# Αξιολόγηση Επενδύσεων

Διάλεξη 2

Η Χρονική Αξία του Χρήματος ΙΙ (Εξισώσεις Αξίας)

Δράκος και Καραθανάσης, Κεφ2

# Περίγραμμα Διάλεξης

- Οι Τρείς Κανόνες του Χρονοδιαγράμματος
- Αποτιμώντας μια σειρά Ταμειακών Ροών(Ράντα)
- Διηνεκής Ράντα

# Εφαρμόζοντας τους κανόνες του χρονοδιαγράμματος

- Θυμηθείτε τον 1ο κανόνα: Είναι δυνατή μόνο σύγκριση ή ο συνδυασμός αξιών στο ίδιο χρονικό σημείο

# Υπολογίζοντας την Μελλοντική Αξία

- **Πρόβλημα**
- Σχεδιάζετε να αποταμιεύσετε $1.000 σήμερα και στο τέλος σε κάθε μια από τις επόμενες δύο χρονιές. Με ένα επιτόκιο αποταμίευσης ύψους 10%, πόσα χρήματα θα έχετε στην τράπεζα σας σε τρία χρόνια από σήμερα;

# Υπολογίζοντας την Μελλοντική Αξία – Ένα Παράδειγμα(συνέχεια)

- **Λύση**
- Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα. Εδώ θα διαχειριστούμε την κάθε ταμιακή ροή ξεχωριστά και τότε θα συνδυάσουμε της παρούσες αξίες
- $\Pi A_1$=$\frac{1.000}{(1+0,10)^1} = \frac{1.000}{(1,10)^1}$ =\$909,09
- $\Pi A_2$=$\frac{1.000}{(1+0,10)^2} = \frac{1.000}{(1,10)^2}$ =\$826,45
- Συνδυάζουμε τις σχετικές παρούσες αξίες:
- $\Pi A_0 + \Pi A_1$ + $\Pi A_2$ $=$ \$1.000 + \$909,09 +\$826,45=2.735,54

# Υπολογίζοντας την Μελλοντική Αξία – Ένα Παράδειγμα(συνέχεια)

Αποταμιευοντας \$2.735,54 σήμερα είναι ισοδύναμο του να αποταμιεύουμε \$1.000 κάθε έτος για τρία χρόνια. Υπολογίζουμε την Μελλοντικά Αξία της παραπάνω Παρούσας Αξίας(\$2.735,54) για την περίοδο 3

ΜΑ= $\Pi\mathrm{A}(1+r)^n \Leftrightarrow$

$\mathrm{MA}_3 = 2.735{,}54 * (1+0{,}10)^3 = 2.735{,}54 * (1{,}10)^3 =$ \$3.641

# Ράντα

- **Ράντα** είναι μια σειρά περιοδικών ταμειακών ροών που καταβάλλονται μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.
- Το ποσό που καταβάλλεται με κάθε ταμειακή ροή ονομάζεται **όρος** της ράντας
- Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών ταμειακών ροών ονομάζεται **περίοδος** της σειράς ταμειακών ροών
- Εάν όλοι οι όροι μιας σειράς ταμειακών ροών είναι ίσοι μεταξύ τους τότε η ράντα ονομάζεται **σταθερή ή ομοιόμορφή**
- Εάν όλοι οι όροι μιας σειράς ταμειακών ροών δεν είναι ίσοι μεταξύ τους τότε η ράντα ονομάζεται **μεταβλητή**

