ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Παράρτημα άλγεβρας μητρών

13.1 Ορισμοί και ορολογία

Οι **μήτρες ή πίνακες** αποτελούν ορθογώνιες διατάξεις αριθμών ή στοιχείων

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \text{ ή } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

όπου η σημειογραφία a_{ij} υποδηλώνει τη θέση του **στοιχείου** μέσα στη μήτρα και σημαίνει πάντα «i-οστή γραμμή, j-οστή στήλη». Δηλαδή ο **πρώτος** υποδείκτης υποδηλώνει **γραμμή** και ο **δεύτερος** υποδείκτης υποδηλώνει **στήλη**. Τα στοιχεία μίας μήτρας μπορεί να συμβολίζονται για ευκολία και ως $(A)_{ij}$. Στην ανάλυση που ακολουθεί, και όταν δεν είναι ευκόλως εννοούμενο, υποθέτουμε ότι όλα τα στοιχεία των μητρών είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Η μήτρα (ή εναλλακτικά ο πίνακας) A λέμε ότι είναι διαστάσεων ή τάξεως ή μεγέθους n επί k, και γράφουμε $n \times k$, όταν έχει n γραμμές και k στήλες. Συνήθως γράφουμε $\underset{n\times k}{A}$ για να δηλώσουμε τον αριθμό στηλών και γραμμών όταν δεν είναι κατανοητό από πριν.

Διανύσματα: Μία μήτρα που περιέχει μία μόνο στήλη είναι γνωστή και ως **διάνυσμα στήλη** ή αν περιέχει μόνο μία γραμμή είναι ένα **διάνυσμα γραμμή**. Συνήθως αναφέρουμε απλά τον όρο **«διάνυσμα»** αφού είναι γνωστό από τα συμφραζόμενα αν το διάνυσμα είναι στήλη ή γραμμή. Επιπλέον, συνηθίζεται τα στοιχεία ενός διανύσματος να έχουν τον ίδιο συμβολισμό με αυτόν του διανύσματος μόνο που καταγράφονται με βάση έναν υποδείκτη.

Για παράδειγμα ένα 4×1 διάνυσμα y και ένα $1\times n$ διάνυσμα u γράφονται αναλυτικά ως,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \text{ και } u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & u_n \end{pmatrix}$$

Διανύσματα με όλα τους τα στοιχεία ίσα με τη μονάδα συμβολίζονται με έντονο $\mathbf{i}$ δηλαδή

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Συχνά θα δούμε μήτρες να γράφονται σε όρους των στηλών τους. Για παράδειγμα, η μήτρα

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,k} \end{bmatrix}$$

θα μπορούσε να γραφεί και ως

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \end{pmatrix}$$

όπου κάθε στοιχείο x_i είναι ένα $n \times 1$ **διάνυσμα στήλη**

$$x_i = \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ \vdots \\ x_{n,i} \end{pmatrix}$$

Μία μήτρα με ένα μόνο στοιχείο, δηλαδή μία 1×1 μήτρα, ονομάζεται και **μήτρα στοιχείο ή βαθμωτό** και ουσιαστικά αντιστοιχεί σε έναν αριθμό. Όταν πολλαπλασιάζουμε μία μήτρα στοιχείο ή ένα βαθμωτό (αριθμό) με μία $n \times k$ μήτρα με τουλάχιστον μία διάσταση μεγαλύτερη του 1, τότε πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία της μήτρας με τον αριθμό. Για παράδειγμα,

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ a & 5 & -c \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 9\lambda \\ a\lambda & 5\lambda & -c\lambda \\ 0 & -2\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$$

$$z \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 3z \end{bmatrix}$$

$$8\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ a & b & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 40 \\ 8a & 8b & 8c & 8d \end{bmatrix}$$

13.1.1 Τετραγωνικές μήτρες

Μία μήτρα με ίσο αριθμό γραμμών και στηλών, δηλαδή μία μήτρα $n \times n$ ή μία μήτρα $k \times k$ κ.ο.κ. ονομάζεται τετραγωνική. Για παράδειγμα οι παρακάτω μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} a & x & e \\ 4 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικές.

Σε μία τετραγωνική $n \times n$ μήτρα A, τα στοιχεία $(A)_{ii}$ για $i = 1, 2, ..., n$ λέμε ότι βρίσκονται στη **διαγώνιο** της μήτρας την οποία και ονομάζουμε **κύρια διαγώνιο**.

Για παράδειγμα στην επόμενη 3×3 μήτρα τα στοιχεία σε έντονη γραφή βρίσκονται επί της κύριας διαγωνίου

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 5 \\ -1 & \mathbf{8} & -6 \\ 7 & 7 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

13.1.2 Συμμετρική (αντισυμμετρική) μήτρα

Μία μήτρα με στοιχεία που ικανοποιούν $a_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα i, j ονομάζεται συμμετρική. Για παράδειγμα δείχνουμε μία 2×2 συμμετρική μήτρα

$$\begin{bmatrix} a & 4 \\ 4 & b \end{bmatrix}$$

και δύο 3×3 συμμετρικές μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

Σε αντίθεση, μία μήτρα με $a_{ij} = -a_{ji}$ για όλα τα i, j ονομάζεται αντισυμμετρική. Για παράδειγμα, οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 0 & -8 & 1 \\ 8 & 0 & f \\ -1 & -f & 0 \end{bmatrix}$$

είναι αντισυμμετρικές. Στις αντισυμμετρικές μήτρες τα στοιχεία που βρίσκονται συμμετρικά τις κύριας διαγωνίου είναι αντίθετα ενώ όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με το μηδέν αφού μόνο τότε ικανοποιείται η ισότητα $a_{ij} = -a_{ji}$ (παρατηρήστε ότι $a_{ij} = -a_{ji}$ μόνο όταν $a_{ii} = 0$).

13.1.3 Μηδενικές μήτρες

Μία μήτρα με όλα της τα στοιχεία ίσα με το μηδέν ονομάζεται μηδενική. Για παράδειγμα οι μήτρες

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι μηδενικές. Συχνά μπορεί να παρατηρήσουμε **υποδείκτες που υποδηλώνουν τη διάσταση της μηδενικής μήτρας** όταν αυτή δεν είναι άμεσα κατανοητή, π.χ.,

- $\mathbf{0}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ενώ $\mathbf{0}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Όταν η μηδενική μήτρα είναι τετραγωνική τότε δεν χρειάζονται και οι δύο υποδείκτες, π.χ.,

- $\mathbf{0}_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{0}_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13.1.4 Διαγώνιες μήτρες

Μία τετραγωνική μήτρα με μηδενικά στοιχεία πλην αυτών της κύριας διαγωνίου ονομάζεται διαγώνια. Για παράδειγμα η

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

είναι μία διαγώνια 4×4 μήτρα ενώ η

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

είναι μία $n \times n$ διαγώνια μήτρα.

