ΘΕΜΑΤΑ

Άσκηση 1. Να υπολογιστεί η ορίζουσα της μήτρας A=$\begin{bmatrix} 7 & \alpha & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ \beta & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

Λύση: Η ορίζουσα της A, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της πρώτης γραμμής είναι:

$|A| = 7* (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + \alpha * (-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \beta & 8 \end{vmatrix} + 0 * (-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ \beta & 3 \end{vmatrix} = 7*1*(5*8-2*3)$

$-\alpha*(-1*8-2*\beta) + 0 = 7*(40-6) - \alpha*(-8-2\beta) = 7*34 + 8\alpha + 2\alpha\beta = 238+\alpha(8+2\beta)$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε τον $(X)^{-1}$ όταν X=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Λύση: Η ορίζουσα του X, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της πρώτης γραμμής είναι:

$|X| = 2* (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1*(-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2*(-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2*(9-2) - 1*(6-8) + 2*$

$(2-12) = 14+2-20 = -4 \neq 0$, άρα υπάρχει η X^{-1}.

Η συμπαράγουσα μήτρα C είναι η

$$C=\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -10 \\ -1 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Η προσαρτημένη, ανάστροφη της συμπαράγουσας C είναι η C’

$$C' = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{-4} C' = \frac{1}{-4} * \begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ -10 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/4 & 1/4 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 5/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3. Να επιλύστε με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss Jordan το σύστημα:

x-2y+z=0

2x-y+5z=-3

3x+y+2z=1

Λύση:

Για λόγους συντομίας γράφουμε το σύστημα με τη μορφή: $A|b=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 5 & -3\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss Jordan κάνοντας γραμμοπράξεις:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 5 & -3\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & -3\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \Gamma_3 - 3\Gamma_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & -3\\ 0 & 7 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\frac{\Gamma_2}{3} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 7 & -1 & 1\end{pmatrix} \Gamma_3 - 7\Gamma_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -8 & 8\end{pmatrix} \frac{\Gamma_3}{-8} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1 + 2\Gamma_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Gamma_2 - \Gamma_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Gamma_1 - 3\Gamma_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Επομένως, x=1, y=0, z=-1

Άσκηση 4. Να επιλύστε με τη μέθοδο Cramer το σύστημα

2x-y+4z=1

3x+2y+z=2

5x+y+4z=3

Λύση:

Οι λύσεις των x,y και z δίνονται από $x=\frac{|A_x|}{|A|}$, $y=\frac{|A_y|}{|A|}$ και $z=\frac{|A_z|}{|A|}$ όπου A_i για i=x,y,z είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$ ο οποίος αποτελείται από τους συντελεστές των αγνώστων, όταν αντικαταστήσουμε την i-στήλη με τη στήλη των λύσεων του συστήματος $b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$.

Η ορίζουσα της Α, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της πρώτης γραμμής του πίνακα Α είναι: |A| =2∗ $(-1)^{1+1}$∗ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$-1∗ $(-1)^{1+2}$∗ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} +$ 4∗ $(-1)^{1+3}$∗ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ =2 ∗ (8-1) +1*(12-5) + 4*(3-10) = -7

Η ορίζουσα του πίνακα A_x =$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ είναι $|A_x|$ =1∗$(-1)^{1+1}$∗ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$-1∗$(-1)^{1+2}$∗ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} +$ 4∗ $(-1)^{1+3}$∗ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ =1 ∗ (8-1) +1*(8-3) + 4*(2-6) =7+5-16=-4.

Η ορίζουσα του πίνακα A_y =$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ είναι $|A_y|$ =2∗$(-1)^{1+1}$∗ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$+1∗$(-1)^{1+2}$∗ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} +$ 4∗ $(-1)^{1+3}$∗ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ =2 ∗ (8-3) -1*(12-5) + 4*(9-10) =10-7-4=-1.

Η ορίζουσα του πίνακα A_z =$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ είναι $|A_y|$ =2∗$(-1)^{1+1}$∗ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$-1∗$(-1)^{1+2}$∗ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} +$ 1∗ $(-1)^{1+3}$∗ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ =2 ∗ (6-2) +1*(9-10) + 1*(3-10) =8-1-7=0

Επομένως, x=$\frac{|A_x|}{|A|}$ =$\frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$, y= $\frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$ και z=$\frac{|A_z|}{|A|}$= $\frac{0}{-7}$=0.