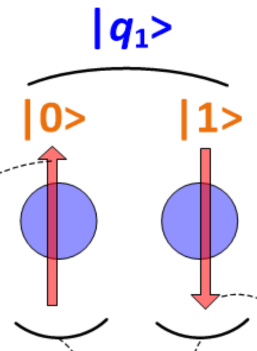
και τον δυαδικό 0,0 και τον 0,1 και τον 1,0 και τον 1,1

Η μαθηματική περιγραφή
κβαντικού καταχωρητή $|q_R>$ δύο qubits $|q_1>$ και $|q_0>$

Το κάθε Qubit βρίσκεται σε υπέρθεση...

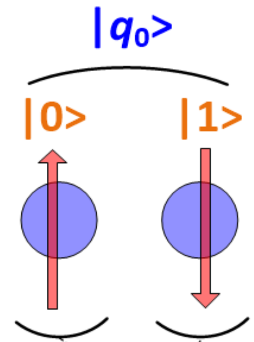


...δύο βασικών καταστάσεων



...του spin επάνω...

...και του spin κάτω...



Τα qubit γράφονται σε μορφή πίνακα

$$|q_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$|q_0\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle = c\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$$

Η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή $|q_R>$ δίνεται από το **ΤΑΝΙΣΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ**

$$|q_R\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = |q_1\rangle|q_0\rangle = |q_1 q_0\rangle$$

Αφού τα qubit γράφονται σε μορφή πίνακα...

$$A = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$$

...το τανιστικό γινόμενο των πινάκων αυτών είναι ένας νέος πίνακας C

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a \cdot c\\a \cdot d\\b \cdot c\\b \cdot d\end{bmatrix}$$

Λαμβάνοντας υο οψιν τα δύο qubit

$$|q_1\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \qquad |q_0\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle = c\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$$

Το τανιστικό γινόμενο των δύο παραπάνω qubits γράφεται

Στην ουσία εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα...

$$|q_R\rangle = |q_1\rangle \times |q_0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

...και με την επιμεριστική ιδιότητα δημιουργούνται όλα τα δυνατά γινόμενα ανά δύο όρους.

Κάθε γινόμενο των δύο βασικών καταστάσεων...

$$= \underbrace{a \cdot c}\, |0\rangle \otimes |0\rangle + \underbrace{a \cdot d}\, |0\rangle \otimes |1\rangle + \underbrace{b \cdot c}\, |1\rangle \otimes |0\rangle + \underbrace{b \cdot d}\, |1\rangle \otimes |1\rangle$$

...αντιστοιχεί σε κάθε ένα δυνατό συνδιασμό δύο Spin που θα βρεθεί ο καταχωρητής

$$= c_0\, |00\rangle + c_1\, |01\rangle + c_2\, |10\rangle + c_3\, |11\rangle$$

Τα c_0, c_1, c_2, c_3 είναι τα πλάτη πιθανότητας των αντίστιχων βασικών καταστάσεων και γενικά είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Επομένως ο κβαντικός καταχωρητής δύο Qubits είναι...

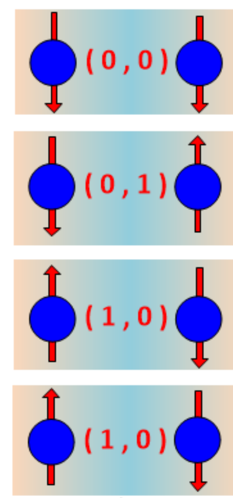
...ένα σύστημα τεσσάρων βασικών καταστάσεων Quibits οι οποίες με μορφή πινάκων είναι:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle|0\rangle = |00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 1\\1\cdot 0\\0\cdot 0\\0\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = |0\rangle|1\rangle = |01\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 0\\1\cdot 1\\0\cdot 0\\0\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = |1\rangle|0\rangle = |10\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\cdot 1\\0\cdot 0\\1\cdot 1\\1\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle|1\rangle = |11\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\cdot 0\\0\cdot 1\\1\cdot 0\\1\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$



Όλες οι δυνατές κατστάσεις που θα βρεθεί ο καταχωρητής

...είναι ορθογώνιες...

