ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΔΙΑΛΕΞΗ 7η

Το υλικό της διάλεξης βασίζεται στις Σημειώσεις Μαθηματικών για Οικονομολόγους ΙΙ (2021) του Καθηγητή Ιωάννη Βενέτη.

Βελτιστοποίηση συναρτήσεων με δύο ή και περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές

1.1.Συνθήκες πρώτης τάξης

Έστω μονομεταβλητή συνάρτηση y=f(x). Το στάσιμο σημείο της x* είναι αυτό για το οποίο ικανοποιείται η συνθήκη πρώτης τάξης (Σ.Π.Τ.): $\frac{dy}{dx}$ = f΄(x) = 0, δηλαδή f΄(x*)=0 ή dy = f΄(x) dx = 0dx = 0.

Σε περίπτωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x_1, x_2 με $y=f(x_1,x_2)$ το ολικό διαφορικό $dy = f_1dx_1 + f_2dx_2$ είναι 0 για dx_1, $dx_2 \neq 0$ αν $f_1 = f_2 = 0$. Οι τιμές x_1^*, x_2^* που ικανοποιούν τις Σ.Π.Τ (δηλαδή $f_1 = f_2 = 0$) μαζί με την τιμή y* = f (x_1^*, x_2^*) ορίζουν το **στάσιμο σημείο** (x_1^*, x_2^* , y*).

1.2. Συνθήκες δεύτερης τάξης

Η **δεύτερη** μερική παράγωγος ως προς μια μεταβλητή και η **σταυροειδής** μερική παράγωγος ορίζονται ως:

$$f_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)$$

$$f_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)$$

$$f_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)$$

$$f_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

Θεώρημα Young: Αν οι σταυροειδείς μερικές παράγωγοι f_{21} και f_{12} είναι συνεχείς τότε ισχύει ότι f_{12} = f_{21}. Γενικότερα, αν μια συνάρτηση f έχει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους στο x, τότε ∀ i,j ισχύει ότι $f_{ij}(x)$ = $f_{ji}(x)$.

Παράδειγμα

Βρείτε τις πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους της y = g(x_1,x_2, x_3) = $x_1x_2x_3$ + $x_1^2x_2^2$.

g_1 = x_2x_3 +$2x_1x_2^2$

g_2 = x_1x_3 + $2x_1^2x_2$

g_3 = x_1x_2

g_{11} = $2x_2^2$

g_{22} $2x_1^2$

g_{33} = 0

g_{12} = x_3 + $4x_1x_2$

g_{13} = x_2

g_{23} = x_1

Διαφορικό δεύτερης τάξης

Το πρόσημο του διαφορικού δεύτερης τάξης καθορίζει τις συνθήκες δεύτερης τάξης. Έστω συνεχής συνάρτηση z = f(x,y) συνεχής και παραγώγισιμη τουλάχιστον δύο φορές με διαφορικό πρώτης τάξης: dz = $f_x$dx + $f_y$dy.

Το διαφορικό δεύτερης τάξης είναι: $d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy$ →

$d^2z = \frac{\partial(f_xdx+f_ydy)}{\partial x}dx + \frac{\partial(f_xdx+f_ydy)}{\partial y}dy$ →

$d^2z =$ (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{xy}dx + f_{yy}dy)dy → $d^2z =$ $f_{xx}dx^2$ + $2f_{xy}$dxdy + $f_{yy}dy^2$

Αντίστοιχα, σε περίπτωση συνάρτησης z με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές z=f(y,x,w) το διαφορικό δεύτερης τάξης είναι: $d^2z =$ $f_{xx}dx^2$ + $2f_{xy}$dxdy + $f_{yy}dy^2$ +$2f_{xw}$dxdw +$2f_{yw}$dydw + $f_{ww}dw^2$

Παράδειγμα

Έστω συνάρτηση z=f(y,x) = x^2e^{-y}. Το ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης βρίσκεται ως εξής:

Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης:

f_x = $2xe^{-y}$

f_y = $-x^2e^{-y}$

$f_{xx} = 2e^{-y}$

$f_{yy} = x^2e^{-y}$

$f_{xy} = -2xe^{-y}$

Εν συνεχεία υιοθετούμε τον τύπο του ολικού διαφορικού δεύτερης τάξης:

$d^2z = f_{xx}dx^2 + 2\, f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 \rightarrow d^2z = (2e^{-y})\, dx^2 + 2(-2xe^{-y})\, dxdy + (x^2e^{-y})\, dy^2 = 2e^{-y}dx^2 - 4xe^{-y}dxdy + x^2e^{-y}dy^2$.