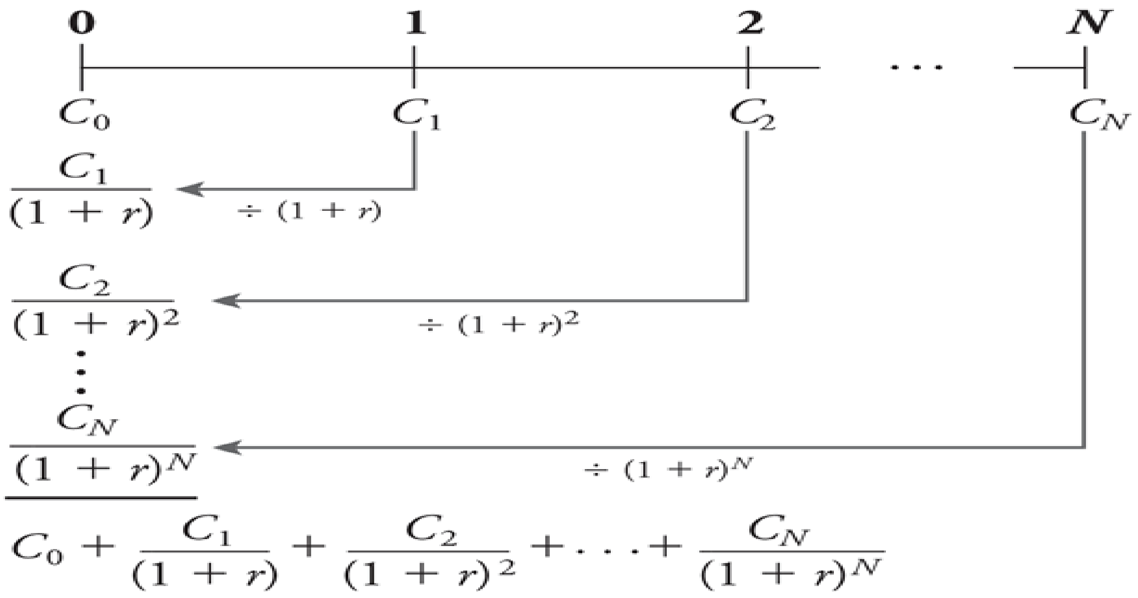
# Ράντα (συνέχεια)

- Η σειρά ταμειακών ροών της οποίας ο όρος(ταμειακή ροή) καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου ονομάζεται **ληξιπρόθεσμη** σειρά ταμειακών ροών (ράντα)
- Η σειρά ταμειακών ροών της οποίας ο όρος(ταμειακή ροή) καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου ονομάζεται **προκαταβλητέα** σειρά ταμειακών ροών (ράντα)
- Οι περισσότερες σειρές ταμειακών ροών είναι σταθερές και ληξιπρόθεσμες και εμείς με αυτές θα ασχοληθούμε κυρίως σε αυτό το μάθημα

# Αξιολόγηση μιας Ράντας

- Με βάση τον πρώτο κανόνα του χρονοδιαγράμματος μπορούμε να αντλήσουμε έναν γενικό τύπο για την αποτίμηση ράντας ταμειακών ροών: αν θέλουμε να βρούμε την παρούσα αξία μιας ράντας ταμειακών ροών, απλώς προσθέτουμε τις τρέχουσες αξίες κάθε ταμειακής ροής.

# Αξιολόγηση μιας Ράντας (συνέχεια)




- Η Παρούσα Αξία ράντας ταμειακών ροών
- ΠΑ$= \sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^n} = \frac{C_0}{(1+r)^0} + \cdots + \frac{C_\mathrm{N}}{(1+r)^N}$

# Η Παρούσα Αξία μιας σειράς Ταμειακών Ροών(ράντας)

- Όπου:
- ΠΑ=η παρούσα αξία της σταθερής σειράς ταμειακών ροών
- r= επιτόκιο προεξόφλησης (discount rate), υποθέτουμε ότι είναι σταθερό διαχρονικά
- n=η περίοδος της σειράς ταμειακών ροών (ράντας)
- N=η τελευταία περίοδος της σειράς ταμειακών ροών (ράντας)
- $C_n$ =η περιοδική πληρωμή δηλαδή ο όρος της σειράς ταμειακών ροών

