Αξιολόγηση Επενδύσεων

Διάλεξη για την Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου

Δράκος και Καραθανάσης Κεφάλαιο 17

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Συνάρτηση Χρησιμότητας

- Ας υποθέσουμε ένα χαρτοφυλάκιο p με αναμενόμενη απόδοση Ε $\left(\mathrm{R}_{p}\right)$, και κίνδυνο= σ_{p}.
- Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της προσδοκώμενης χρησιμότητας ότι εάν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι δευτεροβάθμια ως προς τον πλούτο, τότε μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση του αναμενόμενου πλούτου και της διακύμανσης του(E[u(W)]=F(E[W],var[w])) όπου u(W) είναι η συνάρτηση χρησιμότητας και F είναι μια συνάρτηση που μένει να καθοριστεί
- Επίσης, το γεγονός ότι ο πλούτος συνδέεται με την ποσότητα του περιουσιακού στοιχείου και την απόδοση του συνεπώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις καμπύλες αδιαφορίας για ένα επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο και επιθυμεί την αναμενόμενη απόδοση

Συνάρτηση Χρησιμότητας (συνέχεια)

- Για το χαρτοφυλάκιο p με E(R_p) $=$ αναμενόμενη απόδοση, σ_p = κίνδυνος
  - U($\mathrm{E}(R_p)$, σ_p)=επίπεδο χρησιμότητας(ευημερίας) του επενδυτή που αντλεί από το χαρτοφυλάκιο p (όπου U παίζει το ρόλο της F).
- Το χαρτοφυλάκιο q θεωρείται καλύτερο από το χαρτοφυλάκιο p
  - U($\mathrm{E}(R_q)$, σ_q)>U($\mathrm{E}(R_p)$, σ_p)
- Έστω η παρακάτω συνάρτηση χρησιμότητας:
  - U($\mathrm{E}(R_p)$, σ_p)= $\mathrm{E}(R_p)$ - 0.5Aσ_p^2

Καμπύλες Αδιαφορίας

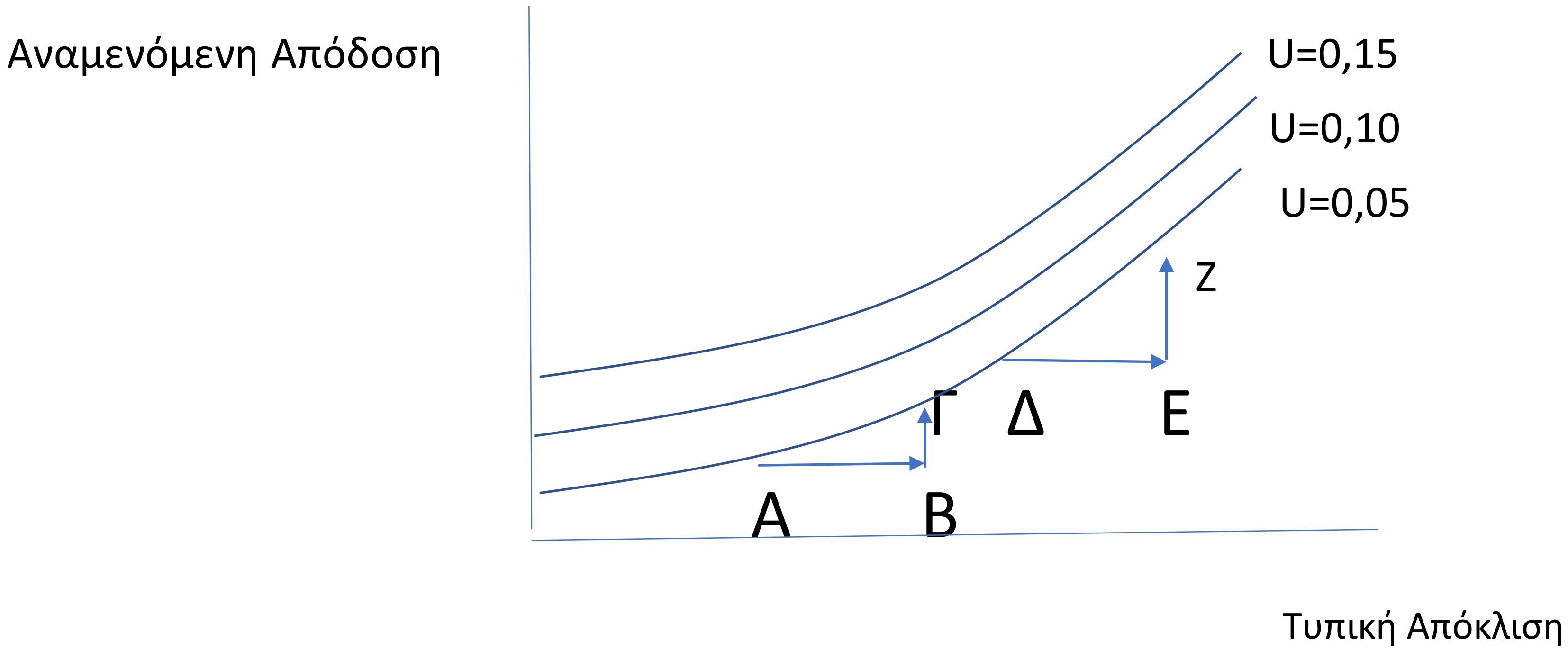
- Οι καμπύλες αδιαφορίας συλλέγουν όλα τα χαρτοφυλάκια με το ίδιο επίπεδο χρησιμότητας
  - U($\mathrm{E}(R_p)$, σ_p)=σταθερό
- Οι επενδυτές επιθυμούν το $\mathrm{E}(R_p)$ ενώ αποστρέφονται το σ_p
  - Οι καμπύλες αδιαφορίας κινούνται προς τα πάνω και δεξιά στο διάγραμμα $\mathrm{E}(R_p)$, σ_p όταν αυξάνεται η χρησιμότητα του επενδυτή που αντλεί από τα χαρτοφυλάκια για δεδομένα επίπεδα κινδύνου
- Οι επενδυτές αποστρέφονται τον κίνδυνο:
  - Σε ένα μεγαλύτερο επίπεδο κινδύνου, η ίδια αύξηση κινδύνου (σε σχέση με ένα μικρότερο επίπεδο κινδύνου) πρέπει να συνδυαστεί με μια μεγαλύτερη αύξηση στην αναμενόμενη απόδοση για να διατηρηθεί το αρχικό επίπεδο χρησιμότητας
  - Οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κυρτές στο διάγραμμα $\mathrm{E}(R_p)$, σ_p