Μία διαγώνια μήτρα με όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με τη μονάδα ονομάζεται **μοναδιαία μήτρα** και συμβολίζεται με $\mathbf{I}_n$ όπου ο υποδείκτης δηλώνει την τάξη της μήτρας. Για παράδειγμα

- $\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Αν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου μίας διαγώνιας μήτρας είναι όλα ίσα μεταξύ τους τότε η μήτρα ονομάζεται **βαθμωτή** αφού μπορεί να γραφεί ως ένα βαθμωτό επί τη μοναδιαία μήτρα. Για παράδειγμα, αν

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

τότε η Σ μπορεί να γραφεί ως $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}_3$ αφού

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}_3$$

13.1.5 Τριγωνικές μήτρες

Μία τετραγωνική μήτρα με μηδενικά στοιχεία **πάνω** από την κύρια διαγώνιο ονομάζεται **τριγωνική κάτω**, για παράδειγμα η μήτρα

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ f & e & c \end{bmatrix}$$

Μία τετραγωνική μήτρα με μηδενικά στοιχεία **κάτω** από την κύρια διαγώνιο ονομάζεται **τριγωνική άνω**, για παράδειγμα η μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 9 & 0.5 \\ 0 & 8.22 & -6 \\ 0 & 0 & 5.01 \end{bmatrix}$$

13.1.6 Toeplitz μήτρα

Οι μήτρες Toeplitz είναι μήτρες οι οποίες έχουν σε κάθε διαγώνιο ίδια στοιχεία. Για παράδειγμα η παρακάτω είναι μία μήτρα Toeplitz

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{bmatrix}$$

Επιπλέον οι **συμμετρικές μήτρες Toeplitz** έχουν την ιδιότητα της συμμετρίας, για παράδειγμα φαίνεται μία συμμετρική μήτρα Toeplitz

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Στην οικονομετρία απαντώνται συχνά τέτοιου είδους μήτρες. Για παράδειγμα, η **μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων** μίας χρονοσειράς $\{u_t\}_1^T$, η οποία γράφεται συνοπτικά ως ένα $T \times 1$ διάνυσμα

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}$$

δίνεται από την μήτρα[1]

$$\underbrace{Var\,(u)}_{T\times T} = E\left(\underset{T\times 1}{u}\;\underset{1\times T}{u'}\right) - \underbrace{E\,(u)}_{T\times 1}\underbrace{E\,(u)'}_{1\times T}$$

η οποία αναλύεται στην

$$Var\,(u) = \begin{bmatrix} Var\,(u_1) & Cov\,(u_1,u_2) & \cdots & Cov\,(u_1,u_T) \\ Cov\,(u_2,u_1) & Var\,(u_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Cov\,(u_{T-1},u_T) \\ Cov\,(u_T,u_1) & \cdots & Cov\,(u_T,u_{T-1}) & Var\,(u_T) \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία επί της κύριας διαγωνίου της μήτρας

$$Var\,(u_t) = E\,(u_t - E\,(u_t))^2$$

για $t = 1, ..., T$ αντιστοιχούν στις διακυμάνσεις των στοιχείων του $T \times 1$ διανύσματος u ενώ εκτός της διαγωνίου δίνονται οι συνδιακυμάνσεις των στοιχείων του διανύσματος

$$Cov\,(u_t, u_s) = E\,[(u_t - E\,(u_t))\,(u_s - E\,(u_s))]$$

και ισχύει ότι

$$Cov\,(u_t, u_s) = Cov\,(u_s, u_t)$$

Η παραπάνω μήτρα $Var\,(u)$ είναι Toeplitz όταν προβούμε στις υποθέσεις ότι **(α)** οι τυχαίες μεταβλητές $\{u_t\}_{t=1}^{T}$ προέρχονται από την ίδια κατανομή ή έχουν την ίδια διακύμανση και **(β)** η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{u_t\}$ (χρονοσειρά όταν ο δείκτης $t = 1, 2, ..., T$ υποδηλώνει χρόνο) είναι στάσιμη, δηλαδή η **συνδιακύμανση** δύο στοιχείων του διανύσματος εξαρτάται από τη σχετική θέση των στοιχείων και

[1] Η πράξη της αναστροφής u' και του πολλαπλασιασμού uu' θα εξηγηθεί παρακάτω.

μόνο. Εναλλακτικά, εξαρτάται μόνο από την απόλυτη χρονική απόσταση των στοιχείων της χρονοσειράς, δηλαδή $Cov\left(u_t, u_s\right) = Cov\left(u_k, u_n\right)$ όταν $|t-s| = |k-n|$.

Πρώτο παράδειγμα Toeplitz.

Έστω ότι

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

και τα $\{u_t\}_{t=1}^{5}$ προέρχονται από την ίδια κατανομή με διακύμανση

$$Var\left(u_1\right) = Var\left(u_2\right) = .. = Var\left(u_5\right) = 2$$

και συνδιακύμανση η οποία είναι διαφορετική του μηδενός μόνο για στοιχεία με σχετική απόσταση 1. Μάλιστα, θεωρήστε ότι η συνδιακύμανση των u_i, u_{i-1} για $i = 2, 3, 4, 5$ δίνεται από $Cov\left(u_i, u_{i-1}\right) = \frac{1}{2}$.

Παρακάτω βλέπουμε τη μήτρα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων του 5×1 διανύσματος τυχαίων μεταβλητών u (μία μήτρα Toeplitz)

$$Var\left(u\right) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Δεύτερο παράδειγμα Toeplitz. Στο παραπάνω παράδειγμα θεωρήστε ότι η συνδιακύμανση είναι διαφορετική του μηδενός και για στοιχεία του τυχαίου διανύσματος u με σχετική απόσταση 2. Μάλιστα θεωρήστε ότι η συνδιακύμανση των u_i, u_{i-2} για $i = 3, 4, 5$ δίνεται από $Cov\,(u_i, u_{i-2}) = \frac{1}{3}$.

Παρακάτω βλέπουμε τη μήτρα διακυμάνσεων συνδιακυμάνσεων του 5×1 διανύσματος τυχαίων μεταβλητών u (μία μήτρα Toeplitz)

$$Var\,(u) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

13.1.7 Σύνθετες μήτρες

Συχνά στις οικονομετρικές εφαρμογές εμφανίζονται αλγεβρικές δυσκολίες όταν οι μήτρες είναι αρκετά μεγάλου μεγέθους. Στις περιπτώσεις αυτές, η αλγεβρική μελέτη διευκολύνεται σημαντικά αν διαμεριστούν οι μήτρες «κατάλληλα» σε μικρότερα τμήματα ή **υπο-μήτρες**. Έτσι μία μήτρα A ονομάζεται **σύνθετη** αν τα επιμέρους στοιχεία της είναι μήτρες μικρότερου μεγέθους από την A.

Για παράδειγμα η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 3 \\ 0 & b & 9 \end{bmatrix}$ μπορεί να διαμεριστεί ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

- με $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

- $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix}$
- $A_2 = [9]$

Εναλλακτικά και ανάλογα με το ζητούμενο αποτέλεσμα, η μήτρα A μπορεί να **διαμεριστεί** και ως

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

- με $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
- και $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & b & 9 \end{bmatrix}$

Προσοχή: η διαμέριση γίνεται έτσι ώστε οι υπο-μήτρες που βρίσκονται στην ίδια γραμμή να έχουν όλες τον ίδιο αριθμό γραμμών και οι υπο-μήτρες που βρίσκονται στην ίδια στήλη να έχουν τον ίδιο αριθμό στηλών.