# Η Παρούσα Αξία και η Μελλοντική Αξία μιας Ράντας Ταμειακών Ροών - Ένα Παράδειγμα

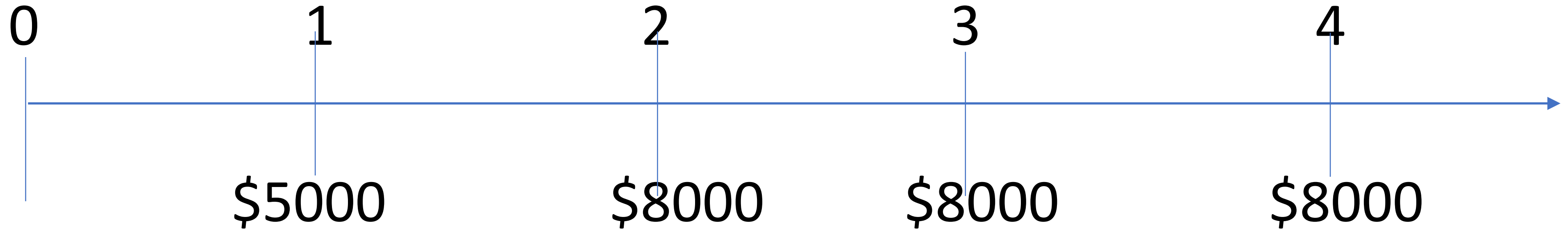
**Πρόβλημα**

Έχετε μόλις αποφοιτήσει και χρειάζεστε χρήματα να αγοράσετε ένα νέο αμάξι. Ο πλούσιος θείος σας προτίθεται να σας δανείσει τα χρήματα υπό τον όρο να επιστρέψετε τα χρήματα πίσω στα επόμενα τέσσερα χρόνια συν του τόκους που θα προκύπτανε αν ο θείος σας τοποθετούσε αυτό το ποσό σε ένα αποταμιευτικό λογαριασμό. Βασιζόμενη στον τρόπο ζωής σας, εσείς πιστεύετε ότι θα είστε σε θέση να πληρώσετε σε αυτόν πίσω $5000 σε ένα χρόνο από τώρα και έπειτα $8000 κάθε χρόνο για τα επόμενα τρία χρόνια. Εάν ο θείος σας κέρδιζε 6% από ένα αποταμιευτικό λογαριασμό, πόσο χρήματα μπορείτε να δανειστείτε από αυτόν;

# Η Παρούσα Αξία και η Μελλοντική Αξία μιας Ράντας Ταμειακών Ροών - Ένα Παράδειγμα (συνέχεια)

**Λύση**

Οι ταμειακές ροές που υποσχεθήκατε στο θείο σας:




Ποια ποσότητα χρήματος επιθυμεί να σας δώσει ο θείο σας έτσι ώστε να του δώσετε πίσω το παραπάνω χρονοδιάγραμμα πληρωμών; Αυτός θα είναι πρόθυμος να σας προσφέρει μια ποσότητα χρήματος που είναι ισοδύναμη των παραπάνω πληρωμών σε όρους παρούσης αξίας

# Η Παρούσα Αξία και η Μελλοντική Αξία μιας Ράντας Ταμειακών Ροών - Ένα Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αυτή θα είναι η ποσότητα χρήματος που θα παρήγαγε το χρονοδιάγραμμα πληρωμών που υποσχεθήκατε στο θείο σας, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε ως εξής
- ΠΑ=$\frac{5000}{1,06}+\frac{8000}{(1,06)^2}+\frac{8000}{(1,06)^3}+\frac{8000}{(1,06)^4}=$

$\$4.716,98+\$7.119,97+\$6.716,95+\$6.336,75=$\$24.890,65

# Η Παρούσα Αξία και η Μελλοντική Αξία μιας Ράντας Ταμειακών Ροών - Ένα Παράδειγμα (συνέχεια)

- Συνεπώς, ο θείος σας επιθυμεί να σας δανείσει \$24. 890,65 σε αντάλλαγμα το χρονοδιάγραμμά των ταμειακών ροών που του υποσχεθήκατε. Αυτή η ποσότητα είναι μικρότερη από την συνολική ποσότητα που θα επιστρέψετε:

  (\$5.000+\$8.000+\$8.000+\$8.000=\$29.000)

- εξαιτίας της χρονικής αξίας του χρήματος.

