ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Ακαδημαϊκό Έτος 2017-2018

Χειμερινό Εξάμηνο

Διάλεξη 3 η -4η –, Πολλαπλασιαστές Langrange, Συγκριτική Στατική, Κοίλες και κυρτές συναρτήσεις, Συνθήκες Κ-Τ

Διδάσκων: Κουνετάς Η. Κωνσταντίνος Επίκουρος Καθηγητής ΤΟΕ

ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΙΙ

Μη Γραμμικός Προγραμματισμός: αριστοποίηση με περιορισμούς ανισότητας. Συνθήκες Kuhn-Tucker (K-T). Ο όρος περιορισμού. Οι συνθήκες K-T ως ικανές και αναγκαίες συνθήκες. Οιονεί κοίλος, μη-γραμμικός προγραμματισμός: συνθήκες Arrow-Enthoven. Εφαρμογές στην οικονομική: λύση «γωνίας» σε προβλήματα μεγιστοποίησης χρησιμότητας & ελαχιστοποίησης δαπάνης, γενίκευση συνθηκών ελαχιστοποίησης κόστους και μεγιστοποίησης κέρδους επιχειρήσεων.

Πολλαπλασιαστές Langrange και Οικονομική ερμηνεία Ι

Οι πολλαπλασιαστές Langrange σε μια συνάρτηση βελτιστοποίησης εκτός της μαθηματικής τους υπόστασης χρήζουν και μεγάλης αξίας απο την οικονομική πλευρά. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζοντας απλά και γρήγορα την μαθηματική τους απόδειξη θα δείξουμε τελικά το ποια είναι η οικονομική τους ερμηνεία.

Εάν θεωρήσουμε λοιπόν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής:

$$\begin{aligned} &\max y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &s.t\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, i = 1, 2, \ldots, n \\ &x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιαστές Langrange και Οικονομική ερμηνεία II

Οι συνθήκες πρώτης τάξης της συνάρτησης Langrange ορίζουν ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων. Εαν θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$x_1^* = x_1^*(b), x_2^* = x_2^*(b), \ldots, x_n^* = x_n^*(b), \lambda^* = \lambda^*(b)$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω σχέση στην αρχική έχουμε ότι

$$y = f\left(x_1^*(b), \ldots, x_n^*(b)\right) \kappa\alpha\iota$$

$$g\left(x_1^*(b), \ldots, x_n^*(b)\right) = b$$

Με χρήση του κανόνα αλυσίδας των παραπάνω σχέσων ως προς b έχουμε

$$\frac{\partial y^*}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n^*}\frac{\partial x_n^*}{\partial b},$$

$$1 = \frac{\partial g}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n^*}\frac{\partial x_n^*}{\partial b}$$

Πολλαπλασιαστές Langrange και Οικονομική ερμηνεία III

Εάν $\dfrac{\partial y^*}{\partial b} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1^*}\dfrac{\partial x_1^*}{\partial b} + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n^*}\dfrac{\partial x_n^*}{\partial b}, (-)$ τότε

$$\lambda^* = \lambda^* \left(\frac{\partial g}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n^*}\frac{\partial x_n^*}{\partial b} \right)$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i^*}\frac{\partial x_i^*}{\partial b} \right) - \lambda^* \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial b} \right) + \lambda^* = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1^*} - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1^*} \right)\frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \lambda^*$$

Ομως το σημείο (x^*, λ^*) ικανοποιεί την συνθήκη επαφής όποτε έχουμε ότι:

$$\frac{\partial y^*}{\partial b} = \frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial b} = \lambda^*$$

Συγκριτική Στατική Ι

Η συγκριτική στατική ασχολείται με την μεταβολή των ενδογενών μεταβλητών ενός μοντέλου όταν μεταβάλλοται οι τιμές των εξωγενών μεταβλητών αυτού.

Ως πολλαπλασιαστή συγκριτικής στατικής σε μια οικονομική συνάρτηση Υ ενός υποδείγματος την μερική παράγωγο $\dfrac{\partial f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)}{\partial \alpha}$

Συγκριτική Στατική ΙΙ

Τα τοπικά ακρότατα είναι λύσεις (σημεία ισορροπίας) και αποτελεούν αντικείμενα συγκριτική στατικής ανάλυσης. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση της μορφής $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)$

Τότε εφαρμόζοντας την ανάλογη διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε τα τοπικά ακρότατα λύνοντας το σύστημα των

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)}{\partial x_j} = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Εάν οι συνθήκες του θεώρηματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων ικανοποιούνται τότε υπάρχουν συναρτήσεις

$x_i^* = x_i^*(a), i = 1, 2, \ldots, n$ (choice functions) οι οποίες εκφράζουν τις βέλτιστες τιμές των x_i^* των μεταβλητών χ_i για τις παραμέτρους α.

