ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ενότητα 7: **Έλεγχοι διαρθρωτικών μεταβολών**

Ιωάννης Βενέτης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Σχολή Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Πατρών

Σκοποί Ενότητας

Περιεχόμενα ενότητας

7.1 Εισαγωγή

Μία από τις βασικότερες υποθέσεις του απλού γραμμικού υποδείγματος, στην οποία συνήθως δε δίνεται η πρέπουσα σημασία διότι θεωρείται δεδομένη, είναι η σταθερότητα των παραμέτρων. Δηλαδή, έχουμε (άτυπα) υποθέσει ότι το υπόδειγμα προς εκτίμηση δίνεται από

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + u_t, \qquad t = 1, \ldots, T$$

και δεν ισχύει (γιά παράδειγμα) ότι

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_{11} + \beta_{21} x_{2t} + u_t, & t &= 1, .., T_0 \\ y_t &= \beta_{12} + \beta_{22} x_{2t} + u_t, & t &= T_0 + 1, \ldots, T \end{aligned}$$

όπου $1 \leq T_0 < T$ με $\beta_{11} \neq \beta_{12}$ και/ή $\beta_{21} \neq \beta_{22}$.
Είναι εμφανές ότι η πιθανή μη σταθερότητα των παραμέτρων αναφέρεται σε ένα βασικότατο συστατικό του υποδείγματος, γι'αυτό και οι έλεγχοι για τη σταθερότητα των παραμέτρων βαπτίζονται συχνά ως **έλεγχοι διαρθρωτικών ή δομικών μεταβολών**. Υπάρχει ένας αριθμός αιτιών για διαρθρωτική μεταβολή ή μεταβαλλόμενες τιμές παραμέτρων στα οικονομετρικά υποδείγματα.

7.1 Εισαγωγή

- **Οικονομικές κρίσεις, γενικευμένες απεργίες ή γενικά εξωγενείς παράγοντες** (δεν καθορίζονται από το υπόδειγμα ή δεν ενσωματώνονται στην οικονομική θεωρία), όπως αιφνίδιες διαταραχές στην προσφορά (π.χ., πετρελαϊκές κρίσεις 1973-1974, 1979-1980).
- **Αλλαγές στην οικονομική πολιτική** μπορούν να επιφέρουν μεταβολές στις τιμές παραμέτρων.
- **Αλλαγές καθεστώτος (regime shifts) και εγγενείς μη - γραμμικότητες** μπορεί να συντελούν στην μεταβολή των παραμέτρων χρονικά. Για παράδειγμα θεωρήστε το παρακάτω υπόδειγμα

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta_1 + \beta_2 x_t + (\beta_1^* + \beta_2^* x_t) F_t + u_t \\
&= (\beta_1 + \beta_1^* F_t) + (\beta_2 + \beta_2^* F_t) x_t + u_t \\
&= \delta_{1t} + \delta_{2t} x_t + u_t
\end{aligned}
$$

το οποίο ουσιαστικά υποθέτει ότι τόσο ο σταθερός όρος όσο και ο συντελεστής κλίσης μεταβάλλονται χρονικά.

7.1 Εισαγωγή

Η εκτίμηση του υποδείγματος θα απαιτούσε την εκτίμηση των $F_1, \ldots, F_T$ και των $\beta_1, \beta_2, \beta_1^*, \beta_2^*$, σ_u^2, δηλαδή συνολικά $T+5$ παραμέτρων. Είναι εμφανές ότι ο συγκεκριμένος αριθμός ξεπερνά το μέγεθος του δείγματος, άρα η εκτίμηση καθίσταται αδύνατη.
Γι'αυτό το λόγο συχνά θα μειώνουμε τη διάσταση του προβλήματος προβαίνοντας σε υποθέσεις σχετικά με τον μηχανισμό γέννησης της F_t. Για παράδειγμα, υποθέτοντας ότι

$$F_t = 1 - \exp\left\{-\gamma \left(x_t - c\right)^2\right\}$$

έχουμε μόνο δύο παραμέτρους, τις γ και c, να χαρακτηρίζουν την εκτίμηση του F_t. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη εκθετική συνάρτηση ομαλής μετάβασης, όταν το επίπεδο της μεταβλητής x_t είναι ίσο με c (ή αρκετά κοντά στο c), τότε $F_t = 0$ και το υπόδειγμα γράφεται ως