Παραδείγματα Καμπυλών Αδιαφορίας

Καμπύλες Αδιαφορίας οι οποίες προκύπτουν από μια συνάρτηση χρησιμότητας που μπορεί να παρουσιαστεί ως πολυώνυμο 2ου βαθμού με A=6

[Διάγραμμα 8.1]

Παραδείγματα Καμπυλών Αδιαφορίας - Διάγραμμα 8.1

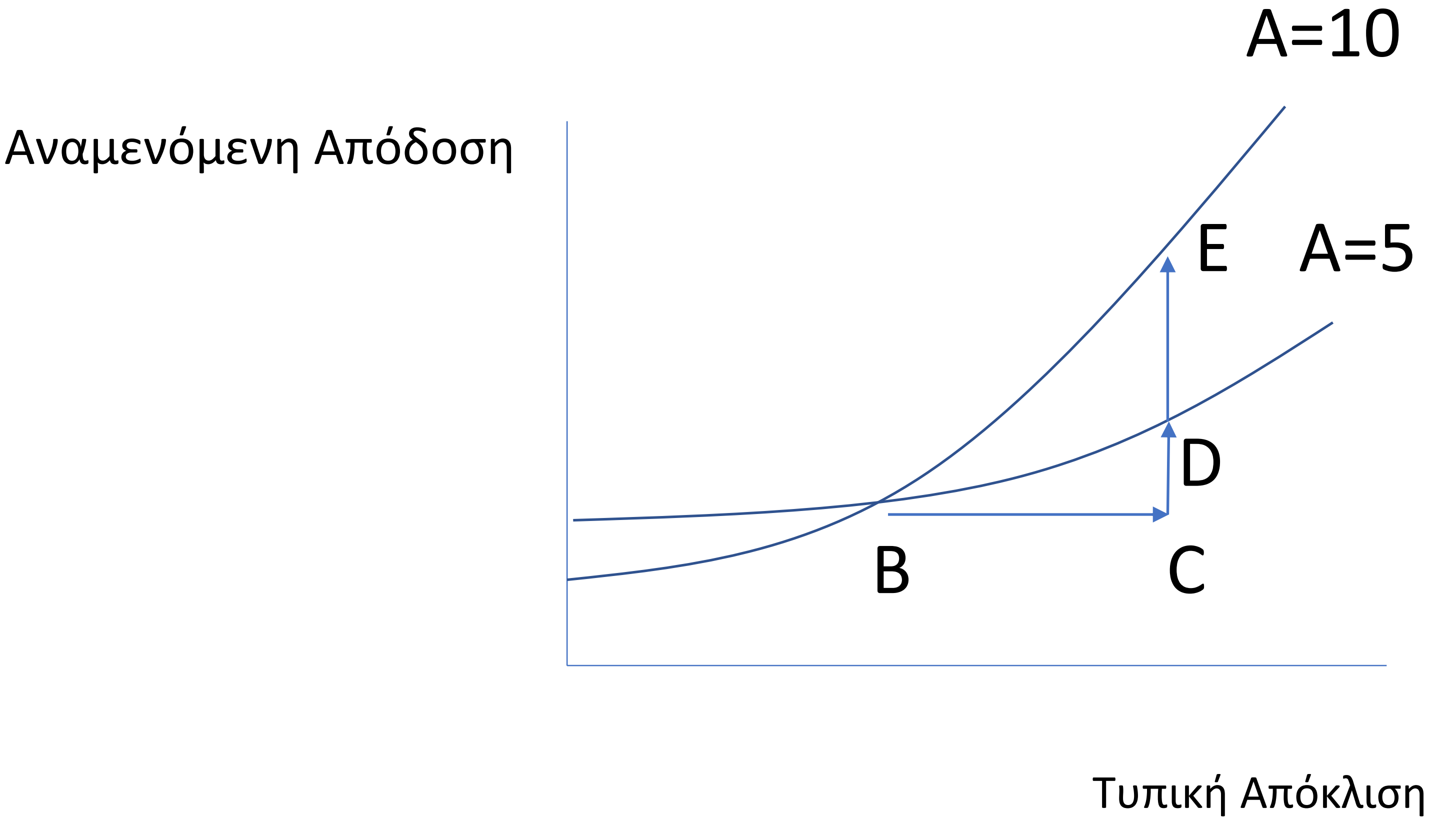


Βαθμοί Αποστροφής Κινδύνου

- Μεγαλύτερη αποστροφή κινδύνου ⇔περισσότερο κυρτές θα είναι οι καμπύλες αδιαφορίας
- Με συνάρτηση χρησιμότητας που μπορεί να παρουσιαστεί ως πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού, περισσότερη κυρτότητα ⇔ μεγαλύτερο A

[Διάγραμμα 8.2]

Βαθμοί Αποστροφής Κινδύνου - Διάγραμμα 8.2



Η Απόφαση Κατανομής του Κεφαλαίου

- Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι ότι πρέπει να μοιράσουμε τον πλούτο μας μεταξύ:
  - Ενός επιτοκίου χωρίς κίνδυνο,R_f (αποταμιευτικός λογαριασμός)
  - Ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων που ενέχει κίνδυνο :με αναμενόμενη απόδοση Ε(R_p),$\mathrm{και\ κίνδυνο}$ σ_p
  - y=ποσοστό επένδυσης(ως ποσοστό του πλούτου) στο επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο p
    - R_c=(1-y) R_f + y R_p
    - E(R_c) =(1-y) R_f + y $E(R_p)$
    - σ_c= y σ_p

Η Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου

- Από, σ_c= y σ_p, λύνουμε ως προς το y για να πάρουμε:

$$y = \frac{\sigma_c}{\sigma_p}$$

- Αντικαθιστούμε στην $\mathrm{E}(\mathrm{R}_c)$= (1-y) R_f+y $\mathrm{E}(R_p)$ για να πάρουμε την **Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου (Capital Allocation Line-CAL)**

$$\mathrm{E}(\mathrm{R}_c) = R_f + \frac{[\mathrm{E}(R_p) - R_f]}{\sigma_p}\sigma_c$$

Η Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου (συνέχεια)