Συγκριτική Στατική ΙΙΙ

Με αντικατάσταση θα μπορούμε να έχουμε τις συναρτήσεις με την παρακάτω μορφή ως σύνθετες συναρτήσεις:

$$q_j\left(x_1^*(a), x_2^*(a), \ldots, x_n^*(a); a\right),\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Με αλυσωτή παραγώγιση θα μπορούσαμε ως προς α θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & & f_{nn} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial a \\ \\ \partial x_n^* / \partial a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{1a} \\ \cdots \\ -f_{na} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial a} = \frac{\begin{vmatrix} f_{1a} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{na} & & f_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & & f_{nn} \end{vmatrix}}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial a} = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1a} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & & f_{na} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & & f_{nn} \end{vmatrix}}$$

Ιακωβιανή Ορίζουσα

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

με κοινό πεδίο ορισμού $A \subseteq R^n$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παραγώγοι $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα των παραπάνω συναρτήσεων καλείται η παρακάτω ορίζουσα:

$$\frac{D(\ )}{D} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$$

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις Ι

Μια συνάρτηση f(P) θα λέγεται κυρτή σε ένα σύνολο A εάν ισχύει ότι:

$$f(y) \geq f(X) + f^{'}(X)(Y - X), \forall X, Y \in A,$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), f^{'}(X) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Αντίστοιχα κοίλη εάν

$$f(y) \leq f(X) + f^{'}(X)(Y - X), \forall X, Y \in A,$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), f^{'}(X) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Αντίστοιχα γνησίως κυρτή ή κοίλη εάν οι ανισώσεις είναι γνήσιες.

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις II

Θεώρημα 1: Εάν οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες του εσιανού πίνακα της συνάρτησης f είναι μη αρνητικές τότε είναι κυρτή δηλαδή $|\mathbf{H}_i| \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n$

Αντίστοιχα κοίλη εάν τα πρόσημα των ελάσσονων οριζουσών εναλλασονται: $|\mathbf{H}_1| \leq 0, |\mathbf{H}_2| \geq 0, |\mathbf{H}_3| \leq 0$

Θεώρημα 2: Εάν η f(x) είναι κυρτή (κοίλη) και το P κρίσιμο σημείο αυτής $\vec{\nabla} f(P) = 0$ τότε το P είναι ολικό ελάχιστο (μέγιστο).

Θεώρημα 3: Εάν η f(x) είναι γνησιώς κυρτή (κοίλη) και το P κρίσιμο σημείο αυτής τότε το P είναι ολικό μοναδικό ελάχιστο (μέγιστο)

Οιονεί κυρτές και κοίλες συναρτήσεις Ι

Μια συνάρτηση f(P) θα λέγεται οιονεί κοίλη σε ένα σύνολο Α εάν ισχύει ότι:

$$f(\lambda \mathrm{X} + (1-\lambda)\mathrm{Y}) \geq \min\left[f(X), f(Y)\right], \forall X, Y \in A$$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Αντίχοιγα οιονεί κυρτή εάν

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \max\left[f(X), f(Y)\right] \forall X, Y \in A$$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Οιονεί κυρτές και κοίλες συναρτήσεις ΙΙ

Θεώρημα 1: Εάν οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες της περιφραγμένης εσιαννής είναι όλες αρνητικές τότε είναι οιονεί κυρτή δηλαδή $\left|\mathbf{H}_{\pi i}\right| \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{i}=\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}$

Αντίχοιχα οιονεί κοίλη εάν τα πρόσημα των ελάσσονων οριζουσών εναλλασονται (για n άρτιος) ή .