Συνθήκες δεύτερης τάξης: Για συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες τουλάχιστον δύο φορές ισχύει ότι: Εάν $d^2z < 0$ σε συγκεκριμένο στάσιμο σημείο, τότε έχουμε **τοπικό μέγιστο**. Εάν $d^2z > 0$ σε συγκεκριμένο στάσιμο σημείο, τότε έχουμε **τοπικό ελάχιστο**.

Το δεύτερο διαφορικό $d^2z = f_{xx}dx^2 + 2\, f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$ μπορεί να γραφεί σε μορφή διανυσμάτων-μητρών ως: λ΄Ηλ όπου $\lambda' = (dx \quad dy)$, $\lambda = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ και Α τετραγωνική συμμετρική μήτρα $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ η οποία καλείται και **Εσσιανή μήτρα ή μήτρα δεύτερων παραγώγων.**

Γενικά, η σχέση $q_{1\times1} = \lambda'_{1\times n} H_{n\times n} \lambda_{n\times1}$ καλείται τετραγωνική μορφή και ισχύει ότι:

1) $q = \lambda' H \lambda > 0$ αν η μήτρα H είναι θετικά ορισμένη. Σε αυτή την περίπτωση η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη.
2) $q = \lambda' H \lambda \geq 0$ αν η μήτρα H είναι θετικά ημι-ορισμένη. Σε αυτή την περίπτωση η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ημι-ορισμένη.
3) $q = \lambda' H \lambda < 0$ αν η μήτρα H είναι αρνητικά ορισμένη. Σε αυτή την περίπτωση η τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ορισμένη.
4) $q = \lambda' H \lambda \leq 0$ αν η μήτρα H είναι αρνητικά ημι-ορισμένη. Σε αυτή την περίπτωση η τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ημι-ορισμένη.

Αν στο στάσιμο σημείο, η H είναι θετικά ορισμένη ($H>0$) τότε $d^2z > 0$ και έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Αν στο στάσιμο σημείο, η H είναι αρνητικά ορισμένη ($H<0$) τότε $d^2z < 0$ και έχουμε τοπικό μέγιστο.

Χρησιμοποιούμε τις **πρώτιστες κύριες ελάσσονες ορίζουσες** της Εσσιανής H οι οποίες συμβολίζονται με H_1, H_2, H_3,…. H_n.

Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών (η H είναι 2×2):

$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$, $H_1 = f_{xx}$, $H_2 = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ ή

$H = \begin{pmatrix} f_{yy} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{xx} \end{pmatrix}$, $H_1 = f_{yy}$, $H_2 = \begin{pmatrix} f_{yy} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{xx} \end{pmatrix}$.

α) Η $H>0$, όταν $|H_1| >0$, $|H_2| >0$, δηλαδή όταν $f_{xx} >0$, $f_{yy} >0$ και $f_{xx}f_{yy} - (f_{yy})^2>0$.

β) Η $H<0$, όταν $|H_1| <0$, $|H_2| >0$, δηλαδή όταν $f_{xx} <0$, $f_{yy} <0$ και $f_{xx}f_{yy} - (f_{yy})^2>0$.

Βελτιστοποίηση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές

Βήμα 1: Συνθήκες πρώτης τάξης, $f_x = f_y = 0$ και υπολογίζουμε στάσιμο σημείο x^*, y^*.

Βήμα 2: Συνθήκες δεύτερης τάξης, υπολογίζουμε Εσσιανή μήτρα και προβαίνουμε σε αντικατάσταση του σημείου x^*, y^*.