# Η Παρούσα Αξία και η Μελλοντική Αξία μιας Ράντας Ταμειακών Ροών - Ένα Παράδειγμα (συνέχεια)

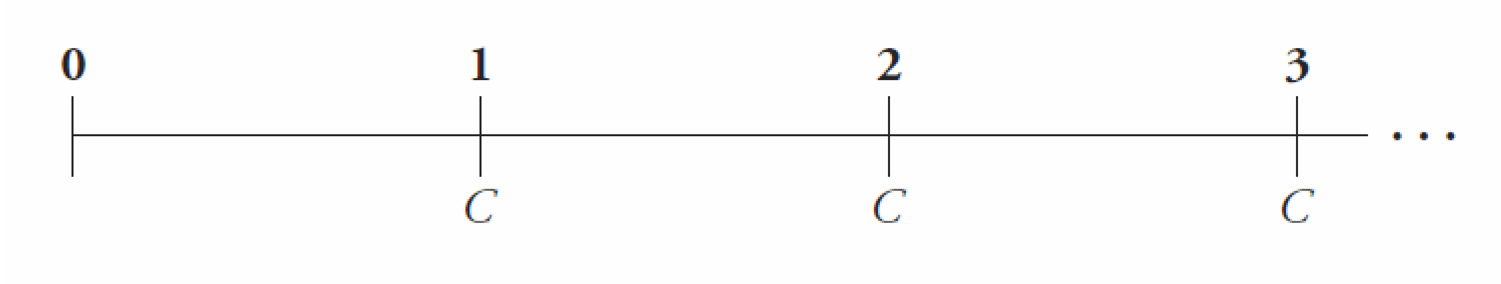
Εάν ο θείος σας αποταμίευε, για τέσσερα χρόνια, τα χρήματα που δάνεισε σε εσάς στην τράπεζα με επιτόκιο 6% θα κέρδιζε:

ΜΑ= $\Pi\mathrm{A}(1+r)^{n} \Leftrightarrow$

$\mathrm{MA}_4 = 24.890{,}65 * (1+0{,}06)^4 = 24.890{,}65 * (1{,}06)^4 =$ \$31.423,87

# Διηνεκής Ράντα

- Είναι μια σειρά περιοδικών(σταθερών) ταμειακών ροών (C) όπου το πλήθος των περιόδων τείνει στο άπειρο



# Διηνεκής Ράντα

- Η αξία μιας διηνεκής ράντας είναι απλά η ταμειακή ροή (C) διαιρούμενη με το επιτόκιο (r).

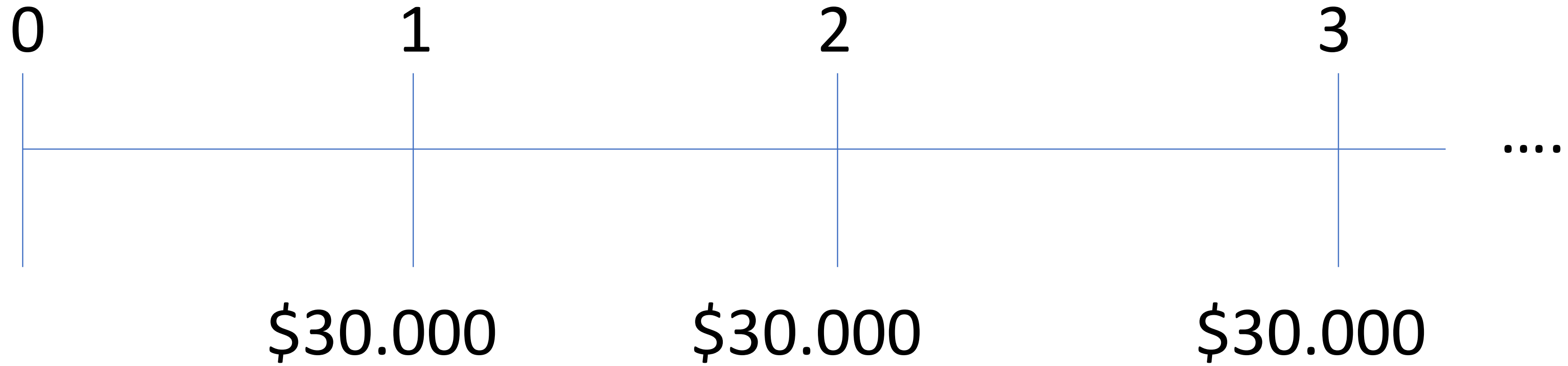
- Η Παρούσα Αξία μιας Διηνεκής Ράντας Σταθερών Ταμειακών Ροών

