ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ-ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 2^{O}

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ-ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ CAUSS-JORDAN-ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ CRAMER

Άσκηση 1

Έστω οι πίνακες Α=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, Β=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$, Γ=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 8 & -9 & 7 \end{bmatrix}$ και Δ=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας των παραπάνω πινάκων.

Αν η ορίζουσα του |Α|= a × d-c × d≠0 τότε ο αντίστροφός της δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

- $A^{-1}=\frac{1}{\mathrm{a \times d - c \times d}}\begin{bmatrix} \frac{d}{\mathrm{a \times d - c \times d}} & \frac{-b}{\mathrm{a \times d - c \times d}} \\ \frac{-c}{\mathrm{a \times d - c \times d}} & \frac{a}{\mathrm{a \times d - c \times d}} \end{bmatrix}$

- Β=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$=> |Β|= $-12-(-4)=-8$≠0=>

=> $B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-6}{-8} & \frac{-1}{-8} \\ \frac{4}{-8} & \frac{2}{-8} \end{bmatrix}$=> $B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

- Γ=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 8 & -9 & 7 \end{bmatrix}$ =>|Γ| ή det (Γ) = 1×$(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$+0×

$(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$+8×$(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$$= 35-81-320=-366$≠0 Άρα ∃ Γ^{-1}

Η συμπαράγουσα C είναι η παρακάτω μήτρα

$$C=\begin{bmatrix} -(1)^{1+1}\begin{bmatrix}5 & -9\\ -9 & 7\end{bmatrix} & -(1)^{1+2}\begin{bmatrix}0 & -9\\ 8 & 7\end{bmatrix} & -(1)^{1+3}\begin{bmatrix}0 & 5\\ 8 & -9\end{bmatrix}\\ -(1)^{2+1}\begin{bmatrix}0 & 8\\ -9 & 7\end{bmatrix} & -(1)^{2+2}\begin{bmatrix}1 & 8\\ 8 & 7\end{bmatrix} & -(1)^{2+3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & -9\end{bmatrix}\\ -(1)^{3+1}\begin{bmatrix}0 & 8\\ 5 & -9\end{bmatrix} & -(1)^{3+2}\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & -9\end{bmatrix} & -(1)^{3+3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-46 & -72 & 8\\ -72 & -57 & 9\\ -40 & 9 & 5\end{bmatrix}$$

Η προσαρτημένη, ανάστροφη της συμπαράγουσας C και είναι η C’= $\begin{bmatrix}-46 & -72 & 8\\ -72 & -57 & 9\\ -40 & 9 & 5\end{bmatrix}$

$$\Gamma^{-1}=\frac{1}{-366}C'=\frac{1}{-366}\begin{bmatrix}-46 & -72 & 8\\ -72 & -57 & 9\\ -40 & 9 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-46}{-366} & \frac{-72}{-366} & -\frac{8}{366}\\ \frac{-72}{-366} & \frac{-57}{-366} & -\frac{9}{366}\\ \frac{-40}{-366} & -\frac{9}{366} & -\frac{5}{366}\end{bmatrix}$$

- $\Delta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ =>|Δ| ή det (Δ)= $0\times(-1)^{2+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+1\times$

$(-1)^{2+2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+0\times(-1)^{2+3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}=1\times(1-(-1))=1+1=2\neq0$ Άρα ∃ Δ^{-1}

Η συμπαράγουσα C είναι η παρακάτω μήτρα

$$C=\begin{bmatrix} -(1)^{1+1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & -(1)^{1+2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} & -(1)^{1+3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\\ -(1)^{2+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} & -(1)^{2+2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} & -(1)^{2+3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\\ -(1)^{3+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} & -(1)^{3+2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} & -(1)^{3+3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Η προσαρτημένη, ανάστροφη της συμπαράγουσας C και είναι η C’= $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$$\Delta^{-1}=\frac{1}{2}C'=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

Έστω τα συστήματα εξισώσεων:

A) $2x_1+x_2-3x_3=1$

$5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5$
$3x_1 - x_2 - 4x_3 = 7$

B) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6$
$-x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10$

Να λυθούν τα παραπάνω συστήματα με την μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan.