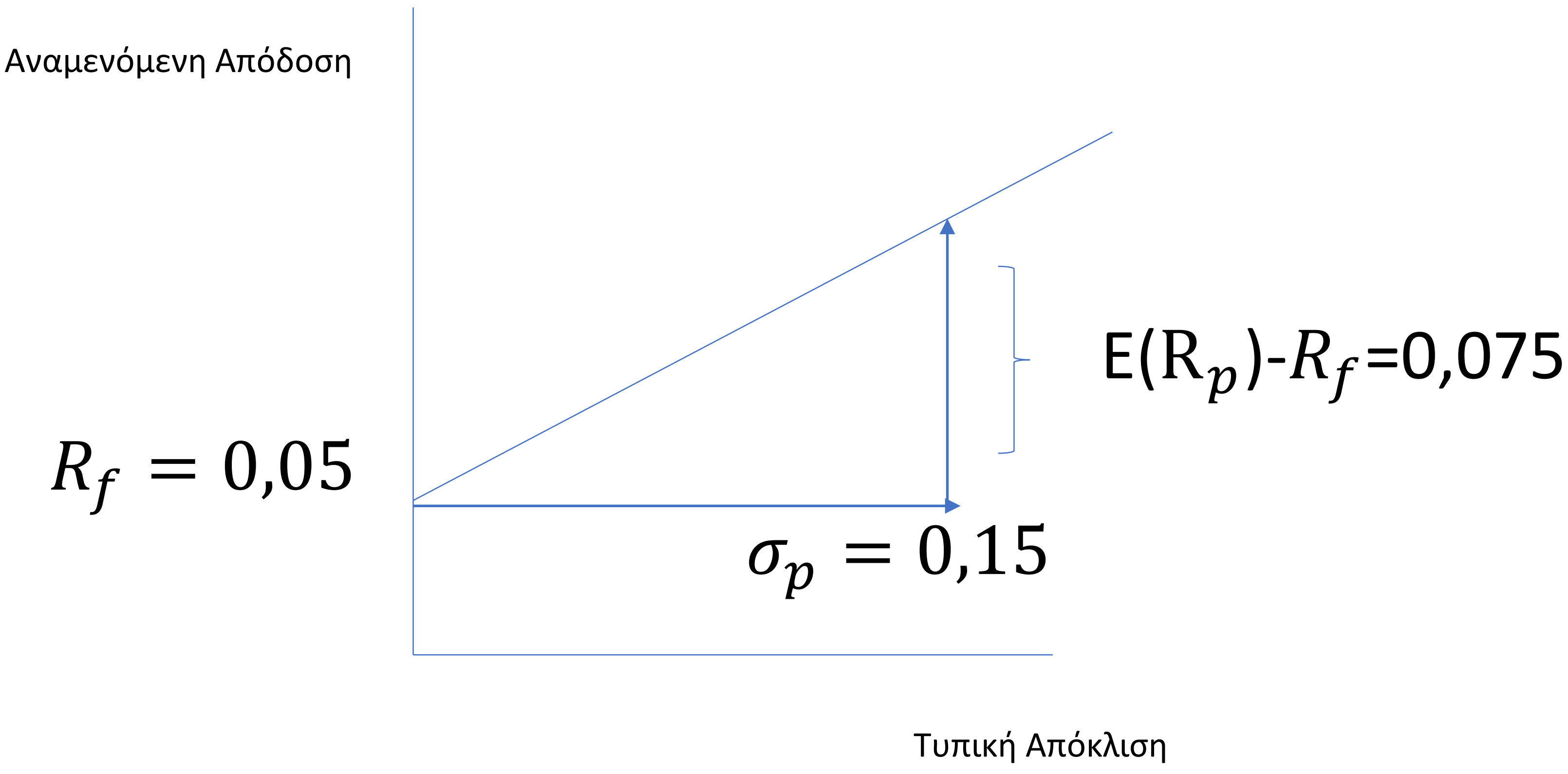
- $\frac{[\mathrm{E}(R_p) - R_f]}{\sigma_p}$ = δείκτης Επιβράβευσης της Μεταβλητότητας (Reward –to – Variability Ratio (RVR)) ή δείκτης Sharpe (Sharpe Ratio), δηλαδή η επιπλέον αναμενόμενη απόδοση από το χαρτοφυλάκιο p ανά μονάδα κινδύνου
- Γενικότερα ο παραπάνω δείκτης δείχνει πώς ο επενδυτής μπορεί να ανταλλάξει αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνο μεταξύ τους

Η Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου στην Πράξη

Ας υποθέσουμε $R_f = 5\%$, $\mathrm{E}(R_p) = 12{,}5\%, \sigma_p = 15\%$, Τότε:

[Διάγραμμα 8.3]

Η Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου στην Πράξη – Διάγραμμα 8.3



Εντοπίζοντας την Άριστη Κατανομή Κεφαλαίου

- Το πρόβλημα: Βρείτε εκείνο το y^* έτσι ώστε, να έχουμε:

$$R_{c^*} = (1 - y^*) R_f + y^* R_p$$

- Όπου c^* είναι το καλύτερο χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με την συνάρτηση χρησιμότητας $U(\mathrm{E}(R_c), \sigma_c)$
- Διότι $\sigma_c = y\ \sigma_p$, αυτό είναι ισοδύναμο του να βρούμε το σημείο $E(\mathrm{R}_{c^*}), \sigma_{c^*}$ πάνω στην CAL όπου μεγιστοποιείται η $U(\mathrm{E}(R_c), \sigma_c)$
- Εάν $\sigma_{c^*} < \sigma_p$, τότε $y^* < 1$: είναι βέλτιστο να επενδύσουμε στο χαρτοφυλάκιο p και στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο
- Εάν $\sigma_{c^*} > \sigma_p$, τότε $y^* > 1$: είναι βέλτιστο να επενδύσουμε στο χαρτοφυλάκιο p έχοντας δανειστεί στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο

Γεωμετρική Επίλυση

- Υπολογίζουμε τις βέλτιστες τιμές των $\mathrm{E}(\mathrm{R}_{C^*}),\sigma_{C^*}$, βρίσκοντας την υψηλότερη καμπύλη αδιαφορίας η οποία ταυτόχρονα εφάπτεται στην Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου

MRS=MRT

- Όπως είναι γνωστό από τη Μικροοικονομική Θεωρία μια **Καμπύλη Αδιαφορίας** δηλώνει τη σχέση ανταλλαγής μεταξύ δύο αγαθών (x_1, x_2) ούτως ώστε η συνολική χρησιμότητα του καταναλωτή κατά μήκος της καμπύλης αδιαφορίας να παραμένει σταθερή.
- Όπως, επίσης, είναι γνωστό η κλίση μιας τέτοιας καμπύλης καλείται **Οριακός Λόγος Υποκατάστασης (Marginal Rate of Substitution, MRS**

Γεωμετρική Επίλυση (συνέχεια)

- Εξ αυτών προκύπτει ότι ο MRS είναι ένα υποκειμενικό μέτρο και μπορεί να διαφέρει από καταναλωτή σε καταναλωτή.

- Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει τις αποφάσεις του καταναλωτή είναι ο **Εισοδηματικός Περιορισμός**, ο οποίος καθορίζεται από τις τιμές των δύο αγαθών και το εισόδημα του καταναλωτή (δηλαδή ορίζεται αντικειμενικά).

Γεωμετρική Επίλυση (συνέχεια)

- Η κλίση του εισοδηματικού περιορισμού καλείται **Οριακός Λόγος Μετασχηματισμού (Marginal Rate of Trasformation)** και δείχνει τον αντικειμενικό τρόπο με τον οποίο ο καταναλωτής μπορεί να ανταλλάξει το ένα αγαθό με το άλλο.
- Ο καταναλωτής που αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας του ουσιαστικά προσπαθεί να «ανέλθει» σε μια όσο το δυνατόν υψηλότερη καμπύλη αδιαφορίας, χρησιμοποιώντας όλους τους διαθέσιμους πόρους του.

Γεωμετρική Επίλυση (συνέχεια)

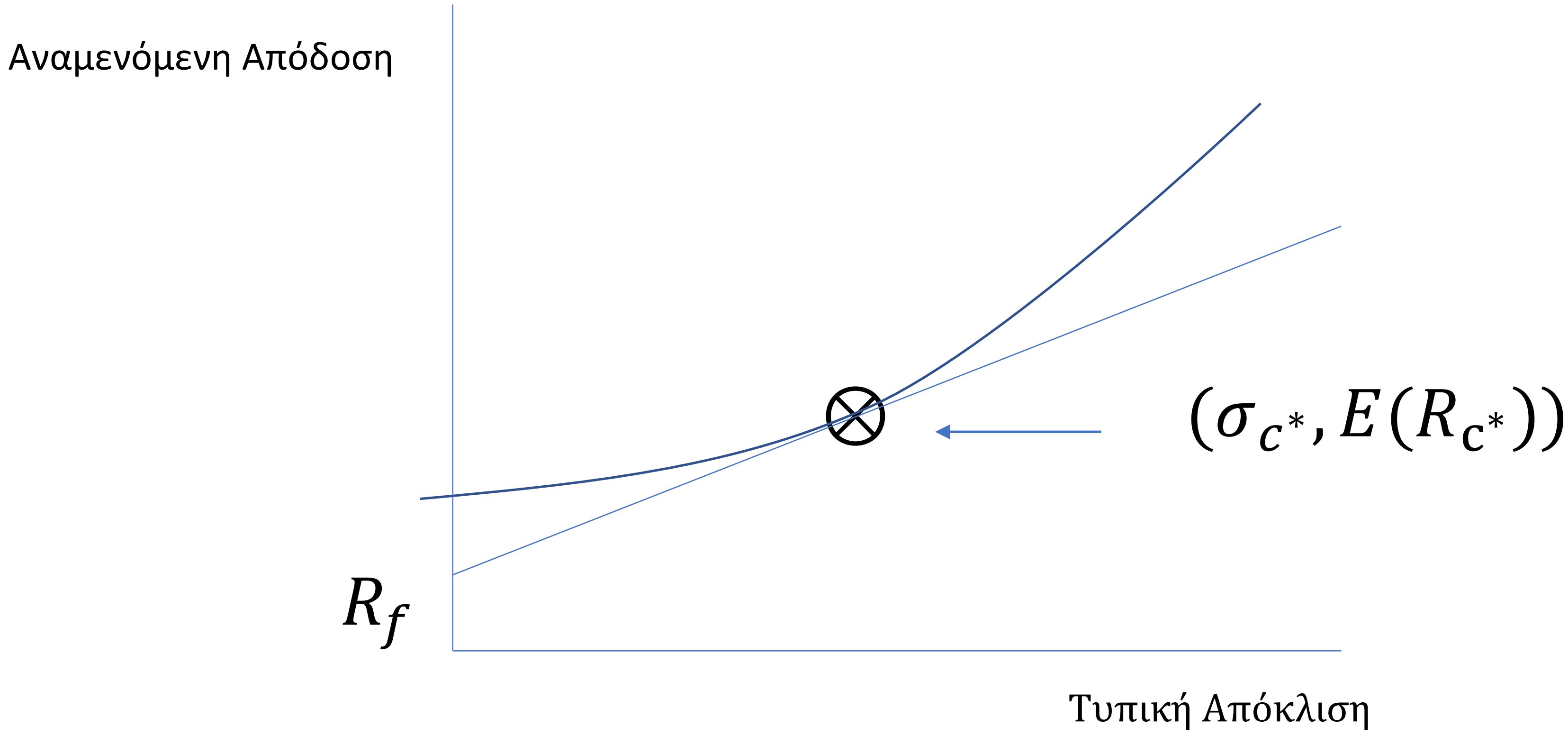
- Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της Μικροοικονομικής, η λύση του προβλήματος της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας δίδεται από την άριστη επιλογή του x_1 και του x_2 η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$\text{MRS = MRT} \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{M}U_1}{MU_2} = -\frac{p_1}{p_2}$$