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$$

Καθώς η x_t απομακρύνεται από το επίπεδο c, τότε η συνάρτηση F_t τείνει στο 1 (δηλαδή $F_t \to 1$) και το υπόδειγμα γράφεται ως

$$y_t = (\beta_1 + \beta_1^*) + (\beta_2 + \beta_2^*)\, x_t + u_t$$

7.1 Εισαγωγή

Η ταχύτητα της μετάβασης εκφράζεται από την παράμετρο γ ενώ το τετράγωνο $(x_t - c)^2$ εκφράζει συμμετρία στη συμπεριφορά της F_t για θετικές $x_t - c > 0$ και αρνητικές $x_t - c < 0$ αποκλίσεις.

Συνεπώς, αν οι συντελεστές μεταβάλλονται «συχνά», τότε χάνεται το νόημα της απεικόνισης μέσω μίας γραμμικής σχέσης και η ερμηνεία τους είτε χάνει το περιεχόμενό της είτε γίνεται εξαιρετικά δύσκολη.
Θα προβούμε λοιπόν στη συνέχεια σε παρουσίαση μερικών ελέγχων σταθερότητας των παραμέτρων, οι οποίοι απλουστευτικά προϋποθέτουν ότι οι διαρθρωτικές μεταβολές δεν είναι συχνές καθώς και ότι το σημείο μεταβολής είναι γνωστό.
Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται μία εισαγωγή σε πιο σύνθετα προβλήματα όπου το σημείο μεταβολής στις παραμέτρους θεωρείται άγνωστο και εκτιμάται μέσω συγκεκριμένων στατιστικών.

7.2 Έλεγχος προβλεπτικής αποτυχίας Chow

Ο έλεγχος προβλεπτικής αποτυχίας[1] του Chow βασίζεται στο συμπέρασμα ότι αν το $k \times 1$ διάνυσμα παραμέτρων β ενός γραμμικού υποδείγματος δεν παραμένει σταθερό σε όλο το «μήκος» του δείγματος αλλά μεταβάλλεται, π.χ., β_1 για συγκεκριμένο υπο-δείγμα (subsample) μεγέθους n_1 και β_2 για το υπο-δείγμα μεγέθους $n_2 = n - n_1$, τότε η πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής την υποπερίοδο n_2 υιοθετώντας τον εκτιμητή ΕΤ $\hat{\beta}_1$ με βάση την πρώτη υποπερίοδο δεν θα είναι ικανοποιητική. Δηλαδή το σφάλμα πρόβλεψης θα είναι «μεγάλο».

Αναλυτικά, έστω ότι προβαίνουμε στην ακόλουθη (αυθαίρετη ή καθοδηγούμενη από τη θεωρία) διαμέριση του δείγματος $n_1 + n_2 = n$ και ανάλογα διαμερίζουμε τη μήτρα παρατηρήσεων X σε δύο υπο-μήτρες με διαστάσεις $n_1 \times k$ και $n_2 \times k$ αντίστοιχα. Δηλαδή θέτουμε

$$X = \begin{pmatrix} \underset{n_1 \times k}{X_1} \\ \underset{n_2 \times k}{X_2} \end{pmatrix}$$

[1] Forecast test ή forecast failure test

7.2 Έλεγχος προβλεπτικής αποτυχίας Chow

Κάνοντας χρήση της μεθόδου ΕΤ εκτιμούμε το $k \times 1$ διάνυσμα παραμέτρων

$$\hat{\beta}_1 = (X_1' X_1)^{-1} X_1' y_1$$

με βάση την «πρώτη» διαμέριση. Κάτω από τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : y = X\beta + u$$

ότι το διάνυσμα των παραμέτρων β δε μεταβάλλεται από διαμέριση σε διαμέριση, η πρόβλεψη των n_2 παρατηρήσεων της y_2 δίνεται από $\hat{y}_2 = X_2\hat{\beta}_1$. Το σφάλμα πρόβλεψης (συμβολίζεται με d και είναι διαστάσεων $n_2 \times 1$) είναι η διαφορά

$$d = y_2 - \hat{y}_2$$

Αναμένουμε το σφάλμα πρόβλεψης d να είναι «μεγάλο» όταν η μηδενική υπόθεση δεν ευσταθεί, δηλαδή όταν το διάνυσμα των παραμέτρων μεταβάλεται από β_1 σε β_2 ή εναλλακτικά όταν για το διάνυσμα των παραμέτρων δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, αλλά η $\beta_1 \neq \beta_2$.