Αν $f_{xx} >0$, $f_{yy} >0$ και $f_{xx}f_{yy} - (f_{yy})^2>0$ στο σημείο x^*, y^* τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Αν $f_{xx} <0$, $f_{yy} <0$ και $f_{xx}f_{yy} - (f_{yy})^2>0$ στο σημείο x^*, y^* τότε έχουμε τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα

Να κάνετε βελτιστοποίηση της συνάρτησης $z= f(x,y) = x+ 2ey - e^x - e^{2y}$.

Επίλυση

Συνθήκες πρώτης τάξης: $f_x=0 \rightarrow 1 - e^x = 0 \rightarrow x^*=0$, $f_y=0 \rightarrow 2e - 2e^{2y} = 0 \rightarrow y^*=\frac{1}{2}$.

Αντικαθιστώντας $x^*=0$ και $y^*=\frac{1}{2}$ στην $z= f(x,y)$ έχουμε στάσιμο σημείο $x^*, y^*, z^* = 0, \frac{1}{2}, -1$.

Συνθήκες δεύτερης τάξης: $f_{xx} = - e^x$, $f_{yy} = -4e^{2y}$, $f_{xy} = 0$.

Στο στάσιμο σημείο $x^*, y^* = 0, \frac{1}{2}$ έχουμε $f_{xx}^* = -1 <0$, $f_{yy}^* = -4e<0$ και $f_{xy}^*=0$. Επίσης $f_{xx}^*f_{yy}^* - (f_{xy}^*)^2 = 4e>0$.

Άρα το σημείο (x^*, y^*, z^*) = (0, $\frac{1}{2}$, -1) είναι τοπικό μέγιστο.

Γενίκευση: βελτιστοποίηση συναρτήσεων με περισσότερες από δύο μεταβλητές

Έστω συνάρτηση y=f(x_1,x_2,... x_n)

Βήμα 1: Συνθήκες πρώτης τάξης, f_1 = f_2 =…=f_n =0 και υπολογίζουμε στάσιμο σημείο x_1^*,x_2^*,... x_n^*.

Βήμα 2: Συνθήκες δεύτερης τάξης, υπολογίζουμε Εσσιανή μήτρα

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & f_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & f_{n-1,n} \\ f_{n1} & \cdots & f_{n,n-1} & f_{nn} \end{pmatrix}$$

και υπολογίζουμε τις **πρώτιστες κύριες ελάσσονες ορίζουσες** $|H_i|$ για i = 1,2,…n. Κατόπιν, αντικαθιστούμε τις τιμές x_1^*,x_2^*,... x_n^* του στάσιμου σημείου ώστε να βρούμε τα πρόσημα των $|H_i|$ για i = 1,2,…n.

Ελάχιστο έχουμε στο σημείο y^*, x_1^*,x_2^*,... x_n^* εάν $|H_i| > 0$ για i = 1,2,…n.

Μέγιστο έχουμε στο σημείο y^*, x_1^*,x_2^*,... x_n^* εάν $(-1)^i\,|H_i| > 0$ για i = 1,2,…n, δηλαδή οι πρώτιστες κύριες ελάσσονες ορίζουσες $|H_i|$ εναλλάσσουν πρόσημο αρχίζοντας με μείον, με $|H_1^*| < 0$, $|H_2^*| > 0$, $|H_3^*| < 0$, κοκ.

Σε κάθε άλλη περίπτωση με $H_n^*|\neq 0$ έχουμε **σαγματικό σημείο** ή αλλιώς **δεν μπορούμε να αποφασίσουμε**.

Παράδειγμα

Να κάνετε βελτιστοποίηση της συνάρτησης y= f(x_1, x_2, x_3) = $2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$

Επίλυση:

1) Συνθήκες πρώτης τάξης:

$f_1 = 0 \rightarrow 4x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$f_2 = 0 \rightarrow x_1 + 8x_2 = 0$

$f_3 = 0 \rightarrow x_1 + 2x_3 = 0$

x_1^*,x_2^*,x_3^* = 0, y^* = 2.