13.2 Πρόσθεση και ισότητα

Οι πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης ορίζονται μόνο για μήτρες που έχουν α-κριβώς τις **ίδιες διαστάσεις** και λειτουργούν μέσω πρόσθεσης και αφαίρεσης των αντίστοιχων στοιχείων τους. Σε κάθε άλλη περίπτωση οι μήτρες είναι ασυμβίβαστες ως προς την πρόσθεση ή την αφαίρεση. Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ w & 4 & 5 \\ 1 & -4 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ w+b & 6 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Δύο μήτρες A και B **ίδιων διαστάσεων** (π.χ. και οι δύο $n \times k$) είναι **ίσες** ($A = B$) μόνο όταν κάθε στοιχείο τους είναι ίσο $(A)_{i,j} = (B)_{i,j}$ $\forall i, j$ ή όταν $A - B = \mathbf{0}$. Άρα δύο μήτρες διαφορετικών διαστάσεων δεν μπορεί να είναι ίσες.

Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες,

- **Αντιμεταθετική:** $A \pm B = B \pm A$
- **Προσεταιριστική:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Ουδέτερου στοιχείου:** $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

13.3 Πολλαπλασιασμός

Ο πολλαπλασιασμός μητρών είναι πιο πολύπλοκος. **Για να μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο μήτρες, π.χ.,** AB, **πρέπει ο αριθμός των στηλών της** A **να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών της** B και η παραγόμενη μήτρα έχει αριθμό γραμμών ίσο με αυτόν της A και στηλών ίσο με αυτόν της B. Άρα αν η μήτρα A είναι $n \times k$ και η μήτρα B είναι διαστάσεων $k \times m$ τότε ορίζεται η $C = AB$ η οποία είναι διαστάσεων $n \times m$. Η πράξη του πολλαπλασιασμού ορίζεται ως το **εσωτερικό γινόμενο** κάθε γραμμής της A με κάθε στήλη της B δηλαδή

$$\sum_{p=1}^{k} (A)_{ip} (B)_{pj} = (C)_{ij}$$

για $i = 1, .., n$ και $j = 1, ..., m$. Για παράδειγμα

- **παράδειγμα 1:**

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

$$= \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$$

- **παράδειγμα 2:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)(1)+(2)(6)+(3)(1) & (1)(7)+(2)(0)+(3)(-5) \\ (3)(1)+(2)(6)+(a)(1) & (3)(7)+(2)(0)+(a)(-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ 15+a & 21-5a \end{bmatrix}$$

- **παράδειγμα 3:**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & g \\ h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bh & ag+bk \\ ce+dh & cg+dk \end{bmatrix}$$

Σχηματικά,

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix} \cdot & b_{1,j} & \cdot \\ \cdot & \vdots & \cdot \\ \cdot & b_{k,j} & \cdot \end{bmatrix}}^{B} = \overbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sum\limits_{l=1}^{k} a_{i,l}b_{l,j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}^{AB}$$

Ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες,

- **Προσεταιριστική:** $(AB)\,C = A\,(BC)$
- **Επιμεριστική:** $(A+B)\,C = AC + BC$ και $A\,(B+C) = AB + AC$

Προσοχή όμως γιατί δεν ισχύει πάντα η αντιμεταθετική ιδιότητα $AB = BA$. Μάλιστα εκτός «εξαιρέσεων», ισχύει ότι

$$AB \neq BA$$

ενώ συχνά **οι διαστάσεις των μητρών είναι τέτοιες που δεν επιτρέπουν πολλαπλασιασμό μίας μήτρας και από αριστερά και από δεξιά**.

Για παράδειγμα αν έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

και

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε ορίζεται η πράξη του πολλαπλασιασμού

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 11 & 7 & 7 \\ 11 & 17 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

αλλά όχι η πράξη BA.

Γι'αυτό και κατά τον πολλαπλασιασμό μητρών (όταν είναι συμβιβαστός) αναφέρουμε τη φορά της πράξης π.χ., «πολλαπλασιάζουμε από αριστερά τη μήτρα A με τη μήτρα B, δηλαδή BA» ή «πολλαπλασιάζουμε από δεξιά τη μήτρα A με τη μήτρα B, δηλαδή AB».

Οι τετραγωνικές μήτρες μπορούν να υψωθούν σε ακέραιες δυνάμεις ως

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k \text{ φορές}}$$

ενώ $A^0 = \mathbf{I}$ και $A^1 = A$. Προσοχή διότι η δύναμη υπονοεί πολλαπλασιασμό και όχι ύψωση κάθε στοιχείου στον εκάστοτε εκθέτη. Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ τότε

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

13.4 Ανάστροφη μήτρα

Η ανάστροφη μίας $n \times k$ μήτρας A συμβολίζεται με A' και είναι μία $k \times n$ μήτρα της οποίας οι γραμμές αντιστοιχούν στις στήλες της A. Για παράδειγμα,

- αν $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ τότε $x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

- αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ τότε $A' = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$

- αν $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0.5 & 0 \\ 2 & 3 & b & c & 6 \\ 0 & 9 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ τότε $B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \\ -1 & b & 11 \\ 0.5 & c & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

- αν $\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{bmatrix}$ τότε $\Gamma' = \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \eta \\ \beta & \varepsilon & \theta \\ \gamma & \zeta & \iota \end{bmatrix}$

Για οποιεσδήποτε μήτρες A με διαστάσεις $n \times k$ και B με διαστάσεις $k \times m$, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες,

Ιδιότητα 1. $(A')' = A$

Ιδιότητα 2. $(A + B)' = A' + B'$

Ιδιότητα 3. $(AB)' = B'A'$

Ιδιότητα 4. οι μήτρες AA' και $A'A$ είναι συμμετρικές

Για συμμετρικές μήτρες ισχύει η ιδιότητα $A = A'$ ενώ για αντισυμμετρικές μήτρες ισχύει η ιδιότητα $A = -A'$. Σχετικά με τα δύο τελευταία είδη μητρών μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι αν A είναι τετραγωνική μήτρα τότε $A + A'$ είναι συμμετρική ενώ η $A - A'$ είναι αντισυμμετρική.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, τότε

$$A + A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix}$$

και

$$A - A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{bmatrix}$$

13.5 Γινόμενα Διανυσμάτων και μέτρα

Το **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων y, x (έκαστο με διάσταση $n \times 1$) ορίζεται ως

$$y'x = y_1x_1 + y_2x_2 + ... + y_nx_n = \sum_i^n y_ix_i$$

ή

$$x'y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_i^n x_iy_i$$

ενώ είναι εμφανές ότι $y'x = x'y$.

Επίσης

$$y'y = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = \sum_i^n y_i^2$$

Το **εξωτερικό τους γινόμενο** δίνει μία $n \times n$ μήτρα

$$yx' = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_nx_1 & y_nx_2 & \cdots & y_nx_n \end{bmatrix}$$

ή

$$yy' = \begin{bmatrix} y_1^2 & y_1y_2 & \cdots & y_1y_n \\ y_2y_1 & y_2^2 & \cdots & y_2y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_ny_1 & y_ny_2 & \cdots & y_n^2 \end{bmatrix}$$

Όταν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν, $x'y = 0$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα είναι **ορθογώνια** και γράφουμε $x \perp y$. Προσοχή όμως, όταν ο πολλαπλασιασμός δύο μητρών δώσει τη μηδενική μήτρα, $AB = \mathbf{0}$, δεν λέμε ότι οι μήτρες είναι ορθογώνιες.