$\left|\mathbf{H}_{\pi}\right| < \mathbf{0}, \boldsymbol{n}$ **περιττος**

Περιφραγμένη εσσιανή της συνάρτησης $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ του πίνακα (n+1)(n+1)

$$
\mathrm{H}_{\pi}(f)=\begin{vmatrix}
0 & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\
f_1 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\
f_2 & & & \ldots & f_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & f_{3n} \\
f_n & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{4n}
\end{vmatrix}
$$

Οιονεί κυρτές και κοίλες συναρτήσεις ΙΙΙ

Πρόταση: Για μια συνάρτηση f(x1,x2) με συνεχείς μερικές παραγώγους 2ής τάξης και περιφραγμένη εσιαννή $|\mathbf{H}_\pi|$ ισχύει ότι εάν

1. $|\mathbf{H}_\pi| > 0$ για κάθε (x1,x2) στο σύνολο Α τότε η f είναι οιονεί κοίλη στο Α.
2. $|\mathbf{H}_\pi| < 0$ για κάθε (x1,x2) στο σύνολο Α τότε η f είναι οιονεί κοίλη στο Α.
3. Να γίνουν εφαρμογές σε συναρτήσεις παραγωγής CD.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ Ι

Για παράδειγμα η συνάρτηση παραγωγής εμφανίζει τις εξής ιδιότητες:

1. Είναι οιονεί κοίλη.
2. Εάν κάποιος συντελεστής είναι 0 τότε και η παραγωγή είναι 0.
3. Είναι αύξουσα ως προς κάθε συντελεστή παραγωγής.
4. Τα οριακά προιόντα αρχικά είναι αύξουσα αλλά μετά απο ένα επίπεδο γίνονται φθίνουσα.

Θεώρημα Περιβάλλουσας (Δεσμευμένη)

Εάν $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ μια ενδογενής μεταβλητή, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ΄μια παράμετρος,για κάθε Α υπάρχει μια μοναδική θέση x*(α) όπου βελτιστοποιείται η συνάρτηση f(x,α) που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

$f^*(\alpha) = f\left(x^*(\alpha), \alpha\right)$ βέλτιστη τιμή της συνάρτησης

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial f \alpha_j} = \frac{\partial f}{\partial f \alpha_j} f\left(x^*(a), a\right)$$

Ορισμός

Εάν οι συναρτήσεις παραγωγής και κόστους ενός προιόντος τιμής p σε μια τέλεια ανταγωνιστική αγορά δίνονται ως εξής: $Q = f(K,L), TC = rK + wL$

Τότε ορίζουμε ως συναρτήσεις ζήτησης των παραγωγικών συντελεστών $K^* = g(p,w,r), L^* = h(p,w,r)$

Όπου K^*, L^* οι τιμές που μεγιστοποιούν το κέρδος.

$$W(p,w,r) = Q(K^*, L^*)$$ ← Συνάρτηση προσφοράς

$$\Pi(g,h) = \Pi(K^*, L^*)$$ ← Συνάρτηση κέρδους

Λήμμα Hotelling's

Για την συνάρτηση $\Pi = pf(K,L) - rK - wL$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial p}(p,r,w) = Q\left(K^*(p,r,w), L^*(p,r,w)\right) = F(p,r,w)$$
$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial r}(p,r,w) = -K^* = g(p,r,w)$$
$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial w}(p,r,w) = -L^* = h(p,r,w)$$

Μας δείχνουν την επίδραση που έχει στο μέγιστο κέρδος μια μεταβολή των παραμέτρων p,w,r.

Λήμμα Shepard’s

Το λήμμα του Shepard στηρίζεται στην πρόταση ότι η μερική παράγωγος της συνάρτησης ελαχίστου κόστους ως προς έναν παραγωγικό συντελεστή προσδιορίζει την συνάρτηση ζήτησης του συντελεστή.

Να βρεθεί η συνάρτηση παραγωγής εάν η συνάρτηση ελαχίστου κόστους δίνεται ως εξής:

$$TC(p,r,w)=\frac{y}{A}\left[r\left(\frac{aw}{r(1-a)}\right)^{1-a}+w\left(\frac{r(1-a)}{aw}\right)^{a}\right]$$

Θεώρημα Περιβάλλουσας (μη-Δεσμευμένη)

Εάν $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ μια ενδογενής μεταβλητή, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

Σε ένα πρόβλημα βελτιστιποίησης της συνάρτησης f(x,α) σε σύνολο που ορίζεται με περιορισμό ισότητας ισχύει:

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial f \alpha_j} = \frac{\partial L}{\partial f \alpha_j} f\left(x^*(a), \lambda^* a\right)$$

Όπου $f^*(\alpha)$ η συνάρτηση βέλτιστης τιμής και $\frac{\partial L}{\partial f \alpha_j}$ υπολογίζεται στην βέλτιστη λύση.

ΚΟΙΛΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER I

Στα προβλήματα μεγιστοποίησης που έχουμε ασχοληθεί κυριαρχεί η περίπτωση όπου οι περιορισμοί είναι πάντα ισότητες. Ωστόσο, το παραπάνω δεν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα και περιορισμοί οι οποίοι είναι ανισο-ισότητές μπορεί να υπάρχουν σε αρκετά προβλήματα βελτιστοποίησης.Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται προβλήματα κοίλου προγραμματισμού και καλούνται έτσι για να ξεχωρίσουν απο αυτά του γραμμικού προγραμματισμού. Η λέξη κοίλος εμφανίζεται επειδή εμείς υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις είναι κοίλες. Το πρόβλημα έχει την κάτωθι μορφή:

$$\begin{aligned}
&\max\ f(x_1, x_2) \\
&s.t\ \ g(x_1, x_2) \geq 0 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

ΚΟΙΛΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER II

Μια βασική προσέγγιση στον χειρισμό των ανισωτικών περιορισμών είναι η μετατροπή τους σε ισοδύναμους εξισωτικούς περιορισμούς και στην συνέχεια η εφαρμογή των πολλ/στων Langrange. Η κλασσική αντιμετώπιση χρησιμοποιεί την ιδέα των ενεργών-ανενεργών περιορισμών.

$$g(x_1, x_2) + s = b, s \geq 0$$

$$g(x_1^*, x_2^*) < b$$

$$g(x_1^*, x_2^*) = b$$

Ανενεργός

Ενεργός

ΚΟΙΛΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER III

Συνθήκη συμπληρωματικής χαλαρότητας:

Εάν ο περιορισμός είναι χαλαρός τότε λ=0 ενώ εάν είναι ενεργός τότε παίρνει θετικές τιμές.

$$\nabla f\left(x^{*}\right)=\lambda g\left(x^{*}\right) \Leftrightarrow \nabla f\left(x^{*}\right)-\lambda g\left(x^{*}\right)=0$$

Η παραπάνω συνθήκη είναι συμπληρωματική καθώς το ένα συμπληρώνει το άλλο και εκφράζεται μέσω της σχέσης $\lambda\left[g\left(x_1, x_2\right)-b\right]=0$ και όχι μέσω της μερικής παραγώγου.

ΚΟΙΛΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER III

Οπως και στα προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούςέτσι και στο παραπάνω πρόβλημα

$$\max f(x_1, x_2)$$
$$s.t \ g(x_1, x_2) \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Υπάρχουν αναγκαίες σνθήκες πρώτης τάξης οι οποιες μας παρέχουν λύσεις. Οι συνθήκες αυτές καλούνται συνθήκες Kuhn-Tucker. Για να δημιοργήσουμε τις συνθήκες Kuhn-Tucker για την λύση του παραπάνω προβλήματος όπου και οι δύο συναρτήσεις f,g είναι κοίλες και παραγωγίσιμες ενεργούμε ως εξής:

1. Σχηματίζουμε την συνάρτηση Langrange

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

ΚΟΙΛΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER IV

2.Στην συνέχεια μεγιστοποιούμε ως προς τις μεταβλητές x_1 και x_2 ελαχιστοποιούμε ως προς την μεταβλητή λ.

3. Οδηγούμαστε έτσι στις παρακάτω Κ-Τ συνθήκες (*εύρεση σαγματικού σημείου*):

$$\frac{\partial L\left(x_1, x_2, \lambda\right)}{\partial x_i} = f\left(x_1^*, x_2^*\right) + \lambda^* g_i\left(x_1^*, x_2^*\right) \leq 0, x_1^* \geq 0$$

$$x_i \frac{\partial L\left(x_1, x_2, \lambda\right)}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \ldots,$$

$$\frac{\partial L\left(x_1, x_2, \lambda\right)}{\partial \lambda} = g_i\left(x_1^*, x_2^*\right) \geq 0, \lambda \geq 0$$

$$\lambda^* \frac{\partial L\left(x_1, x_2, \lambda\right)}{\partial \lambda} = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ KUHN-TUCKER

Στο πρόβλημα
$$\max f(x_1, x_2)$$
$$s.t\ g(x_1, x_2) \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
εάν οι συναρτήσεις f,g είναι κοίλες και παραγωγίσιμες και εάν υπάρχει σημείο x_1^{**}, x_2^{**} τέτοιο ώστε $g\left(x_1^{**}, x_2^{**}\right) > 0$ (Slater condition) τότε υπάρχει ένας πολλαπλασιαστής Langrange λ*τέτοιος ώστε οι συνθήκες Kuhn-Tucker, που δίνονται στον προηγούμενο ορισμό να είναι ανάγκαίες και ικανές ώστε το σημείο x_1^{*}, x_2^{*} να αποτελεί λύση στο πρόβλημα κοίλου προγραμματισμού (*καλό θα ήταν να διαβάζατε την απόδειξη του θεωρήματος*).