1) Συνθήκες δεύτερης τάξης:

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|H_1^*| = 4 > 0,$

$|H_2^*| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 31 > 0,$

$|H_3^*| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\times \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\times \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 54 > 0$

Άρα το σημείο $x_1^*, x_2^*, x_3^* = 0$, $y^* = 2$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα

Να προβείτε σε μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους: Π = $pAK^{\gamma}L^{\gamma} - wL - rK$ όπου $\gamma > 0$.

Επίλυση:

Συνθήκες πρώτης τάξης

(1) $\Pi_K = \gamma pAK^{\gamma-1}L^{\gamma} - r = 0 \rightarrow \gamma pAK^{\gamma-1}L^{\gamma} = r$

(2) $\Pi_L = \gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-1} - w = 0 \rightarrow \gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-1} = w$

Διαιρούμε τις εξισώσεις: $\frac{(1)}{(2)} = \frac{\gamma pAK^{\gamma-1}L^{\gamma}}{\gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-1}} = \frac{r}{w} \rightarrow \frac{L}{K} = \frac{r}{w} \rightarrow L = K*\frac{r}{w}$

Αντικαθιστούμε το $L = K*\frac{r}{w}$ στην (2): $\gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-1} - w = 0 \rightarrow \gamma pAK^{\gamma}(K * \frac{r}{w})^{\gamma-1} - w = 0 \rightarrow \gamma pAK^{2\gamma-1}(\frac{r}{w})^{\gamma-1} = w \rightarrow K^{2\gamma-1} = \frac{1}{\gamma pA} w (\frac{r}{w})^{1-\gamma} \rightarrow K^{2\gamma-1} = \frac{1}{\gamma pA} w^{\gamma} r^{1-\gamma} \rightarrow$

$K^* = \left(\frac{1}{\gamma pA}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}} * \ w^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}} r^{\frac{1-\gamma}{2\gamma-1}}$

και $L^* = \frac{r}{w} * K = \left(\frac{1}{\gamma pA}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}} * \ w^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}} r^{\frac{1-\gamma}{2\gamma-1}} * r w^{-1} \rightarrow L^* = \left(\frac{1}{\gamma pA}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}} * \ w^{\frac{1-\gamma}{2\gamma-1}} r^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}}$

Συνθήκες δεύτερης τάξης

(1) Π_{KK} = $(\gamma\text{-}1)\gamma pAK^{\gamma-2}L^{\gamma}$

(2) Π_{LL} = $(\gamma\text{-}1)\gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-2}$

(3) Π_{KL} =$\gamma^2 pAK^{\gamma-1}L^{\gamma-1}$

Η Εσσιανή μήτρα γράφεται ως: Η= $\begin{pmatrix} \Pi_{KK} & \Pi_{KL} \\ \Pi_{KL} & \Pi_{LL} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} (\gamma-1)\gamma pAK^{\gamma-2}L^{\gamma} & \gamma^2 pAK^{\gamma-1}L^{\gamma-1} \\ \gamma^2 pAK^{\gamma-1}L^{\gamma-1} & (\gamma-1)\gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-2} \end{pmatrix}$

$= (\gamma-1)\gamma pA \begin{pmatrix} K^{\gamma-2}L^{\gamma} & \frac{\gamma}{\gamma-1}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} & K^{\gamma}L^{\gamma-2} \end{pmatrix}$

Για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση κέρδους θα πρέπει η πρώτη **πρώτιστη κύρια ελάσσονα ορίζουσα να** είναι αρνητική στο στάσιμο σημείο ($|H_1^*|< 0$). Αυτό ισχύει εάν $|H_1^*|$=$(\gamma\text{-}1)\gamma pA < 0$ δηλαδή όταν $\gamma< 1$ (ο όρος $\gamma pAK^{\gamma-2}L^{\gamma}$είναι > 0).