Μία τετραγωνική $n \times n$ μήτρα A καλείται **ορθογώνια** αν και μόνο αν: $AA' = A'A = I_n$ (δηλαδή όταν $A' = A^{-1}$ όπου A^{-1} η αντίστροφη μήτρα της A, δείτε σε παρακάτω υποενότητα για τον ορισμό).

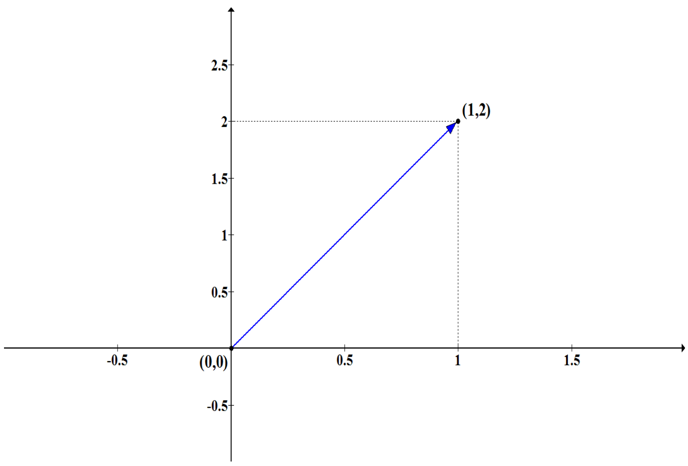
Το **Ευκλείδειο μέτρο ή μήκος ή νόρμα** ενός $n \times 1$ διανύσματος x συμβολίζεται $\|x\|_2$ και δίνεται από την απόλυτη τιμή της τετραγωνικής ρίζας του εσωτερικού του γινομένου,

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |x_i|^2} = \sqrt{x'x}$$

Το Ευκλείδειο μέτρο αποτελεί έναν από τους βασικούς τρόπους υπολογισμού του «μεγέθους» ενός διανύσματος. Η λέξη «μέγεθος» γράφτηκε με εισαγωγικά αφού δεν έχουμε εισάγει την γεωμετρική θεώρηση των διανυσμάτων. Εν συντομία, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα διάνυσμα με πραγματικά στοιχεία «προδίδει» τις συντεταγμένες ενός σημείου στο γνωστό καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Για παράδειγμα το 2×1 διάνυσμα $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ δίνεται οπτικά στο παρακάτω γράφημα με τη μορφή βέλους και το Ευκλείδειο μέτρο του ίσο με

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

δίνει την απόσταση του σημείου $(1, 2)$ από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$.



Γράφημα 13.1: Απόσταση σημείου από την αρχή των αξόνων

Το Ευκλείδειο μέτρο μπορεί να «οπτικοποιηθεί» και στη περίπτωση ενός διανύσματος 3×1 το οποίο παριστάνει τη θέση ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο. Για παράδειγμα το Ευκλείδειο μέτρο του διανύσματος

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

είναι ίσο με $\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$.

Το Ευκλείδειο μέτρο γενικεύεται σε

$$\|x\|_k = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^k\right)^{1/k}$$

για θετικούς ακέραιους $k \geq 1$ ενώ για $k=+\infty$ έχουμε το μέτρο

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(|x_i|\right)$$

Για παράδειγμα αν

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$\|x\|_1 = 6 \quad , \quad \|x\|_2 = \sqrt{14} \quad , \quad \|x\|_\infty = 3$$

Όλες οι παραπάνω **νόρμες** αποτελούν διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού του «μεγέθους» ενός διανύσματος.

13.6 Ίχνος μήτρας

Το ίχνος μίας τετραγωνικής $n\times n$ μήτρας A δίνεται από το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου της και συμβολίζεται με

$$tr\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Το ίχνος μήτρας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

Ιδιότητα ίχνους 1. $tr\,(AB) = tr\,(BA)$ εάν είναι δυνατός ο πολ/σμός

Ιδιότητα ίχνους 2. $tr\,(A + B) = tr\,(A) + tr\,(B)$

Ιδιότητα ίχνους 3. $tr\,(\lambda A) = \lambda tr\,(A)$ όπου λ βαθμωτό

Ιδιότητα ίχνους 4. $tr\,(A) = tr\,(A')$

Μερικές σημειώσεις για το ίχνος:

- Το ίχνος της μοναδιαίας μήτρας $\mathbf{I}_n$ δίνεται από τη διάστασή της, δηλαδή $tr\,(\mathbf{I}_n) = n$.
- Μία ενδιαφέρουσα αλγεβρική διάσταση του ίχνους για διανύσματα x με διάσταση $n \times 1$ είναι ότι $x'x = tr\,(xx')$.
- Αντίστοιχα, ορίζεται **η Frobenious νόρμα ή μέτρο (επέκταση του Ευκλείδειου μέτρου για διανύσματα σε μήτρες) μήτρας** A ως η ποσότητα

$$||A||_F = \sqrt{tr\,(A'A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|\alpha_{ij}|^2}$$

Εναλλακτικά ορίζονται και άλλες νόρμες, όπως η $1-$**νόρμα** μήτρας A διαστάσεων $n \times k$ ως το μέγιστο των αθροισμάτων των απόλυτων στοιχείων των στηλών της μήτρας

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq k}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}|$$

και η **απειροστική-νόρμα** ως το μέγιστο των αθροισμάτων των απόλυτων στοιχείων των γραμμών της μήτρας

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{k}|\alpha_{ij}|$$

13.7 Ορίζουσα μήτρας

Η ορίζουσα ορίζεται μόνο για τετραγωνικές μήτρες και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\det(A)$. Για μήτρες 1×1 η ορίζουσα είναι απλώς

$$|A| = |a_{1,1}| = a_{1,1}$$

Για μήτρες 2×2 η ορίζουσα δίνεται αναλυτικά από τον τύπο

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Γενικά, για $n \times n$ μήτρες ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \det(A(i|j)) \\ &\text{ή} \\ |A| &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} |A(i|j)| \end{aligned}$$

όπου $A(i|j)$ είναι η μήτρα που ορίζεται διαγράφοντας την i-οστή γραμμή και την j-οστή στήλη της A. Η ορίζουσα $\det(A(i|j))$ ή $|A(i|j)|$ ονομάζεται ελάσσονα ορίζουσα του i, j στοιχείου ενώ ο όρος $(-1)^{i+j} |A(i|j)|$ ονομάζεται αλγεβρικό συμπλήρωμα του i, j στοιχείου.

Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται και ανάπτυγμα της $|A|$ ως προς την i-οστή γραμμή. Διαπιστώνουμε ότι δεν έχει σημασία ποια γραμμή θα επιλέξουμε αρκεί να προσέξουμε τα πρόσημα $(-1)^{i+j}$ (επίσης μπορούμε να αναπτύξουμε ως προς τις στήλες). Για παράδειγμα, η ορίζουσα της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

δίνεται από

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= +(1)\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (12-45) + 2\,(-3-9) - 4\,(-5-4) = -33 - 24 + 36 = -21 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά το ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη ή την τρίτη γραμμή θα δώσει

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -(-1)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (9)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -21 \end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
&= +(1)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 54 \end{vmatrix} \\
&= -21
\end{aligned}
$$

Συνήθως, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα επιλέγουμε τη γραμμή (ή στήλη) που έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία αφού αυτό διευκολύνει σημαντικά τις αλγεβρικές πράξεις. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε την ορίζουσα της

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}
$$

τότε επιλέγουμε το ανάπτυγμα ως προς την δεύτερη γραμμή και

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -(5)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \\
&= -5(21+24) = -225
\end{aligned}
$$

Μερικές ιδιότητες της ορίζουσας μίας $n \times n$ μήτρας A είναι

Ιδιότητα ορίζουσας 1. $|A| = |A'|$

Ιδιότητα ορίζουσας 2. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ όπου λ βαθμωτό

Ιδιότητα ορίζουσας 3. $|AB| = \left|\underset{n\times n}{A}\right| \left|\underset{n\times n}{B}\right|$

Για τη μοναδιαία μήτρα ισχύει ότι $|\mathbf{I}_n| = 1$. Αν μία μήτρα A περιέχει τουλάχιστον μία γραμμή ή στήλη με μηδενικά τότε $|A| = 0$. Επίσης, ότι η ορίζουσα μίας διαγώνιας μήτρας δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Το ίδιο ισχύει και για τριγωνικές άνω ή κάτω μήτρες.

Τέλος, για σύνθετες μήτρες ισχύει

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{cases} |A - BD^{-1}C|\,|D| \text{ όταν η } D \text{ είναι αντιστρέψιμη} \\ |D - CA^{-1}B|\,|A| \text{ όταν η } A \text{ είναι αντιστρέψιμη} \end{cases}$$

Η έννοια της **αντιστρέψιμης μήτρας** (καθώς και της **αντίστροφης μήτρας**) αναλύεται αμέσως παρακάτω.

13.8 Γραμμική εξάρτηση και βαθμός μήτρας

Ένα σύνολο διανυσμάτων $x_1, ..., x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο όταν η εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \mathbf{0}$$

υπονοεί ότι όλοι οι συντελεστές λ_i είναι μηδέν. Δηλαδή δεν υπάρχουν μη μηδενικά λ_i τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \mathbf{0}$$

Σε αντίθετη περίπτωση τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Π.χ., τα διανύσματα x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = \mathbf{0}$$

αφού τότε μπορούμε να γράψουμε

$$x_1 = 2x_2 - 5x_3$$

ή

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_3$$

κ.ο.κ.

Έστω ότι A είναι μία $n \times k$ μήτρα. Ο **στηλοβαθμός** της μήτρας είναι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών της (και μπορεί να είναι το πολύ k) ενώ ο **γραμμοβαθμός** της μήτρας είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών (και μπορεί να είναι το πολύ ίσος με n). Μπορούμε να δείξουμε ότι ο στηλοβαθμός είναι ίσος με το γραμμοβαθμό άρα μιλάμε μόνο για το **βαθμό της μήτρας** ο οποίος συμβολίζεται με $r(A)$ και ικανοποιεί

$$r(A) \leq \min\{n, k\}$$

Όταν $r(A) = \min\{n, k\}$ τότε η μήτρα A είναι **πλήρους βαθμού**. Ισχύει ότι

$$r(A) = r(A') = r(A'A) = r(AA')$$

ενώ μία τετραγωνική $n \times n$ μήτρα με $r(A) = n$ ικανοποιεί $\det(A) \neq 0$ και αντίστροφα

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$$

Άρα αν η $n \times k$ μήτρα X με $n > k$ δεν είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή αν $r(X) < k$, τότε και $r(X'X) < k$ άρα $\det(X'X) = 0$ και η $X'X$ είναι μη αντιστρέψιμη.

- ο βαθμός αθροίσματος μητρών ικανοποιεί την ανισότητα $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- ο βαθμός της διαφοράς $r(A-B) \geq |r(A) - r(B)|$
- ενώ ο βαθμός του γινομένου δύο μητρών $r(AB) = \min\{r(A), r(B)\}$
- αν μία $n \times n$ μήτρα A έχει βαθμό $r(A) < n$ τότε υπάρχουν δύο $n \times m$ μήτρες B, C με βαθμό $r(B) = r(C) = m$ τέτοιες ώστε $A = BC'$

13.9 Αντίστροφη μήτρα

Η αντίστροφη μήτρα μίας τετραγωνικής $n \times n$ μήτρας A συμβολίζεται με A^{-1} και όταν υπάρχει ικανοποιεί τη σχέση

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}_n$$

Το i, j στοιχείο της αντίστροφης μήτρας A^{-1} δίνεται από

$$\left(A^{-1}\right)_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A(j|i))}{\det(A)}$$

όπου ο αριθμητής του κλάσματος

$$(-1)^{i+j} \det(A(j|i))$$

είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του j, i στοιχείου της μήτρας A. Είναι εμφανές ότι η αντίστροφη μήτρα υπάρχει όταν η ορίζουσα της μήτρας είναι μη μηδενική $\det(A) \neq 0$. Επίσης, όταν υπάρχει, η αντίστροφη μήτρα είναι μοναδική.

Για μία 2×2 μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

με μη μηδενική ορίζουσα

$$\det(A) = ad - cb \neq 0$$

η αντίστροφη δίνεται από τον τύπο,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{bmatrix}$$

- για παράδειγμα, αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ τότε $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
- για παράδειγμα, $B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ τότε $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{3\beta} \end{bmatrix}$
- για παράδειγμα, αν $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ τότε $\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Γενικά, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την αντίστροφη μίας $n \times n$ μήτρας A με $n \geq 3$ ακολουθούμε τον παρακάτω αλγόριθμο

- **βήμα 1:** δημιουργούμε τη **συμπαράγουσα μήτρα** (cofactor matrix) C, η οποία αποτελείται από τα αλγεβρικά συμπληρώματα όλων των στοιχείων της A,

- **βήμα 2:** στην συνέχεια αναστρέφουμε την συμπαράγουσα δημιουργώντας την **προσαρτημένη μήτρα** (adjoint matrix) $Adj\,(A) = C'$

- **βήμα 3:** τέλος, η αντίστροφη μήτρα A^{-1} της A δίνεται από την

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\,(A)$$

Για παράδειγμα, η αντίστροφη της 3×3 μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

δίνεται από

$$\text{Συμπαράγουσα:} \qquad C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -35 & 30 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Προσαρτημένη (ανάστροφη συμπαράγουσας):}\ Adj\,(A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -35 & -5 & 15 \\ 30 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ορίζουσα:}\ \ |A| = 20$$

άρα

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -35 & -5 & 15 \\ 30 & 2 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Βεβαιωθείτε ότι $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbf{I}_3$.