...και περιγράφουν κάθε μια από τις τέσσερες δυνατές καταστάσεις των Quibits (spin) που μπορεί να βρεθεί ο κβαντικός καταχωρητής

$$|q_R\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_0\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c \\ a \cdot d \\ b \cdot c \\ b \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_o \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$|q_R\rangle = c_o \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_o|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle$$

$$|q_R\rangle = c_o|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle = c_o|0\rangle + c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle = \sum_{i=0}^{3} c_i|i\rangle$$

Το διάνυσμα κατάστασης αυτού του καταχωρητή υπάρχει σε ένα **χώρο Hilbert τεσσάρων διαστάσεων** και το μήκος του είναι ίσο με την μονάδα.

Η συνολική πιθανότητα θα ικανοποιεί την συνθήκη $[c_o]^2 + [c_1]^2 + [c_2]^2 + [c_3]^2 = 1$

Η δυνατότητα να κρατηθούν ταυτόχρονα όλες οι δυνατές καταστάσεις των qubit στους κβαντικούς καταχωρητές βαασίζεται η λειτουργία της **κβαντικής παραλληλίας**

Παράδειγμα

Έστω ότι έχω μια οποιαδήποτε συνάρτηση π.χ. F(x)=x+2
όπου η μεταβλητή x παίρνει τις 4 παρακάτω τιμές

0,0 1,0 0,1 1,1

θέλω να υπολογίσω το αποτέλεσμα της F(x)

Στο κλασικό σειριακό υπολογισμό

Ένας καταχωρητής των 2 bit φορτώνεται 4 φορές με τις τιμές του Χ...

και κάθε φορά υπολογίζεται σειριαακά η F(x)

0,0 → F(0) 1,0 → F(1) 0,1 → F(2) 1,1 → F(3)

Πρώτα φορτώνεται η 0,0
και υπολογίζεται η F(0)

Μετά φορτώνεται η 0,1
και υπολογίζεται η F(1)

....
.

Τέλος φορτώνεται η 1,1
και υπολογίζεται η F(3)

Στο κλασικό παράλληλο υπολογισμό

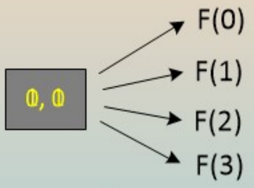
4 καταχωρητές των 2 bit φορτώνεται με τις τιμές του x

και παράλληλα υπολογίζεται η F(x)

0,0 → F(0)
1,0 → F(1)
0,1 → F(2)
1,1 → F(3)

Στο κβαντικό παράλληλο υπολογισμό

Ένας κβαντικός καταχωρητής των 2 qubit φορτώνεται μια φορά και τις 4 τιμές του x



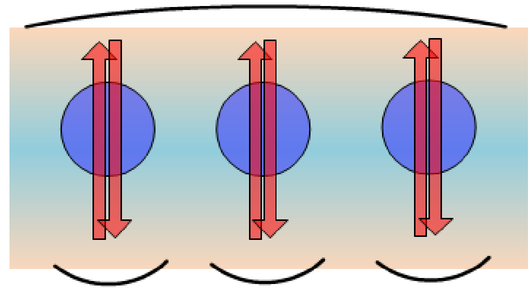
και σε **<u>έναν υπολογισμό</u>** υπολογίζεται η F(x) και για τις 4 τιμές του x

Η συνάρτηση *F* Εφαρμόζεται μια φορά στο καταχωρητή των 2 qubit και υπολογίζονται σε μια φορά και οι 4 τιμές του x

$$F(|q_R\rangle) = c_o F(|00\rangle) + c_1 F(|01\rangle) + c_2 F(|10\rangle) + c_3 F(|11\rangle) = \sum_{i=0}^{3} c_i F(|i\rangle)$$

Η μαθηματική περιγραφή κβαντικού καταχωρητή $|q_R>$ τριων qubits $|q_1>$, $|q_1>$ και $|q_0>$

Το κάθε Qubit βρίσκεται σε υπέρθεση...



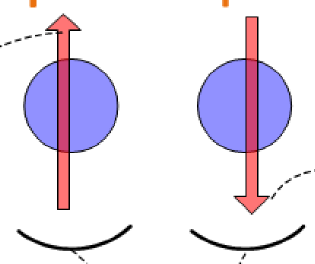
$|q_2>$ $|q_1>$ $|q_0>$

Βρίσκονται σε υπέρθεση $2^3=8$ δυνατών καταστάσεων του Spin

$|q_i>$

...δύο βασικών καταστάσεων

$|0>$ $|1>$



...και του spin κάτω...

...του spin επάνω...