7.2 Έλεγχος προβλεπτικής αποτυχίας Chow

Η στατιστική θεωρία (κάτω από υποθέσεις) προτείνει ότι

$$CHOW_f = \frac{d' \left[\left(I_{n_2} + X_2 \left(X_1' X_1 \right)^{-1} X_2' \right) \right]^{-1} d}{\hat{u}_1' \hat{u}_1} \frac{n_1 - k}{n_2} \sim F_{n_2, n_1 - k}$$

Μεγάλες τιμές της στατιστικής $CHOW_f$ σε σύγκριση με την κατανομή F με n_2 και $n_1 - k$ βαθμούς ελευθερίας υποδηλώνουν απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης περί σταθερότητας των παραμέτρων.

7.2.1 Προσέγγιση μέσω «περιορισμένης παλινδρόμησης»

Εφόσον έχουμε διαμερίσει το δείγμα, αν θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα των παραμέτρων μεταβάλλεται κατά την περίοδο πρόβλεψης (π.χ., από β σε κάποιο διάνυσμα δ), τότε μπορούμε να γράψουμε το διαμερισμένο υπόδειγμα ως

$$y_1 = X_1\beta + u_1 \tag{1}$$

και

$$\begin{aligned} y_2 &= X_2\delta + u_2 \\ &= X_2\delta + X_2\beta - X_2\beta + u_2 \\ &= X_2\beta + X_2(\delta - \beta) + u_2 \\ &= X_2\beta + \gamma + u_2 \end{aligned} \tag{2}$$

όπου το γ είναι το $n_2 \times 1$ διάνυσμα $X_2(\delta - \beta)$. Διαπιστώνουμε ότι μόνο αν $\beta = \delta$ ισχύει η ισότητα $\gamma = 0$. Άρα η μηδενική υπόθεση $H_0 : \beta = \delta$ είναι ισοδύναμη με την υπόθεση $H_0 : \gamma = 0$.

7.2.1 Προσέγγιση μέσω «περιορισμένης παλινδρόμησης»

το **μη περιορισμένο υπόδειγμα** (όπου η υπόθεση $H_0 : \gamma = 0$ δεν επιβάλλεται να ισχύει) μπορεί να γραφεί και ως

$$y = X\beta + X^*\gamma + u \tag{3}$$

με

$$X^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ I_{n_2} \end{pmatrix}$$

ενώ υπό το πρίσμα των n_2 περιορισμών $H_0 : \gamma = 0$ έχουμε το **περιορισμένο υπόδειγμα**

$$y = X\beta + u_R \tag{4}$$

7.2.1 Προσέγγιση μέσω «περιορισμένης παλινδρόμησης»

Άρα μέσω της προσέγγισης της σύγκρισης της προσαρμογής δύο υποδειγμάτων όπου στο ένα επιβάλλουμε περιορισμούς, υπόδειγμα (4), ενώ στο άλλο δεν επιβάλλουμε περιορισμούς, υπόδειγμα (3), έχουμε τα ακόλουθα βήματα προς διεκπεραίωση του ελέγχου πρόβλεψης Chow:

1. Εκτιμούμε το **μη περιορισμένο υπόδειγμα** (3) με Ε.Τ και κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}'\hat{u}$.
2. Εκτιμούμε με ΕΤ το **περιορισμένο υπόδειγμα** (4) και κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}_R'\hat{u}_R$.
3. Υπολογίζουμε τη στατιστική τύπου F,

$$CHOW_f = \left(\frac{\hat{u}_R'\hat{u}_R - \hat{u}'\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}}\right)\left(\frac{n_1 - k}{n_2}\right) \sim F_{n_2, n_1 - k}$$

Για μεγάλες τιμές της $CHOW_f$ και δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση συγκρίνοντας με τις κριτικές τιμές της κατανομής $F_{n_2, n_1 - k}$.

7.2.1 Προσέγγιση μέσω «περιορισμένης παλινδρόμησης»

Παρατηρούμε ότι ο μεγάλος αριθμός των επιπλέον παλινδρομητών, n_2, στο μη περιορισμένο υπόδειγμα (3) δεν ενδείκνυται πρακτικά για την εφαρμογή του ελέγχου. Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την εξής στατιστική (η οποία είναι ισοδύναμη με την παραπάνω),

ΒΗΜΑ 1 Εκτιμούμε το υπόδειγμα $y = X\beta + u_R$ και κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}_R'\hat{u}_R$.