Μερικές ιδιότητες της αντίστροφης μήτρας και της αντιστροφής μητρών είναι οι εξής,

Ιδιότητα 1. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

Ιδιότητα 2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Ιδιότητα 3. $(A+B)^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}B^{-1}$

Ιδιότητα 4. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

όπου όλες οι αντίστροφες μήτρες πρέπει να υπάρχουν. Οι μήτρες των οποίων υπάρχει η αντίστροφη ονομάζονται **αντιστρέψιμες ή μη ιδιάζουσες**, ενώ μήτρες που δεν έχουν αντίστροφη ονομάζονται **μη αντιστρέψιμες ή ιδιάζουσες**.

Είναι εμφανές, ότι η αντίστροφη μίας διαγώνιας μήτρας δίνεται από

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{2,2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{bmatrix}$$

Για την «κατάλληλα» διαμερισμένη μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

με τις A_{11} και A_{22} αντιστρέψιμες ισχύουν οι παρακάτω τύποι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}F_2A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}F_2 \\ -F_2A_{21}A_{11}^{-1} & F_2 \end{bmatrix}$$

όπου

$$F_2 = \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1}$$

όταν υπάρχει η αντίστροφη της μήτρας

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

ή

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} F_1 & -F_1A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}F_1 & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}F_1A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

όπου

$$F_1 = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}$$

όταν υπάρχει η αντίστροφη της μήτρας

$$A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

Οι παραπάνω τύποι «μειώνονται» σημαντικά όταν η A_{12} και/ή η A_{21} είναι μηδενικές. Για παράδειγμα, η αντίστροφη της σύνθετης μήτρας

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

δίνεται από

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -B_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} & B_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, αν η $n \times n$ μήτρα A είναι αντιστρέψιμη με u και v να είναι $n \times 1$ διανύσματα τότε

$$(A + uv')^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u}$$

Τέλος, ακόμα και όταν δεν υπάρχει η αντίστροφη μήτρα A^{-1} ορίζεται η **Moore-Penrose γενικευμένη αντίστροφη** A^{+}, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

- $AA^{+}A = A$
- $A^{+}AA^{+} = A^{+}$

ενώ οι $AA^{+}A$ και $A^{+}AA^{+}$ είναι συμμετρικές. Η Moore-Penrose γενικευμένη αντίστροφη A^{+} ορίζεται και είναι μοναδική για κάθε μήτρα.

13.10 Ταυτοδύναμες μήτρες

Μία τετραγωνική μήτρα M που ικανοποιεί την ιδιότητα

$$MM = M^2 = M$$

ονομάζεται **ταυτοδύναμη** ή **εκθετικά αναλλοίωτη**.

Για παράδειγμα, η παρακάτω μήτρα δίνει $AA = A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ή η παρακάτω μήτρα που επίσης δίνει $BB = B$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Μία **συμμετρική ταυτοδύναμη** μήτρα έχει την επιπλέον ιδιότητα

$$MM' = M'M = M$$

Για παράδειγμα, έστω η μήτρα M με τύπο

$$M = \mathbf{I}_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'$$

όπου X είναι μία $n \times k$ μήτρα με $k < n$ και τέτοια ώστε η αντίστροφη $\left(X'X\right)^{-1}$ υπάρχει (δηλαδή $r\left(X\right) = k$, ο βαθμός της μήτρας X είναι ίσος με k).

Τότε, η μήτρα M είναι ταυτοδύναμη αφού

$$\begin{aligned}
MM &= \left(\mathbf{I}_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\left(\mathbf{I}_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right) \\
&= \mathbf{I}_n\mathbf{I}_n - 2X\left(X'X\right)^{-1}X' + X\left(X'X\right)^{-1}X'X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= \mathbf{I}_n - 2X\left(X'X\right)^{-1}X' + X\left(X'X\right)^{-1}\underbrace{X'X\left(X'X\right)^{-1}}_{\mathbf{I}_k}X' \\
&= \mathbf{I}_n - 2X\left(X'X\right)^{-1}X' + X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= \mathbf{I}_n - X\left(X'X\right)^{-1}X' = M
\end{aligned}$$

Παρομοίως, μία μήτρα της μορφής (καλείται και μήτρα προβολής)

$$H = X\left(X'X\right)^{-1}X'$$

είναι ταυτοδύναμη αφού

$$HH = X\left(X'X\right)^{-1}\underbrace{X'X\left(X'X\right)^{-1}}_{\mathbf{I}_k}X' = X\left(X'X\right)^{-1}X' = H$$

Τέλος, μία ακόμη ταυτοδύναμη μήτρα που θα συναντήσουμε (διάσημη στην Οικονομετρία) είναι η

$$N = I_n - \frac{1}{n}\mathbf{i}\mathbf{i}'$$

ή ισοδύναμα

$$N = I_n - \mathbf{i}\left(\mathbf{i}'\mathbf{i}\right)^{-1}\mathbf{i}'$$

όπου $\mathbf{i}$ ένα $n \times 1$ διάνυσμα με κάθε στοιχείο του ίσο με τη μονάδα. Παρατηρήστε ότι η συγκεκριμένη μήτρα έχει στοιχεία επί της κύριας διαγωνίου ίσα με $1 - \frac{1}{n}$ και εκτός διαγωνίου ίσα με $-\frac{1}{n}$ και αν πολλαπλασιαστεί με ένα $n \times 1$ διάνυσμα

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

τότε «αφαιρεί» από κάθε στοιχείο του διανύσματος τον αριθμητικό μέσο $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ δηλαδή

$$Ny = y - \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}$$

Παρομοίως, αν η N πολλαπλασιαστεί με μία $n \times k$ μήτρα X τότε αφαιρεί τον αριθμητικό μέσο κάθε στήλης της μήτρας X από την αντίστοιχη στήλη.

Όλες οι ταυτοδύναμες $n \times n$ μήτρες, έστω M, έχουν βαθμό ίσο με το ίχνος τους, δηλαδή $r(M) = tr(M)$. **Η μοναδική (συμμετρική και) ταυτοδύναμη μήτρα πλήρους βαθμού είναι η μοναδιαία μήτρα** αφού όλες οι ταυτοδύναμες μήτρες εκτός της μοναδιαίας είναι ιδιάζουσες, άρα - πλην της μοναδιαίας - $r(M) = tr(M) < n$.

Για παράδειγμα, η $n \times n$ μήτρα

$$M = \left(\mathbf{I}_n - X\left(X'X\right)^{-1} X'\right)$$

έχει βαθμό $r(M) = n - k$ αφού υιοθετώντας τις ιδιότητες του ίχνους έχουμε

$$\begin{aligned} tr(M) &= tr\left(\mathbf{I}_n - X(X'X)^{-1}X'\right) \\ &= tr(\mathbf{I}_n) - tr\left(X(X'X)^{-1}X'\right) \\ &= n - tr\left((X'X)^{-1}X'X\right) \\ &= n - tr(\mathbf{I}_k) \\ &= n - k \end{aligned}$$

13.11 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Για μία $n \times n$ τετραγωνική μήτρα A, η επίλυση της παρακάτω εξίσωσης που ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** (είναι μία εξίσωση n βαθμού)

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = 0 \text{ δηλαδή } |A - \lambda \mathbf{I}_n| = 0$$

αποδίδει το πολύ n ρίζες οι οποίες συμβολίζονται με $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ και ονομάζονται **ιδιοτιμές ή χαρακτηριστικές τιμές ή χαρακτηριστικές ρίζες**[2] της μήτρας A. Οι ρίζες μπορεί να είναι πραγματικές ή μιγαδικές και επίσης μπορεί να έχουμε πολλαπλές (μη μοναδικές) ιδιοτιμές αφού μπορεί $\lambda_i = \lambda_j$ για κάποια i, j.