$$\text{ΠΑ}= \frac{C}{r}$$

# Παράδειγμα χρηματοδότησης μιας διηνεκής ράντας

- Θέλετε να χρηματοδοτήσετε μία ετήσια γιορτή αποφοίτησης για το μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του τμήματος. Σκέφτεστε να δίνετε \$30.000 για την δημιουργία της γιορτής κάθε χρόνο για πάντα. Εάν το πανεπιστήμιο κερδίζει 8% αποταμιεύοντας αυτή την προσφορά σας, Πόσα χρήματα θα πρέπει να χορηγήσετε σήμερα για να γίνεται η γιορτή κάθε χρόνο για πάντα ;

# Παράδειγμα χρηματοδότησης μιας διηνεκής ράντας(συνέχεια)




Αυτή είναι μια διηνεκής ράντα με ετήσια ταμειακή ροή $30.000. Η χορηγία που εσείς θα πρέπει να δώσετε στο πανεπιστήμιο για να χρηματοδοτήσετε την παραπάνω  σειρά ταμειακών ροών στο διηνεκές, θα είναι η παρούσα αξία της παραπάνω διηνεκής ράντας

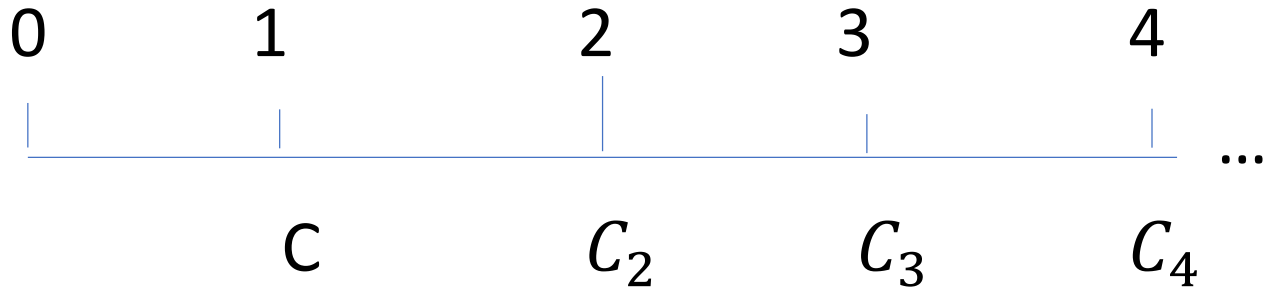
# Παράδειγμα χρηματοδότησης μιας διηνεκής ράντας(συνέχεια)

- ΠΑ=C/r=\$30.000/0,08=\$375.000
- Εάν δωρίσετε \$375.000 σήμερα, και εάν το πανεπιστήμιο επενδύσει το παραπάνω ποσό εισπράττοντας ένα ετήσιο επιτόκιο 8% στο διηνεκές, τότε το μεταπτυχιακό πρόγραμμα του τμήματος θα έχει \$30.000 κάθε χρόνο για να κάνει μία γιορτή αποφοίτησης κάθε χρόνο και για πάντα.