Η δεύτερη **πρώτιστη κύρια ελάσσονα ορίζουσα** είναι:

$|H_2|$= $\left| (\gamma-1)\gamma pA \begin{pmatrix} K^{\gamma-2}L^{\gamma} & \frac{\gamma}{(\gamma-1)}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} & K^{\gamma}L^{\gamma-2} \end{pmatrix} \right|$ =

$(\gamma\text{-}1)^2\gamma^2p^2A^2 \begin{vmatrix} K^{\gamma-2}L^{\gamma} & \frac{\gamma}{(\gamma-1)}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} & K^{\gamma}L^{\gamma-2} \end{vmatrix}$ =

$(\gamma\text{-}1)^2\gamma^2p^2A^2$ ($K^{2\gamma-2}L^{2\gamma-2} - \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2}K^{2\gamma-2}L^{2\gamma-2}$) =

$(\gamma\text{-}1)^2\gamma^2p^2A^2K^{2\gamma-2}L^{2\gamma-2}(1\text{-}\frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2})$.

Για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση κέρδους θα πρέπει η δεύτερη **πρώτιστη κύρια ελάσσονα ορίζουσα** να εναλλάσσει πρόσημο ($|H_1^*|< 0, |H_2^*|$>0) και επομένως θα πρέπει $|H_2|> 0$. Ο όρος Ο όρος $(\gamma\text{-}1)^2\gamma^2p^2A^2K^{2\gamma-2}L^{2\gamma-2}$ είναι > 0. Θα πρέπει, για $|H_2^*|$>0, $1\text{-}\frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2} > 0 \rightarrow (\gamma\text{-}1)^2 - \gamma^2 > 0 \rightarrow \gamma^2 \text{-}2\gamma\text{+}1 - \gamma^2 > 0 \rightarrow \text{-}2\gamma\text{+}1 > 0 \rightarrow \gamma < \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα

Υποθέτουμε επιχείρηση που λειτουργεί σε καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού (επομένως η τιμή πώλησης p του προϊόντος που παράγεται θεωρείται σταθερή για την επιχείρηση) η οποίο χρησιμοποιεί συντελεστές παραγωγής κεφάλαιο K και εργασία L για την παραγωγή του προϊόντος της Q το οποίο καθορίζεται από συνάρτηση παραγωγής $Q = Q\ (K,L)$. Το οριακό προϊόν του κεφαλαίου και της εργασίας δίνεται, αντίστοιχα, από: $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = Q_K > 0$ και $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = Q_L > 0$.

Υποθέτουμε ότι η οριακή παραγωγικότητα των συντελεστών παραγωγής είναι φθίνουσα και επομένως: $Q_{KK}<0$, $Q_{LL}<0$

Το κόστος εργασίας (μισθός) συμβολίζεται με w και το κόστος του κεφαλαίου με r.

Ερώτηση: Πώς μεταβάλλεται η ζήτηση εργασίας και κεφαλαίου από μια μεταβολή στο κόστος εργασίας w;

Απάντηση: Αρχικά, για να ικανοποιούνται οι συνθήκες δεύτερης τάξης για τοπικό μέγιστο (θεωρούμε ότι η επιχείρηση έχει ως στόχο της την μεγιστοποίηση του κέρδους) θα πρέπει στο στάσιμο σημείο: $Q_{KK}<0$, $Q_{LL}<0$ και $Q_{KK}Q_{LL} - (Q_{LK})^2 > 0$.

(* Υποθέτουμε ότι η ανισότητα $Q_{KK}Q_{LL} - (Q_{LK})^2 > 0$ ισχύει στο στάσιμο σημείο).

Επομένως, εφόσον ζητείται να βρεθεί πώς μεταβάλλεται η ζήτηση εργασίας και κεφαλαίου από μια μεταβολή στο κόστος εργασίας w (για μια επιχείρηση που έχει ως στόχο της την μεγιστοποίηση του κέρδους) πρέπει να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial L^*}{\partial w}$ και $\frac{\partial K^*}{\partial w}$

Εφόσον δεν γνωρίζουμε την αναλυτική μορφή της συνάρτησης παραγωγής Q(K, L) ξεκινούμε θεωρώντας μια συνάρτηση κέρδους $\Pi = pQ(K,L) - wL - rK$ με τις συνθήκες πρώτης τάξης ως προς L και K $\Pi_K = \Pi_L = 0$ να δίνονται ως οι πεπλεγμένες συναρτήσεις:

$F^1(K, L, w, r, p) = 0 \rightarrow pQ_L - w = 0 \rightarrow pQ_L^* - w = 0$ και

$F^2(K, L, w, r, p) = 0 \rightarrow pQ_K - r = 0 \rightarrow pQ_K^* - r = 0$

Το ολικό διαφορικό των πεπλεγμένων είναι:

$dF^1 = 0 \rightarrow F_K^1 dK + F_L^1 dL + F_w^1 dw + F_r^1 dr + F_p^1 dp = 0 \rightarrow pQ_{LK}dK + pQ_{LL}dL - 1dw + 0dr + Q_L dp \rightarrow pQ_{LK}dK + pQ_{LL}dL = dw - Q_L dp$ (1)

και

$dF^2 = 0 \rightarrow F_K^2 dK + F_L^2 dL + F_w^2 dw + F_r^2 dr + F_p^2 dp = 0 \rightarrow pQ_{KK}dK + pQ_{KL}dL + 0dw - 1dr + Q_K dp = 0 \rightarrow pQ_{KK}dK + pQ_{KL}dL = dr - Q_K dp$ (2)

Επομένως από (1) και (2), στο στάσιμο σημείο:

$$\begin{pmatrix} pQ_{LL}^* & pQ_{LK}^* \\ pQ_{KL}^* & pQ_{KK}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dL^*}{dw} \\ \frac{dK^*}{dw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - Q_L \frac{dp}{dw} \\ \frac{dr}{dw} - Q_{K\frac{dp}{dw}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Εφόσον το ζητούμενο της άσκησης είναι η επίδραση της μεταβολής στο w (dw) υποθέτοντας ότι οι λοιποί προσδιοριστικοί παράγοντες παραμένουν σταθεροί (ceteris paribus), μπορούμε να θέσουμε $dr = dp = 0$. Επίσης, αντικαθιστώντας το σύμβολο d με το σύμβολο της μερικής παραγώγισης ∂, η (3) γίνεται:

$$\begin{pmatrix} pQ_{LL}^* & pQ_{LK}^* \\ pQ_{KL}^* & pQ_{KK}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*}{\partial w} \\ \frac{\partial K^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η λύση Cramer για το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δίνεται:

A) $\frac{\partial L^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & pQ_{LK}^* \\ 0 & pQ_{KK}^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pQ_{LL}^* & pQ_{LK}^* \\ pQ_{KL}^* & pQ_{KK}^* \end{vmatrix}} = \frac{pQ_{KK}^* \quad (-)}{p^2(Q_{LL}^* Q_{KK}^* - (Q_{LK}^*)2) \quad (+)} < 0$. Επομένως, η ζήτηση εργασίας L μειώνεται όταν αυξάνεται το κόστος εργασίας w.

B) $\frac{\partial K^*}{\partial w}$= $\frac{\begin{vmatrix} pQ_{LL}^* & 1 \\ pQ_{KL}^* & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pQ_{LL}^* & pQ_{LK}^* \\ pQ_{KL}^* & pQ_{KK}^* \end{vmatrix}} = \frac{pQ_{KL}^* \quad (;;;;)}{p^2\left(Q_{LL}^* Q_{KK}^* - \left(Q_{LK}^*\right)2\right) \quad (+)}$ = ;;;;;;. Επομένως, δεν γνωρίζουμε πως αντιδρά η ζήτηση κεφαλαίου K όταν αυξάνεται το κόστος εργασίας w. Αυτό εξαρτάται από το πρόσημο της σταυροειδούς παραγώγου Q_{KL}, δηλαδή από το εάν έχουμε συμπληρωματικότητα των συντελεστών παραγωγής (Q_{KL}>0). Σε αυτή την περίπτωση η περισσότερη εργασία αυξάνει την οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου.

Βιβλιογραφία

Ιωάννης Βενέτης, 2021, Σημειώσεις Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ Διάλεξη 6, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Σχολή Οικονομικών Επιστημών και Διοίκησης Επιχειρήσεων.