Για παράδειγμα, οι ιδιοτιμές της μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

[2] Eigenvalues

είναι μοναδικές αφού η χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A - \lambda \mathbf{I}_n| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 1 & \beta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(\beta-\lambda) = 0$$

έχει δύο λύσεις (χαρακτηριστικές ρίζες), τις $\lambda_1 = a, \lambda_2 = \beta$ ενώ για τη μήτρα

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

οι ιδιοτιμές είναι μοναδικές αλλά μιγαδικές αφού η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$(2-\lambda)(1-\lambda) + 24 = \lambda^2 - 3\lambda + 26 = 0$$

δίνει ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{95}$$

όπου $i = \sqrt{-1}$.

Για κάθε μία ιδιοτιμή υπάρχει ένα μη μηδενικό και πιθανώς μιγαδικό διάνυσμα v_i που ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα ή χαρακτηριστικό διάνυσμα**[3] τέτοιο ώστε

$$(A - \lambda_i \mathbf{I}_n) v_i = 0 \text{ ή εναλλακτικά } A v_i = \lambda_i v_i$$

[3] Eigenvector

Για παράδειγμα, για τη μη ιδιάζουσα μήτρα $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ έχουμε

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Λύνοντας το πρώτο σύστημα εξισώσεων, υπολογίζουμε τα στοιχεία του πρώτου ιδιοδιανύσματος v_1 και λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} av_{11} = av_{11} \\ v_{11} + \beta v_{12} = av_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} v_{11} = v_{11} \\ v_{12} = \frac{v_{11}}{a-\beta} \end{array}$$

Λύνοντας το δεύτερο σύστημα εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} av_{21} = \beta v_{21} \\ v_{21} + \beta v_{22} = \beta v_{22} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} v_{21} = 0 \\ v_{22} = v_{22} \end{array}$$

Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει μία μοναδική λύση και θα χρειαστεί να βασιστούμε σε υποθέσεις (τυποποιήσεις) για ένα εκ των δύο στοιχείων σε κάθε διάνυσμα. Ορισμένα υπολογιστικά προγράμματα θέτουν $v_{11} = 1$ άρα $v_{12} = \frac{1}{a-\beta}$ και αντίστοιχα $v_{22} = 1$ και $v_{21} = 0$.

Στην οικονομετρική πρακτική συνηθίζεται να επιβάλλουμε μοναδιαίο μήκος στα ιδιοδιανύσματα δηλαδή τα τυποποιούμε έτσι ώστε $v_i'v_i = 1$. Με αυτή την επιπλέον εξίσωση, $v_{11}^2 + v_{12}^2 = 1$ και $v_{21}^2 + v_{22}^2 = 1$, καταλήγουμε στα ιδιοδιανύσματα

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{a-\beta}{\sqrt{(a-\beta)^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{(a-\beta)^2+1}} \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση που η $n \times n$ μήτρα A είναι συμμετρική ισχύει επιπλέον ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια, δηλαδή $v_i' v_j = 0$, άρα τοποθετώντας τα διανύσματα ως στήλες σε μία μήτρα

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι

$$V'V = VV' = \mathbf{I}_n$$

και $V^{-1} = V'$.

Μία συμμετρική μήτρα έχει ιδιοτιμές οι οποίες είναι πραγματικές και μοναδικές. Επιπλέον τοποθετώντας τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο μίας μήτρας

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι $AV = V\Lambda$. Οπότε για συμμετρικές μήτρες A ισχύει ότι

$$AV = V\Lambda \Leftrightarrow AVV' = V\Lambda V' \Leftrightarrow A = V\Lambda V'$$

Ο διαχωρισμός $A = V\Lambda V'$ ονομάζεται **φασματικός διαχωρισμός (spectral decomposition)** της συμμετρικής μήτρας A. Επιπλέον γράφοντας $B = V\Lambda^{1/2}$ έχουμε $A = BB'$. Η **διαγωνοποίηση** της συμμετρικής μήτρας A δίνεται από την μήτρα Λ ως $V'AV = \Lambda$.

Αν η τετραγωνική μήτρα A δεν είναι συμμετρική αλλά έχει μοναδικές ιδιοτιμές τότε υπάρχει μία αντιστρέψιμη μήτρα P τέτοια ώστε

$$A = P^{-1}\Lambda P \text{ και } \; PAP^{-1} = \Lambda$$

Η ορίζουσα μίας $n \times \times n$ τετραγωνικής μήτρας A δίνεται από το γινόμενο των ιδιοτιμών της

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ενώ το ίχνος της είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών

$$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Άρα μία τετραγωνική μήτρα είναι αντιστρέψιμη όταν όλες οι ιδιοτιμές της είναι μη μηδενικές.

Τέλος, αν

$$A^k = \prod_{i=1}^{k} A = A \times A \times ... \times A$$

τότε

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = \mathbf{0}_{n \times n}$$

όταν όλες οι ιδιοτιμές βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή όταν $|\lambda_i| < 1$, $\forall i$.

13.12 Βαθμός μήτρας και ιδιοτιμές

Η εύρεση των ιδιοτιμών μπορεί να μας βοηθήσει εξαιρετικά στην εύρεση του βαθμού οποιασδήποτε $n \times k$ μήτρας A. Αναλυτικά, ο βαθμός μίας συμμετρικής μήτρας A δίνεται από το βαθμό της μήτρας ιδιοτιμών της δηλαδή $r(A) = r(\Lambda)$. Επειδή η Λ είναι διαγώνια, ο βαθμός της είναι ίσος με τον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων της επί της διαγωνίου (δηλαδή τον αριθμό των μη μηδενικών ιδιοτιμών). Επιπλέον, επειδή για οποιαδήποτε $n \times k$ μήτρα A, η μήτρα $A'A$ είναι συμμετρική με $r(A) = r(A'A)$, συνεπάγεται ότι ο βαθμός $r(A)$ της A είναι ίσος με τις μη μηδενικές ιδιοτιμές της μήτρας $A'A$.

13.13 Τετραγωνικές μορφές, θετικά ορισμένες μήτρες και σύγκριση μητρών

Εάν A είναι μία μήτρα $n \times n$ και $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα τότε η έκφραση $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ είναι γνωστή ως τετραγωνική μορφή. Συχνά είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε αν η τιμή $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ είναι θετική, μη αρνητική, αρνητική ή μη θετική ασχέτως των τιμών των στοιχείων του $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

- Όταν $\mathbf{x}'A\mathbf{x} > \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε η μήτρα A λέγεται θετικά ορισμένη, ΘΟ.
- Όταν $\mathbf{x}'A\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε η μήτρα A λέγεται θετικά ημιορισμένη, ΘΗΟ.
- Όταν $\mathbf{x}'A\mathbf{x} < \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε η μήτρα A λέγεται αρνητικά ορισμένη, ΑΟ.