Μια χρήσιμη εφαρμογή θα μπορούσε να γίνει στο πρόβλημα του καταναλωτή:
$$\max u(x_1, x_2)$$
$$s.t\ m - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ KUHN-TUCKER (αλλιώς)

Στο πρόβλημα

$$\begin{aligned} &\max f(x_1, x_2) \\ &s.t\ g(x_1, x_2) \leq b \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

εάν οι συναρτήσεις f,g είναι κοίλες και παραγωγίσιμες και εάν υπάρχει σημείο (μέγιστο) $(x_1^*, x_2^*) = x^*$ τέτοιο ώστε $\nabla g(x_1^*, x_2^*) = \left[\frac{\partial g(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}\right] \neq [0,0]$ (Slater condition-Συνθήκη Κανονικότητας)

τότε υπάρχει ένας πολλαπλασιαστής Langrange λ* τέτοιος ώστε

$$\nabla f(x_1^*, x_2^*) = \lambda \nabla f(x_1^*, x_2^*), \left[\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = 0\right] \leftarrow$$ Συνθήκη επαφής

$$\lambda^*\left[g(x_1^*, x_2^*) - b\right] = 0 \leftarrow$$ Συνθήκη συμπληρωματικής χαλαρότητας

$$\lambda^* \geq 0 \leftarrow$$ Συνθήκη μη αρνητικότητας

$$g(x_1^*, x_2^*) \leq b \leftarrow$$ Συνθήκη εφικτότητας

ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER-ΠΟΛΛΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ & ΠΟΛΛΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ (1)

Δίνεται το πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
&\max\ f(x_1, x_2, \ldots, x^n) \\
&s.t\ g^1(x_1, x_2, \ldots, x^n) \geq 0 \\
&\quad g^2(x_1, x_2, \ldots, x^n) \geq 0 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad g^m(x_1, x_2, \ldots, x^n) \geq 0 \\
&\quad x_1, x_2, \ldots, x^n \geq 0
\end{aligned}$$

Εάν οι συναρτήσεις $f, g^j, j=1,2,\ldots,m$ είναι κοίλες και παραγωγίσιμες και εάν υπάρχει ένα σημείο $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right): g\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) > 0, j=1,2,\ldots,m$ τότε υπάρχουν m πολλαπλασιαστές Langrange λ_j^* έτσι ώστε οι παρακάτω συνθήκες να είναι αναγκαίες και ικανές για να αποτελεί το σημείο $\left(x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_n^{**}\right)$ λύση σε αυτό το πρόβλημα:

ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER-ΠΟΛΛΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ & ΠΟΛΛΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ (2)

Πρόβλημα:

$$f_i\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) - \sum \lambda_j^* g_i^j\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) \leq 0, \quad x_i^* \geq 0$$

$$x_i^*\left(f_i - \sum \lambda_j^* g_i^j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$g^j\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) \geq 0, \quad \lambda_j^* \geq 0$$

$$\lambda_j^* g^j\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) = 0, \quad \text{j=1,2,...,m}$$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER-ΠΟΛΛΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ & ΠΟΛΛΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ (3)-Εφαρμογή

Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο πρόβλημα του καταναλωτή εισάγοντας και χρονικό περιορισμό

$$\begin{aligned} &\max u(x_1, x_2) \\ &s.t\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ &\quad\ \mathrm{t}_1 x_1 + t_2 x_2 \leq T \\ &\quad\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ALPHA C. CHIANG, KEVIN WAINWRIGHT
- Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών, Hoy Michael, Livernois John, McKenna Chris, Stengos Thanasis.(Κεφάλαια 13 έως 15)
- Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά, Ξεπαπαδέας Αναστάσιος Π., Γιαννίκος Ιωάννης Χ. (Κεφάλαια 2&3 απο το πράσινο βιβλίο)
- Μαθηματικά οικονομικής ανάλυσης, Τσουλφίδης Λευτέρης
- https://mitpress.mit.edu/books/mathematics-economics
- Να λυθούν οι ασκήσεις που μοιράστηκαν στην τάξη!

Επικοινωνία με τον Διδάσκοντα

- E-mail:Kounetas@upatras.gr
- Ώρες Γραφείου

Δευτέρα: 11.00-13.00

Τρίτη:11.00-12.00

(*Η κατόπιν επικοινωνίας με τον διδάσκοντα*)