A)

- Εύρεση κλιμακωτού πίνακα

(A|b)= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -6 & 5 \\ 3 & -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \xRightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & -6 & 5 \\ 3 & -1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

$\xRightarrow{R_2-5R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_3-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \xRightarrow{-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$

$\xRightarrow{-\frac{2}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \end{bmatrix} \xRightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{5} & -\frac{14}{5} \end{bmatrix} \xRightarrow{-\frac{5}{14}R_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

=>$1\times x_3=1$

Άρα $x_2 - 3x_3 = -5 \Rightarrow x_2 = -2$

$x_1 + \frac{1}{2}(-2) - \frac{3}{2}(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 3$

- Εύρεση ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_1-\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_2+3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Άρα η λύση δίνεται από $\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

B)

(A|b)= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 6 \\ -1 & -4 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xRightarrow{-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 13 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 13 \end{bmatrix}$

$-7x_3=13 \Rightarrow x_3=-{}^{13}/_{7}$

$x_2-5x_3= 0 \Rightarrow x_2=-{}^{65}/_{7}$

$x_1+2x_2+x_3=3 \Rightarrow x_3={}^{164}/_{7}$

Άσκηση 3

Έστω τα συστήματα εξισώσεων:

A)$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$

$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$

$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$

<u>**Βήμα 1ο:** Υπολογίζω την ορίζουσα του πίνακα:</u> A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$=>|A| ή det (A)= 2× $(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$+1× $(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$+(-1) ×

$(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}= 2 \times (-6-8) - (9-2) - (12-(-2)1) = -28-7-14 = -49$

<u>**Βήμα 2ο:**Υπολογίζω τις επιμέρους ορίζουσες:</u>

Dx$_1$=$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ =>|Dx$_1$| ή det (Dx$_1$) = 4× $(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$+1× $(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$+ (-1)×$(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}= 4 \times (-6-8) - (30-12) - (40+12) = -56-18-52 = -126$

Dx$_2$=$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ =>|Dx$_2$| ή det (Dx$_2$) = 2× $(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$+1× $(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$+(-1) ×

$(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}= 2 \times (30-12) - 4 \times (9-2) - (18-10) = 36-28-8 = 0$

Dx$_3$=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 10 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ =>|Dx$_3$| ή det (Dx$_3$) = 2× $(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$+1× $(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$+ (-

1)×(-1)$^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}= 2 \times (-12-40) - 1(18-10) + 4(12+2) = -104 - 8 + 56 = -56$

Βήμα 3ο:Εφαρμόζουμε τον τύπο $x_i = {detDx_i}/{detA}$ για να υπολογίσουμε τις λύσεις:

$x_1 = {-126}/{-49} = {18}/{7}$

$x_2 = {0}/{-49}$

$x_3 = {-56}/{-49} = {8}/{7}$

B) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$

$-x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 8$

Βήμα 1ο: Υπολογίζω την ορίζουσα του πίνακα: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$=>|A| ή det (A)= 1× (-1)$^{1+1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$+2× (-1)$^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$+(1)× (-1)$^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}= (6+6) - 2(4-1) + (-12+4) = 12 - 6 - 7 = -1$

Βήμα 2ο:Υπολογίζω τις επιμέρους ορίζουσες:

$Dx_1=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ =>|Dx1| ή det (Dx1) = 2× (-1)$^{1+1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$+2× (-1)$^{1+2}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$+ (-1)×(-1)$^{1+3}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}= 2 \times (6-6) - 2(12+8) + (-36-24) = -40 - 60 = -100$

$Dx_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ =>|Dx2| ή det (Dx2) = 1× (-1)$^{1+1}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$+2× (-1)$^{1+2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$+ (1)×(-1)$^{1+3}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}= 4 - 2 \times (4-1) + (16-6) = 4 - 6 + 10 = 8$

$Dx_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ =>|Dx_3| ή det (Dx_3) = 1× $(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$+2× $(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$+

(2)×$(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$= 24 + 36 - (16 + 6) + 2(-12 + 3) = 60 - 22 - 18 = 20$

<u>**Βήμα 3º:**Εφαρμόζουμε τον τύπο</u> $x_i=\left.detDx_i\middle/detA\right.$ <u>για να υπολογίσουμε τις λύσεις:</u>

$x_1= {-100}/{-1}$=100

$x_2= 8/_{-8} = -8$

$x_3= 20/_{-1}=-20$