- Όταν $\mathbf{x}'A\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε η μήτρα A λέγεται αρνητικά ημιορισμένη, ΑΗΟ.

Τα στοιχεία που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο μίας ΘΟ μήτρας είναι όλα θετικά ενώ σε μία ΘΗΟ μήτρας είναι όλα μη αρνητικά. Αντίστοιχα σε ΑΟ και ΑΗΟ μήτρες τα στοιχεία επί της διαγωνίου είναι είτε όλα αρνητικά είτε όλα μη θετικά.

- **Συμμετρικές ΘΟ μήτρες έχουν μοναδικές, πραγματικές και θετικές ιδιοτιμές**
- Για οποιαδήποτε $n \times k$ μήτρα X, η $X'X$ είναι ΘΗΟ ενώ είναι ΘΟ όταν $r(X) = k$. Επίσης, η XX' είναι ΘΗΟ ενώ είναι ΘΟ όταν $r(X) = n$.
- Αν η A είναι μία ΘΟ $n \times n$ μήτρα τότε $r(A) = n$, $|A| \neq 0$, η A^{-1} υπάρχει και είναι ΘΟ.
- Αν $A = B + C$ με την B ΘΟ και την C ΘΗΟ τότε η A είναι ΘΟ ενώ η $B^{-1} = A^{-1}$ υπάρχει και είναι ΘΟ.

Στην οικονομετρία συχνά χρειάζεται να «συγκρίνουμε» τα στοιχεία των διαγωνίων δύο μητρών, δηλαδή να αποφανθούμε αν τα στοιχεία της διαγωνίου της A είναι όλα «μεγαλύτερα» αυτών της B. Αρχικά, οι μήτρες θα πρέπει να έχουν την ίδια διάσταση. Τότε βασιζόμαστε στην ποσότητα

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x} - \mathbf{x}'B\mathbf{x} = \mathbf{x}'(A - B)\mathbf{x}$$

για $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και στο κατά πόσο αυτή είναι θετική, μη αρνητική κτλ για να συγκρίνουμε τις μήτρες (τις διαγωνίους). Για παράδειγμα, όταν $A - B$ είναι ΘΟ μήτρα γράφουμε

$A-B>0$ ή $A>B$. Τέλος να σημειώσουμε την ιδιότητα

$$A>B \Leftrightarrow B^{-1}>A^{-1}$$

13.14 Διαφορικός λογισμός μητρών

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε σύντομα μερικούς κανόνες παραγώγισης γραμμικών $\alpha'\mathbf{x}$ και τετραγωνικών μορφών $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ ως προς το $n\times 1$ διάνυσμα $\mathbf{x}$ όπου α είναι ένα $n\times 1$ διάνυσμα και A μία τετραγωνική $n\times n$ μήτρα. Η γραμμική μορφή $\alpha'\mathbf{x}$ είναι μία γραμμική πολυμεταβλητή συνάρτηση

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\alpha'\mathbf{x}=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$$

ενώ η μορφή $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ είναι μία πολυμεταβλητή πολυωνυμική συνάρτηση δεύτερου βαθμού.

Για παράδειγμα, αν η A είναι 2×2 τότε

$$\begin{aligned}
f\left(x_1,x_2\right) &= a_{11}x_1^2+a_{21}x_2x_1+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\\
&= \mathbf{x}'A\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Τέλος, αν A είναι μία $m\times n$ μήτρα τότε $A\mathbf{x}$ συμβολίζει ένα m-διάστατο σύστημα πολυμεταβλητών συναρτήσεων.

Ισχύουν οι παρακάτω κανόνες,

(A) $\frac{\partial\alpha'\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}}=\frac{\partial\mathbf{x}'\alpha}{\partial\mathbf{x}}=\alpha$

(B) $\frac{\partial A\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}}=A'$, $\frac{\partial A\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}'}=A$

(Γ) $\frac{\partial \mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = A\mathbf{x} + A'\mathbf{x}$

(Δ) $\frac{\partial^2 \mathbf{x}' A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \left(A\mathbf{x} + A'\mathbf{x} \right) = A + A'$

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την παρακάτω έκφραση

$$S_\Omega\left(\hat{\beta}\right) = \left(y - X\hat{\beta}\right)' \Omega^{-1} \left(y - X\hat{\beta}\right)$$

ως προς το $k \times 1$ διάνυσμα $\hat{\beta}$, όπου y είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα, X είναι μία $n \times k$ μήτρα πλήρους βαθμού $r\left(X\right) = k$ και Ω είναι μία συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα. Για την εύρεση και βεβαίωση ενός τοπικού ελάχιστου, πρέπει να βρούμε το $\hat{\beta}_*$ που ικανοποιεί τις συνθήκες πρώτης τάξης για ελάχιστο, δηλαδή να θέσουμε

$$\frac{\partial S_\Omega\left(\hat{\beta}\right)}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

και να λύσουμε ως προς $\hat{\beta}$. Στη συνέχεια πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες δεύτερης τάξης για ελάχιστο

$$\left. \frac{\partial^2 S_\Omega\left(\hat{\beta}\right)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}'} \right|_{\hat{\beta} = \hat{\beta}_*} > 0$$

δηλαδή η μήτρα δεύτερων παραγώγων

$$\frac{\partial^2 S_\Omega\left(\hat{\beta}\right)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}'}$$

πρέπει να είναι θετικά ορισμένη όταν υπολογιστεί στο $\hat{\beta}_*$.

Έχουμε,

$$\begin{aligned} S_\Omega\left(\hat{\beta}\right) &= y'\Omega^{-1}y - y'\Omega^{-1}X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'\Omega^{-1}y + \hat{\beta}'X'\Omega^{-1}X\hat{\beta} \\ &= y'\Omega^{-1}y - 2y'\Omega^{-1}X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'\Omega^{-1}X\hat{\beta} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_\Omega\left(\hat{\beta}\right)}{\partial\hat{\beta}} &= -2X'\Omega^{-1}y + 2\left(X'\Omega^{-1}X\right)\hat{\beta} = 0 \\ &\Rightarrow \left(X'\Omega^{-1}X\right)\hat{\beta} = X'\Omega^{-1}y \\ &\Rightarrow \hat{\beta}_* = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}y \end{aligned}$$

όπου η τελευταία «συνεπαγωγή» ισχύει μόνο όταν η μητρα $X'\Omega^{-1}X$ είναι αντιστρέψιμη. Στη συνέχεια,

$$\frac{\partial^2 S_\Omega\left(\hat{\beta}\right)}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}'} = 2X'\Omega^{-1}X > 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\hat{\beta}$, άρα και για το $\hat{\beta}_*$, όταν η μήτρα X είναι πλήρους βαθμού.

Οπότε

$$\hat{\beta}_* = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}y$$

είναι η απάντηση στο πρόβλημα $\min\limits_{\hat{\beta}} S_\Omega\left(\hat{\beta}\right)$.