# Μεταβαλλόμενη Σειρά Ταμειακών Ροών(Ράντα)

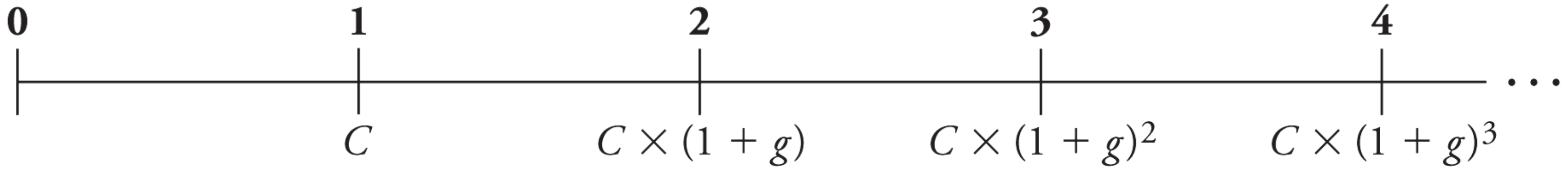
- Αύξουσα Διηνεκής Ράντα

- Ας υποθέσουμε ότι αναμένετε ότι το ποσό της διηνεκής  σειράς ταμειακών ροών  σας να αυξάνεται για πάντα με σταθερό ρυθμό, g.



# Μεταβαλλόμενη Σειρά Ταμειακών Ροών (συνέχεια)

- Ή ισοδύναμα διαγραμματικά



# Μεταβαλλόμενη Σειρά Ταμειακών Ροών(συνέχεια)

- Η Παρούσα Αξία μίας Αύξουσας Διηνεκής Ράντας
- ΠΑ= $\frac{MA}{r - g}$
- C: ταμειακή ροή την περίοδο 1
- r:Προεξοφλητικό Επιτόκιο
- g:ποσοστό αύξησης της ταμειακής ροής της διηνεκής ράντας

# Παράδειγμα χρηματοδότησης μιας αύξουσας διηνεκής ράντας

- Θέλετε να χρηματοδοτήσετε την γιορτή αποφοίτησης του πανεπιστημίου σας. Σκέφτεστε να δίνετε $30.000 για την δημιουργία της γιορτής κάθε χρόνο(περίοδο) για πάντα. Εάν το πανεπιστήμιο κερδίζει 8% αποταμιεύοντας αυτή την προσφορά σας, και εάν το κόστος της γιορτής αυξάνεται κάθε χρόνο κατά 4%, πόσα χρήματα θα πρέπει να χορηγήσετε σήμερα για να γίνεται η γιορτή κάθε χρόνο και για πάντα ;

# Παράδειγμα χρηματοδότησης μιας αύξουσας διηνεκής ράντας(συνέχεια)

**Λύση**

| 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| | 30.000 | 30.000*1,04 | 30.000*$1,04^2$ | ….. |

Το κόστος διοργάνωσης της γιορτής αποφοίτησης για την επόμενη χρονιά είναι $30.000, και το κόστος της γιορτής αυξάνεται 4% κάθε χρονιά και για πάντα. Από το χρονοδιάγραμμα , αντιλαμβανόμαστε ότι αντιμετωπίζουμε μια αύξουσα διηνεκής ράντα ταμειακών ροών.

# Παράδειγμα χρηματοδότησης μιας αύξουσας διηνεκής ράντας(συνέχεια)

- Για να χρηματοδοτήσουμε το αυξανόμενο κόστος, εμείς πρέπει να προσφέρουμε σήμερα το ποσό που προκύπτει από τον υπολογισμό της παρακάτω παρούσας αξίας:
- ΠΑ=$30.000/(0,08-0,04)=$750.000
- Ουσιαστικά πρέπει να διπλασιάσουμε την χορηγία!

# Παράρτημα

- Ας υποθέσουμε ότι επενδύετε $100 σε ένα τραπεζικό λογαριασμό που πληρώνει ετήσιο επιτόκιο 5%.
- Στο τέλος της επόμενης χρονιάς,  θα έχετε  $105 στο λογαριασμός σας, το αρχικό κεφάλαιο $100 και $5 ως τόκους
- Έστω ότι αποσύρετε τους τόκους που κερδίσατε ($5) και επενδύετε πάλι τα υπόλοιπα $100 για μια δεύτερη χρονιά