Τα qubit γράφονται σε μορφή πίνακα

$$|q_2\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$|q_1\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

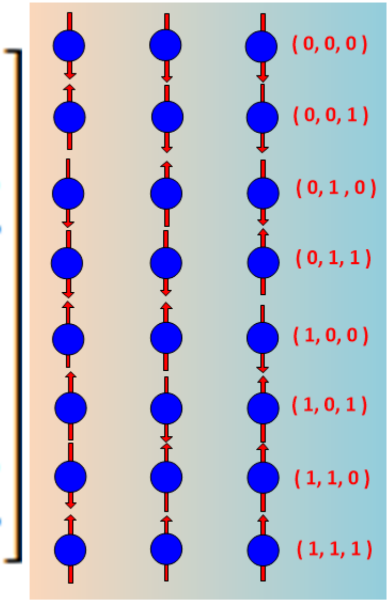
$$|q_0\rangle = e|0\rangle + f|1\rangle = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Η κατάσταση του κβαντικού καταχωρητή $|q_R>$
δίνεται από το **ΤΑΝΙΣΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ**

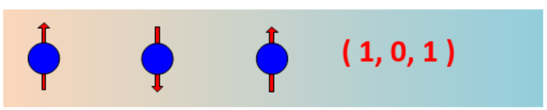
Κάθε ένα στοιχείο του πίνακα του τανιστικού γινομένου αντιστοιχεί...

...σε μια από όλες τις 8 δυνατές κατστάσεις που θα βρεθεί ο καταχωρητής τριών qubit

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}c\cdot e\\c\cdot f\\d\cdot e\\d\cdot f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\cdot c\cdot e\\a\cdot c\cdot f\\a\cdot d\cdot e\\a\cdot d\cdot f\\b\cdot c\cdot e\\b\cdot c\cdot f\\b\cdot d\cdot e\\b\cdot d\cdot f\end{bmatrix}$$



Για παράδειγμα θα υπολογίσουμε το πίνακα
που αντιστοιχεί στη βασική κατάσαση



$$|1\rangle\otimes|0\rangle\otimes|1\rangle=|101\rangle$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Παρόμοια υπολογίζονται
αι οι άλλοι πίνακες

Όπως και στη περίπτωση των δύο Qubits
Παρόμοια για τρια Qubits ισχύει

$$|q_R\rangle = |q_2\rangle \times |q_1\rangle \times |q_0\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \cdot e \\ c \cdot f \\ d \cdot e \\ d \cdot f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c \cdot e \\ a \cdot c \cdot f \\ a \cdot d \cdot e \\ a \cdot d \cdot f \\ b \cdot c \cdot e \\ b \cdot c \cdot f \\ b \cdot d \cdot e \\ b \cdot d \cdot f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix}$$

$$= c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_o|000\rangle + c_1|001\rangle + \cdots + c_7|111\rangle$$

Το διάνυσμα κατάστασης αυτού του καταχωρητή υπάρχει σε ένα **χώρο Hilbert οκτώ διαστάσεων** και το μήκος του είναι ίσο με την μονάδα.

Η συνολική πιθανότητα θα ικανοποιεί την συνθήκη

$$[c_o]^2 + [c_1]^2 + [c_2]^2 + [c_3]^2 + [c_4]^2 + [c_5]^2 + [c_6]^2 + [c_7]^2 = 1$$

Το μέγεθος της αποθηκευμένης πληροφορίας μεγαλώνει εκθετικά

χρησιμοποιώντας περισσότερα bit

συνδυασμούς

από 4 κβαντικά bit παίρνω $2^4 = 16$

από 5 κβαντικά bit παίρνω $2^5 = 32$

από 6 κβαντικά bit παίρνω $2^6 = 64$

από 7 κβαντικά bit παίρνω $2^7 = 128$

από 8 κβαντικά bit παίρνω $2^8 = 256$

Παρατηρούμε πως αυξάνοντας τον αριθμό των bit κατά 1 διπλασιάζονται οι συνδυασμοί και ο όγκος της πληροφορίας που μπορούμε να αποθηκεύσουμε.

Με το τελευταίο συνδυασμό φαίνεται πως από 8 μόνο κβαντικά bit παίρνουμε 256 συνδυασμούς μπορούμε να αποθηκεύσουμε όλους τους ASCI χαρακτήρες που χρειαζόμαστε.

Αν διαθέσουμε 300 μόνο bit

παίρνουμε 2^{300} δυνατούς συνδυασμούς ή 10^{90}

αυτούς για να τους καταγράψουμε είναι περισσότεροι και από τα σωματίδια ολόκληρου του σύμπαντος!!!