ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΔΙΑΛΕΞΗ 3η

1. Αντίστροφη μήτρα, ορισμός

Η αντίστροφη μήτρα μιας τετραγωνικής $n \times n$ μήτρας συμβολίζεται με A^{-1} και όταν ορίζεται ικανοποιεί την σχέση $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Κάθε i,j στοιχείο της αντίστροφης μήτρας A^{-1} δίνεται από τον τύπο:

$$A_{i,j}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}|A(j|i)|}{|A|}$$

όπου ο όρος $(-1)^{i+j}|A(j|i)|$ είναι το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του *j*,*i* στοιχείου της μήτρας Α.

Για να υπάρχει αντίστροφη μήτρα θα πρέπει η ορίζουσα της $|A| \neq 0$.

2. Αντίστροφη μήτρα διαστάσεων 2×2

Έστω μήτρα Α διαστάσεων 2×2 όπου $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Αν η ορίζουσά της $|A| = ad - bc \neq 0$ τότε η αντίστροφή της δίνεται από τον τύπο: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$.

Π.χ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, τότε $|A| = 4*2-3*1 = 5 \neq 0$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

3. Αντίστροφη μήτρα διαστάσεων n×n

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την αντίστροφη μιας $n \times n$ μήτρας Α όπου $n \geq 3$, τότε ακολουθούμε τα εξής τρία βήματα:

Βήμα 1: Δημιουργία συμπαράγουσας μήτρας C όπου το κάθε στοιχείο της *i,j* είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του αντίστοιχου στοιχείου της A.

Βήμα 2: Δημιουργία της προσαρτημένης μήτρας C’που είναι η ανάστροφος της συμπαράγουσας μήτρας C.

Βήμα 3: Δημιουργία αντίστροφης μήτρας $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ C’.

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 8\\ 0 & 5 & -9\\ 8 & -9 & 7\end{bmatrix}$.

1. Η ορίζουσα του, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της πρώτης γραμμής είναι: $|A| =1\times(-1)^{1+1}\times \begin{vmatrix}5 & -9\\ -9 & 7\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+2}\times \begin{vmatrix}0 & -9\\ 8 & 7\end{vmatrix} + 8\times(-1)^{1+3}\times \begin{vmatrix}0 & 5\\ 8 & -9\end{vmatrix} =1\times1\times((5\times7)-((-9)\times(-9))+ 0 +8\times1\times((0\times-9)-(5\times8) = 35-81 + 8\times(0-40) = -366 \neq 0$, άρα υπάρχει η A^{-1}.
2. Η συμπαράγουσα C είναι η

$$C= \begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & -9\\ -9 & 7\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -9\\ 8 & 7\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 5\\ 8 & -9\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 8\\ -9 & 7\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 8\\ 8 & 7\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 8 & -9\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 8\\ 5 & -9\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 8\\ 0 & -9\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}-46 & -72 & -40\\ -72 & -57 & 9\\ -40 & 9 & 5\end{bmatrix}.$$

3. Η προσαρτημένη, ανάστροφη της συμπαράγουσας C είναι η C’

$$C'=\begin{bmatrix}-46 & -72 & -40\\ -72 & -57 & 9\\ -40 & 9 & 5\end{bmatrix}.$$

4. Μήτρα $A^{-1} = \frac{1}{-366} C' = \frac{1}{-366}\begin{bmatrix} -46 & -72 & -40 \\ -72 & -57 & 9 \\ -40 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-46}{-366} & \frac{-72}{-366} & \frac{-40}{-366} \\ \frac{-72}{-366} & \frac{-57}{-366} & \frac{9}{-366} \\ \frac{-40}{-366} & \frac{9}{-366} & \frac{5}{-366} \end{bmatrix}$.

4. Ιδιότητες αντίστροφων μητρών

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες αντίστροφων μητρών:

α. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

β. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

γ. $(A+B)^{-1} = A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})B^{-1}$

δ. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

5. Αντίστροφη διαγώνιας μήτρας

Η αντίστροφη μιας διαγώνιας μήτρας $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$ είναι η

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{2,2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{bmatrix}$$

6. Ταυτοδύναμες μήτρες

Μια τετραγωνική μήτρα A που ικανοποιεί τη σχέση $AA=A^2 = A$ ονομάζεται ταυτοδύναμη ή εκθετικά αναλλοίωτη. Μια συμμετρική ταυτοδύναμη μήτρα έχει την επιπλέον ιδιότητα $AA' = A'A = A$.

Βιβλιογραφία – Πηγές

Ιωάννης Βενέτης, 2015 Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Κεφάλαιο 13, Εκδόσεις Γκότση.