ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΔΙΑΛΕΞΗ 2η

1. Ορίζουσα Πίνακα

Η ορίζουσα ορίζεται μόνο για τετραγωνικούς πίνακες. Συμβολίζεται με |A| ή με det (A). Για πίνακες 1 × 1 είναι: $|A| = \alpha_{11}$.

Για πίνακες 2 × 2 είναι: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \times \alpha_{22} - \alpha_{12} \times \alpha_{21}$.

Γενικότερα για ένα πίνακα διαστάσεων n × n η ορίζουσα του δίνεται από τον τύπο: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} |A(i|j)|$ όπου $|A(i|j)|$ είναι η **ελάσσονα ορίζουσα** του i,j στοιχείου (η οποία βρίσκεται διαγράφοντας την i-οστή γραμμή και τη j-οστή στήλη της A) και ο όρος $(-1)^{i+j}|A(i|j)|$ είναι το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του i,j στοιχείου.

Ο παραπάνω τύπος $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} |A(i|j)|$ ονομάζεται ανάπτυγμα της |A| ως προς την i-οστή γραμμή.

Σημειώνεται ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα οποιασδήποτε στήλης ή γραμμής προκειμένου να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα διαστάσεων n × n.

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 8 & -9 & 7 \end{bmatrix}$, η ορίζουσα του, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της πρώτης γραμμής είναι: $|A| = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -9 & 7 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + 8 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} =$

$= 1 \times 1 \times ((5 \times 7) - ((-9) \times (-9))) + 0 + 8 \times 1 \times ((0 \times -9) - (5 \times 8)) = 35 - 81 + 8 \times (0 - 40) = -366.$

2. **Ιδιότητες Οριζουσών**

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες οριζουσών:

α. $|A| = |A'|$

β. $|\lambda A| = \lambda^n|A|$, λ βαθμωτό

γ. $|A_{n\times n}B_{n\times n}| = |A_{n\times n}|\,|B_{n\times n}|$

δ. Η ορίζουσα ενός μοναδιαίου πίνακα Ι είναι ίση με 1. Αν ένας πίνακας έχει έστω και μια στήλη ή γραμμή που περιέχει μόνο μηδενικά στοιχεία, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με 0. Η ορίζουσα μιας διαγώνιας μήτρας, μιας άνω τριγωνικής ή κάτω τριγωνικής μήτρας είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

3. **Γραμμική Εξάρτηση**

Ένα σύνολο διανυσμάτων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο όταν η εξίσωση $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i=0$ ικανοποιείται μόνο για $\lambda_i = 0$. Σε περίπτωση όπου υπάρχουν $\lambda \neq 0$ για τα οποία ικανοποιείται η συνθήκη $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i=0$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Για παράδειγμα τα διανύσματα x_1, x_2 και x_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν ισχύει $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ γιατί $\lambda_i = (1, -2, 3) \neq 0$.

4. **Βαθμός μήτρας**

Έστω μήτρα Α διαστάσεων $n\times k$. Ο **στηλοβαθμός** της είναι ο μέγιστος αριθμός των στηλών της που είναι γραμμικά ανεξάρτητες και μπορεί να είναι το πολύ ίσος με k. Ομοίως, ο Ο **γραμμοβαθμός** της είναι ο μέγιστος αριθμός των γραμμών της που είναι γραμμικά ανεξάρτητες και μπορεί να είναι το πολύ ίσος με n. Ισχύει ότι ο στηλοβαθμός είναι ίσος με το γραμμοβαθμό και επομένως ο **βαθμός της μήτρας,** ο οποίος συμβολίζεται με *r(A),* ικανοποιεί:

$$r(A) \leq min(n, k)$$

Όταν r(A)=min(n, k) τότε η μήτρα A είναι πλήρους βαθμού.

Ισχύει επίσης ότι $r(A) = r(A') = r(A'A) = r(AA')$

5. **Ιδιότητες Βαθμού**

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

α. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

β. $r(A-B) \geq |r(A) - r(B)|$

γ. $r(AB) = \min \{ r(A), r(B)\}$

δ. Αν υπάρχει $n \times n$ μήτρα A με βαθμό $r(A) < n$ τότε υπάρχουν δύο $n \times m$ μήτρες B,C με βαθμό $r(B) = r(C) = m$ ώστε να ισχύει $A=BC'$

6. **Σχέση Βαθμού-Ορίζουσας-Γραμμικής Εξάρτησης**

Μια τετραγωνική $n \times n$ μήτρα A που έχει πλήρη βαθμό, δηλαδή *r(A)=n,* έχει ορίζουσα διαφορή του μηδενός, δηλαδή |A| ή det (A) $\neq 0$ και επομένως ισχύει ότι όλες οι στήλες και όλες οι γραμμές της είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Βιβλιογραφία – Πηγές

Ιωάννης Βενέτης, 2015 Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Κεφάλαιο 13, Εκδόσεις Γκότση.