- Μια τυπική λύση αυτού του προβλήματος έχει την παρακάτω μορφή στην ανάλυση μας όπου x_1= τυπική απόκλιση και $x_2 = \alpha\nu\alpha\mu\varepsilon\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu\eta\ \alpha\pi\acute{o}\delta o\sigma\eta$

[Διάγραμμα 8.4]

Γεωμετρική Επίλυση(συνέχεια) - Διάγραμμα 8.4



Άριστη Κατανομή Κεφαλαίου

- Ας υποθέσουμε την παρακάτω συνάρτηση χρησιμότητας

$$\mathrm{U}(\mathrm{E}(R_c), \sigma_c) = \mathrm{E}(R_c) - 0{,}5A\sigma_c^2$$

- Παραγωγίζοντας κατάλληλα , παίρνουμε:

$$\sigma_{c^*} = \frac{[\mathrm{E}(R_p) - R_f]}{\sigma_p A} = \frac{RVR}{A}$$

$$\Rightarrow y^* = \frac{\sigma_{c^*}}{\sigma_p} = \frac{[\mathrm{E}(R_p) - R_f]}{\sigma_p^2 A} = \frac{RVR}{\sigma_p A}$$

Άριστη Κατανομή Κεφαλαίου - Ένα Παράδειγμα

- Εάν R_f = 5%, $\mathrm{E}\left(R_p\right) = 12{,}5\%$, σ_p = 15%, τότε:

$$\sigma_{c^*} = \frac{[0{,}125 - 0{,}05]}{0{,}15 * A} = \frac{1}{2A}$$

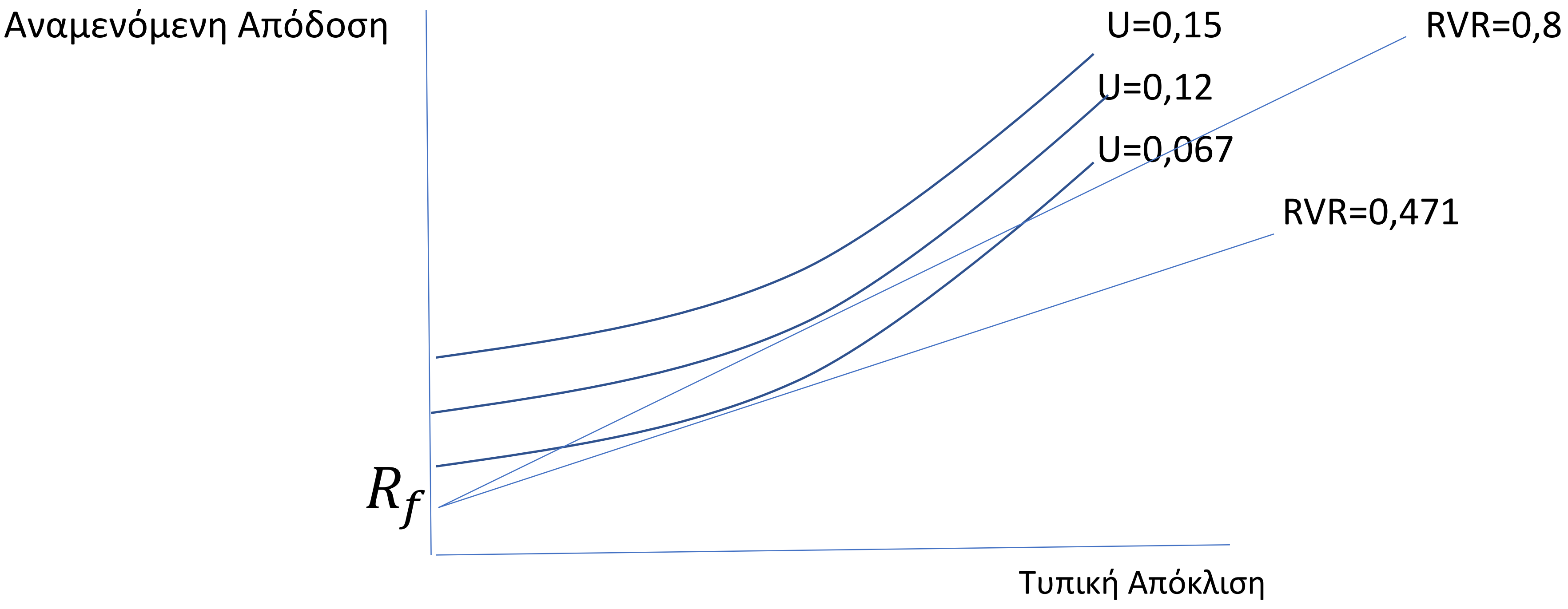
$$\Rightarrow \qquad y^* = \frac{1}{0{,}15 * 2 * A} = \frac{1}{0{,}3 * A}$$