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Για άλλη μια φορά θα έχετε συνολικά κερδίσει $105 σε ένα χρόνο και συνεπώς μπορείτε να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία αποσύροντας $5 και επενδύοντας πάλι $100, κάθε χρόνο
- Για να αποκτήσετε μια διηνεκής ράντα των $5 αποταμιεύετε το αρχικό κεφάλαιο ($100) κάθε περίοδο και αποσύρετε κάθε περίοδο τους σχετικούς τόκους($5) που προκύπτουν από αυτό
- Αντίθετα, μπορεί να αποφασίσετε μετά από 20 χρόνια να κλείσετε το λογαριασμό σας στην τράπεζα και να αποσύρετε το αρχικό κεφάλαιο
- Με το αρχικό κεφάλαιο των $100 που επενδύσατε, εσείς έχετε δημιουργήσει μια 20 –ετη  ράντα των $5 ανά έτος επιπλέον του αρχικού κεφαλαίου των $100 στο τέλος της 20ης χρονιάς

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Πιο γενικά έστω ότι έχετε ένα αρχικό κεφάλαιο P και το αποταμιεύεται για ένα χρόνο με επιτόκιο r τότε από το τελικό κεφάλαιο αφαιρείτε τους τόκους $C=r*P$ για κάθε περίοδο και ουσιαστικά αποταμιεύετε πάλι το αρχικό κεφάλαιο (P) . Μετά από N περιόδους, εσείς κλείνετε το λογαριασμό οπότε κερδίζετε τους σχετικούς τόκους επιπλέον του αρχικού κεφαλαίου P.

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Συνεπώς, για μία αρχική επένδυση P, θα λάβετε μια σταθερή  σειρά ταμειακών ροών μεγέθους C για N περιόδους επιπλέον θα λάβετε πίσω το αρχικό σας κεφάλαιο P στο τέλος της περιόδου N.
- Σύμφωνα με το νόμο της μίας τιμής το ίδιο αγαθό πρέπει να έχει την ίδια τιμή σε κάθε αγορά
- Άρα η παρούσα αξία των παραπάνω μεγεθών θα είναι ίση με την αξία της αρχικής επένδυσης P

# Παράρτημα(συνέχεια)

- P=ΠΑ(της σταθερής σειράς ταμειακών ροών για Ν περιόδους) + ΠΑ(P την περίοδο Ν)
- ΠΑ(της σταθερής σειράς ταμειακών ροών για Ν περιόδους)= P-ΠΑ(P την περίοδο Ν)
- =P- $\frac{P}{(1+r)^N} = P(1 - \frac{P}{(1+r)^N})$=C $* \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$
- Για Ν→∞
- ΠΑ(της σταθερής σειράς ταμειακών ροών για Ν περιόδους)=

$$C* \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right) = C * \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{\infty}}\right) = C * \frac{1}{r}(1-0) = \mathrm{C/r}$$

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλετε να δημιουργήσετε μια σειρά ταμειακών ροών η οποία θα αυξάνεται κάθε περίοδο με ένα σταθερό ποσοστό, g και για πάντα.
- Για παράδειγμα ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε με αρχικό κεφάλαιο $100 και με ετήσιο επιτόκιο αποταμίευσης 5% μια αύξουσα διηνεκής σειρά ταμειακών ροών της οποίας οι ταμειακές ροές θα αυξάνονται κάθε περίοδο με σταθερό ποσοστό 2%.
- Έστω ότι έχουμε αρχικό κεφάλαιο $100 και ότι το ετήσιο επιτόκιο αποταμίευσης σε ένα τραπεζικό λογαριασμό είναι 5%

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Την περίοδο 0 αποταμιεύουμε \$100 με r=5%
- Στο τέλος της περιόδου 1 θα εισπράξουμε \$105
- Εάν αποσύρουμε \$3 θα μπορούμε να αποταμιεύσουμε \$102 την περίοδο 1
- Άρα στο τέλος της περιόδου 2 θα εισπράξουμε \$102 $*$1,05=\$107.1
- Συνεπώς μπορούμε να αποσύρουμε \$3$*$1,02=\$3,06 την περίοδο 2 οπότε να αποταμιεύσουμε την περίοδο 2 \$107,1-\$3,06=\$104,04
- Παρατηρήστε ότι \$102$*$1,02=\$104,04. Δηλαδή, η ποσότητα που αποσύραμε και η ποσότητα που αποταμιεύσαμε την περίοδο 2 έχουν αυξηθεί κατά 2%

