**Μαθηματική Οικονομική**

Εξεταστική Ιανουαρίου 2017-18

5/2/2018

**Επιλέξτε 3 από τα 4 θέματα** (τα θέματα ισοδύναμα)

**Θέμα 1:**

Α) Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $u=a\_{1}lnx\_{1}+a\_{2}lnx\_{2}$ όπου $a\_{1},a\_{2}>0$ και ο εισοδηματικός περιορισμός $Μ=p\_{1}x\_{1}+p\_{2}x\_{2}$ όπου $p\_{1},p\_{2},Μ>0$ ενός καταναλωτή για τα αγαθά $x\_{1},x\_{2}$.

i) Να βρεθούν: οι ποσότητες για τις οποίες ο καταναλωτής βελτιστοποιεί τη χρησιμότητα του, η συνάρτηση έμμεσης χρησιμότητας, η οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος.

ii) Τι είδους είναι οι συναρτήσεις ζήτησης του καταναλωτή για τα 2 αγαθά; Τι βαθμού είναι η συνάρτηση ζήτησης και τι σημαίνει αυτό;

iii) Χρησιμοποιώντας τη ταυτότητα του Roy ($-\frac{\frac{∂u}{∂p\_{i}}}{\frac{∂u}{∂M}}$), σε τι αποτέλεσμα καταλήγετε;

Β) Για ένα καταναλωτή οι μη αντισταθμιστικές συναρτήσεις ζήτησης για δύο αγαθά είναι $x\_{i}=\frac{M}{2p\_{i}}$ ενώ η συνάρτηση χρησιμότητας δίνεται από $u=x^{1/2}\_{1}+x^{1/2}\_{2}$.

i) Υπολογίστε την έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας και τις αντισταθμιστικές συναρτήσεις ζήτησης

ii) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Slutsky ($\frac{∂x\_{i}^{MA}}{∂p\_{i}}=\frac{∂x\_{i}^{A}}{∂p\_{i}}-\frac{∂x\_{i}^{MA}}{∂M}x\_{i})$ βρείτε το αποτέλεσμα υποκατάστασης και το αποτέλεσμα εισοδήματος για το αγαθό 2 όπου ΜΑ = μη αντισταθμιστική, Α = αντισταθμιστική. Τι συμπεραίνεται για το αγαθό;

**Θέμα 2:**

Έστω ότι η δαπάνη ενός καταναλωτή δίνεται από $Ε=6y\_{1}+4y\_{2}$ για δύο αγαθά $y\_{1},y\_{2}$ για επίπεδα χρησιμότητας $y\_{1}+y\_{2}\geq 2$, $y\_{1}+2y\_{2}\geq 3$, $y\_{1}+y\_{2}\geq 4$ και $y\_{1},y\_{2}\geq 0$.

Α) i) Ποιες είναι οι αναγκαίες συνθήκες για βελτιστοποίηση της δαπάνης Ε;

ii) Ο συνδυασμός αγαθών $(y\_{1},y\_{2})=(0,4)$ αποτελεί λύση για το πρόβλημα βελτιστοποίησης; Αν ναι, τι είδους λύση είναι; Τι συνεπάγεται για τον καταναλωτή μια τέτοια λύση και πως ερμηνεύετε οικονομικά. Δώστε ένα παράδειγμα.

iii) Για το συνδυασμό $(y\_{1},y\_{2})=(0,4)$ ποιοι συνδυασμοί είναι ενεργοί;

Β) Αφού η αντικειμενική συνάρτηση (Ε) είναι γραμμική, οι περιορισμοί οιονεί κοίλοι και $u\_{i}\left(x^{\*}\right)>0$ για κάποιο αγαθό. Οι αναγκαίες συνθήκες είναι ικανές για την επίτευξη βέλτιστου σημείου και σύμφωνα με ποιο κριτήριο;



**Θέμα 3ο:**

Έστω ότι σε μια αγορά υπάρχουν μόνο δύο επιχειρήσεις. Η επιχείρηση 1 παράγει τη περίοδο t ποσότητα $x\_{t}$ και η επιχείρηση 2 παράγει τη περίοδο t ποσότητα $y\_{t}$. Το ύψος παραγωγής αποφασίζεται σύμφωνα με την υπόθεση Cournot. Η αντίστροφή συνάρτηση ζήτησης $P\left(x,y\right)=126-(x+y)$. Οι συναρτήσεις κόστους είναι $C\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{2}$ και $C\left(y\right)=\frac{1}{2}y^{2}$.

i) Ποια είναι η συνάρτηση αντίδρασης της επιχείρησης 1;

ii) Η ποσότητα $x\_{t}$ συγκλίνει προς κάποια σταθερή κατάσταση; Αν ναι, σε ποια;

iii) Να επιλυθεί η συνάρτηση αντίδρασης της επιχείρησης 1.

iv) Για αρχικές συνθήκες παραγωγής $x\_{0}=50$ και $x\_{1}=30$ να βρεθεί η λύση της συνάρτησης αντίδρασης της επιχείρησης 1.

**Θέμα 4ο:**

Οι διαφημιστικές δαπάνες επηρεάζουν τα κέρδη μιας επιχείρησης σύμφωνα με την εξίσωση $Π\_{t}=aE\_{t}(1-E\_{t})$. Το επόμενο έτος ένα μέρος των κερδών αφιερώνεται στη διαφημιστική δαπάνη σύμφωνα με την εξίσωση $E\_{t+1}=βΠ\_{t}$.

i) Υπολογίστε την εξίσωση διαφορών της διαφημιστικής δαπάνης

ii) Να βρεθούν οι τιμές σταθερής κατάστασης της διαφημιστικής δαπάνης

iii) Τι πρέπει να ισχύει για τις α, β ώστε η διαφημιστική δαπάνη να συγκλίνει; Αν $αβ=3$ έχουμε σύγκλιση; Αν ναι, τι είδους;

iv) Για αρχικό επίπεδο διαφημιστικής δαπάνης $E\_{0}=0.69$ υπολογίστε την διαφημιστική δαπάνη $E\_{t}$ για t = 0, 1, 2, 3, 4 όπου $αβ=3$. Τι παρατηρείται; Υποστηρίξτε τα επιχειρήματα σας με το διάγραμμα φάσης.