- Εάν A=3, τότε $y^* \cong 1{,}12$, 1- $y^* \cong -0{,}12$. Ο επενδυτής δανείζεται 12% του πλούτου για το κεφάλαιο(πλούτος και δάνειο) που επενδύει στο χαρτοφυλάκιο p
- Εάν A = 4, τότε $y^* \cong 0{,}84$, 1- $y^* \cong 0{,}16$. Ο επενδυτής επενδύει 84% του πλούτου στο χαρτοφυλάκιο p, και 16% στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο(δανείζει)

Η Απόφαση Επιλογής και το Χαρτοφυλάκιο

- **Αρίστο Χαρτοφυλάκιο που ενέχει Κίνδυνο (Optimal Risky Portfolio)**
  - Το καλύτερο χαρτοφυλάκιο το οποίο συνδυάζεται με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο
- Ποιο είναι ; Είναι αυτό με το μεγαλύτερο Δείκτη Επιβράβευσης της Μεταβλητότητας
- Γιατί
  - Όσο μεγαλύτερο είναι το RVR, τόσο υψηλότερη είναι η καμπύλη αδιαφορίας πάνω στην οποία το Άριστο Σύνθετο Χαρτοφυλάκιο $E(\mathrm{R}_{C^*}), \sigma_{C^*}$ βρίσκεται
  - Και άρα τόσο μεγαλύτερη είναι η χρησιμότητα που ο επενδυτής αποκομίζει από αυτή την επένδυση (συνδυασμός χαρτοφυλακίου p και επιτοκίου χωρίς κίνδυνο)