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Με άλλα λόγια θα μπορείτε να αποσύρετε τους τόκους σας κάθε περίοδο  αυξημένους κατά ένα ποσοστό g κάθε περίοδο
- Για να το πετύχετε αυτό θα πρέπει να έχετε κάθε περίοδο ένα αρχικό κεφάλαιο που θα το αποταμιεύετε  κάθε περίοδο και  θα αυξάνεται και αυτό κάθε περίοδο κατά g

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Συνεπώς εάν  έχετε ένα αρχικό κεφάλαιο P και το αποταμιεύετε την περίοδο 0 για ένα χρόνο με επιτόκιο r και συνεπώς κερδίζετε τόκους $C=r*P$ την περίοδο 1
- τότε για να έχετε τόκους ύψους $C*(1+g)$ την  περίοδο 2 θα πρέπει στην περίοδο 1 να αποταμιεύσουμε $P(1+g)=P + gP$ ως αρχικό κεφάλαιο
- αυτό μπορεί να γίνει εάν αποσύρουμε την περίοδο 1 τόκους ύψους $C=rP-gP=P(r-g)$

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Έστω ότι μετά από N περιόδους, εσείς κλείνετε το λογαριασμό οπότε κερδίζετε τους σχετικούς τόκους ξεκινώντας από την περίοδο 1 εώς και την περίοδο N να τους εισπράττουμε (C, C$(1+g)^1$, C$(1+g)^2$ … C$(1+g)^{N-1}$)επιπλέον του κεφαλαίου της περιόδου N, δηλαδή P$(1+\mathrm{g})^N$ ,όπου $\mathrm{P}(1+g)^N = \mathrm{P}(1+g)^{N-1} *$ (1+g).
- Θυμηθείτε ότι για να έχουμε την παραπάνω αύξουσα σειρά ταμειακών ροών εσείς πρέπει να αποταμιεύετε ξεκινώντας από την περίοδο 0 έως και την περίοδο N-1 τα παρακάτω ποσά: P, P(1+g), P$(1+g)^2$ … $\mathrm{P}(1+g)^{N-1}$αντίστοιχα

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Σύμφωνα με το νόμο της μίας τιμής το ίδιο αγαθό πρέπει να έχει την ίδια τιμή σε κάθε αγορά
- Άρα η παρούσα αξία των παραπάνω μεγεθών θα είναι ίση με την αξία της αρχικής επένδυσης P
- P=ΠΑ(της αύξουσας σειράς ταμειακών ροών για N περιόδους) + ΠΑ(P$(1+\mathrm{g})^{N}$ την περίοδο N)
- ΠΑ(της αύξουσας σειράς ταμειακών ροών για N περιόδους)= P-ΠΑ(P$(1+g)^{N}$ την περίοδο N)
- =P- $\frac{P(1+g)^{N}}{(1+r)^{N}} = P(1-\frac{(1+g)^{N}}{(1+r)^{N}})$ = C*$\frac{1}{r-g}\left(1-\frac{(1+g)^{N}}{(1+r)^{N}}\right)$

# Παράρτημα(συνέχεια)

- Για N→∞και g<r
- ΠΑ(της αύξουσας σειράς  ταμειακών ροών για N περιόδους)=

$$C * \frac{1}{r-g}\left(1-\frac{(1+g)^N}{(1+r)^N}\right) = C * \frac{1}{r-g}\left(1-\frac{(1+g)^\infty}{(1+r)^\infty}\right)$$

- $= C * \frac{1}{r-g}(1-0) = C * \frac{1}{r-g}$

# Βιβλιογραφία


- Αναστάσιος. Α. Δράκος και Γεώργιος Α. Καραθανάσης, Χρηματοοικονομική Διοίκηση των Επιχειρήσεων, Β΄Έκδοση, Εκδόσεις Μπένου, 2017