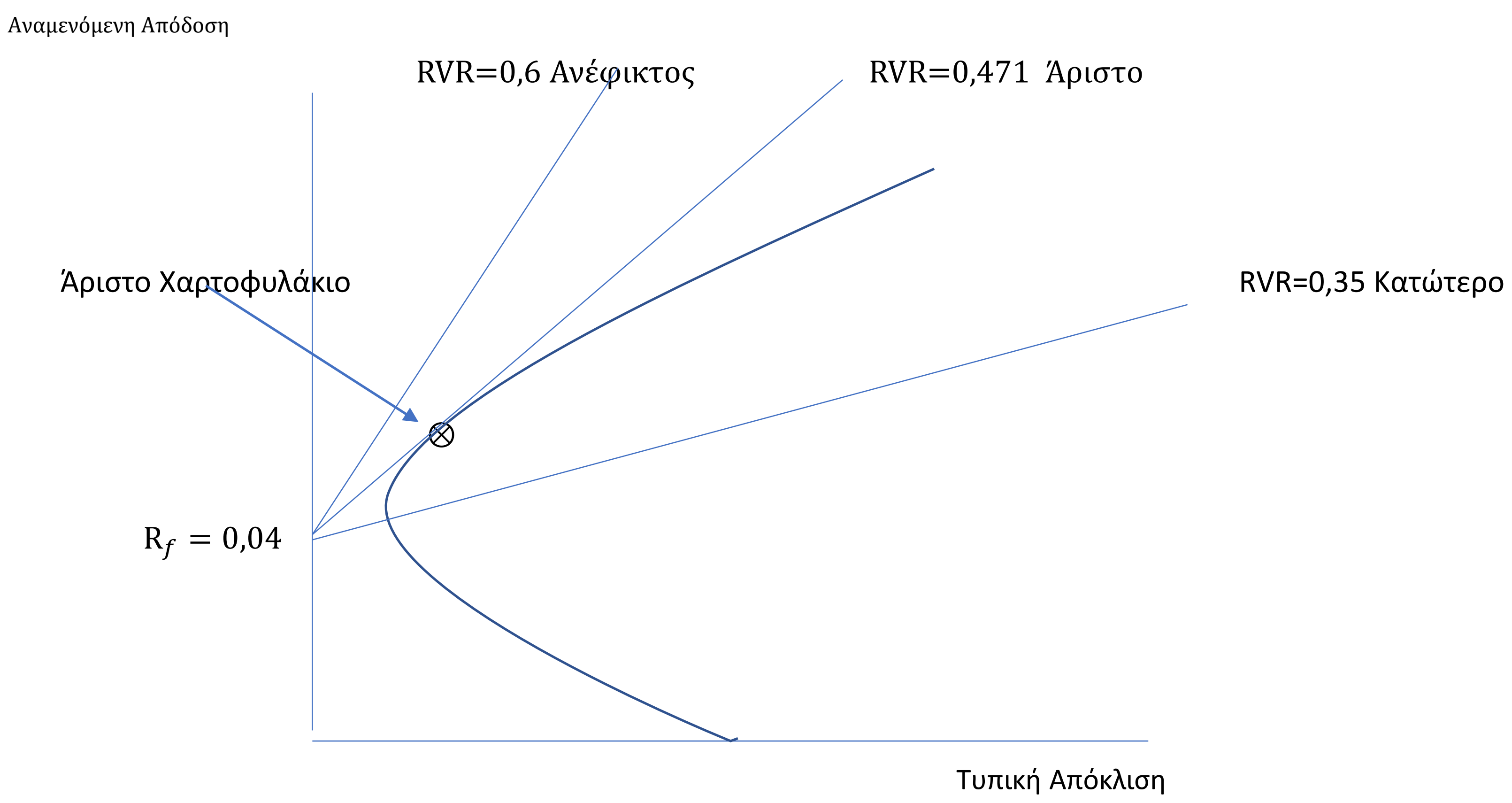
Γεωμετρική Ερμηνεία -Διάγραμμα 8.5



Πως βρίσκουμε το Χαρτοφυλάκιο με το Υψηλότερο RVR

- RVR = $\frac{[\mathrm{E}(R_p) - R_f]}{\sigma_p}$
- Περιορίζουμε την έρευνα μας σε χαρτοφυλάκια που βρίσκονται πάνω στην Καμπύλη Ελάχιστου Κινδύνου(για ένα δεδομένο επίπεδο $\mathrm{E}(R_p)$, τα οποία έχουν το μικρότερο σ_p)
- Πως βρίσκουμε το χαρτοφυλάκιο πάνω στην Καμπύλη Ελάχιστου Κινδύνου με το υψηλότερο RVR;
  - **Εντοπίστε την Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου η οποία εφάπτεται στο Αποτελεσματικό Σύνορο**

Η Γεωμετρία του Άριστου RVR –Διάγραμμα 8.6



Σύνοψη

- Η διαδικασία της Επιλογής Χαρτοφυλακίου αποτελείται από τρία βήματα:
  - Κατασκευάζουμε την Καμπύλη Ελάχιστου Κινδύνου για δεδομένα $\mathrm{E}(\mathrm{R}_i)$, σ_i^2, και ρ_{ij}
  - Επιλογή Χαρτοφυλακίου:
    - Για δεδομένη Καμπύλη Ελάχιστου Κινδύνου, βρίσκουμε το Άριστο Χαρτοφυλάκιο που ενέχει Κίνδυνο (Optimal Risky Portfolio) βρίσκοντας την Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου με το υψηλότερο RVR
  - Απόφαση Κατανομής Κεφαλαίου:
    - Για δεδομένη Γραμμής Κατανομής Κεφαλαίου με το υψηλότερο RVR , υπολογίζουμε το y^*, το ποσοστό του πλούτου μας που επενδύουμε στο Άριστο Επικίνδυνο Χαρτοφυλάκιο, και 1-y^*, το ποσοστό του πλούτου μας που επενδύουμε στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ενώ ο παραπάνω συνδυασμός μας δίνει το Άριστο Σύνθετο Χαρτοφυλάκιο(Optimal Composite Portfolio).

Η Γεωμετρία του Άριστου Σύνθετου Χαρτοφυλακίου με Α=3 και Α=12-Διάγραμμα 8.7