ΒΗΜΑ 2 Εκτιμούμε με ΕΤ το υπόδειγμα $y_1 = X_1\beta + u_1$ μόνο για την υποπερίοδο n_1 ($> n_2$) και κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}_1'\hat{u}_1$.

ΒΗΜΑ 3 Υπολογίζουμε τη στατιστική F_f,

$$F_f = \left(\frac{\hat{u}_R'\hat{u}_R - \hat{u}_1'\hat{u}_1}{\hat{u}_1'\hat{u}_1}\right)\left(\frac{n_1 - k}{n_2}\right) \sim F_{n_2, n_1 - k}$$

Για μεγάλες τιμές της F_f και δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση συγκρίνοντας με τις κριτικές τιμές της κατανομής F.

7.3 Έλεγχος σημείου διακοπής κατά Chow

Ο έλεγχος σημείου διακοπής[2] του Chow ελέγχει για διαφορετικά διανύσματα παραμέτρων

$$\underset{k\times 1}{\beta_1} \neq \underset{k\times 1}{\beta_2}$$

σε δύο υπο-περιόδους του δείγματος (διαμέριση $n_1 + n_2 = n$). Δηλαδή θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2$$

στο (συνδυασμένο) υπόδειγμα

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

[2] Breakpoint test

7.3 Έλεγχος σημείου διακοπής κατά Chow

Μέσω της προσέγγισης της περιορισμένης παλινδρόμησης έχουμε ότι

$$y = X_1^* \beta_1 + X_2^* \beta_2 + u \quad \text{μη περιορισμένο υπόδειγμα} \tag{5}$$

ενώ επιβάλλοντας τους k περιορισμούς $\beta_1 = \beta_2 (= \beta)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y &= X_1^* \beta + X_2^* \beta + u_R \\ &= (X_1^* + X_2^*) \beta + u_R \Leftrightarrow \\ y &= X\beta + u_R \quad \text{περιορισμένο υπόδειγμα} \end{aligned} \tag{6}$$

όπου

$$X_1^* = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Άρα, μέσω της προσέγγισης της σύγκρισης της προσαρμογής δύο υποδειγμάτων όπου στο ένα επιβάλλουμε τους περιορισμούς, υπόδειγμα (6), ενώ στο άλλο δεν επιβάλλουμε περιορισμούς, υπόδειγμα (5), έχουμε τα ακόλουθα βήματα,

7.3 Έλεγχος σημείου διακοπής κατά Chow

1. Εκτιμούμε το **μη περιορισμένο υπόδειγμα** (5) με ΕΤ και κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}'\hat{u}$. Προσοχή, το **μη περιορισμένο υπόδειγμα** έχει $n-2k$ βαθμούς ελευθερίας, αφού έχουμε $k+k=2k$ παραμέτρους
2. Εκτιμούμε με ΕΤ το **περιορισμένο υπόδειγμα** (6) και κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}_R'\hat{u}_R$. Έχουμε επιβάλλει k περιορισμούς
3. Υπολογίζουμε τη στατιστική F_B ως

$$F_B = \frac{\left(\hat{u}_R'\hat{u}_R - \hat{u}'\hat{u}\right)}{\hat{u}'\hat{u}} \frac{(n-2k)}{k} \sim F_{k,n-2k}$$

Όταν η τιμή της στατιστικής F_B είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή $F_{k,n-2k}^{0.05}$ από τους σχετικούς πίνακες για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας 5%, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση περί σταθερότητας των παραμέτρων. Φυσικά, το επίπεδο σημαντικότητας δεν είναι υποχρεωτικά ίσο με 5%.

7.3 Έλεγχος σημείου διακοπής κατά Chow

Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος έλεγχος ενδείκνυται και για τον έλεγχο περισσότερων σημείων διακοπής **αρκεί το μέγεθος του δείγματος σε κάθε υπο-περίοδο να είναι μεγαλύτερο του αριθμού των παραμέτρων**, δηλαδή $n_i > k$. Όπως και με τον έλεγχο προβλεπτικής αποτυχίας, η κατασκευή δύο συνόλων ερμηνευτικών μεταβλητών, X_1^*, X_2^*, **μπορεί να είναι τεχνικά και πρακτικά δύσκολη**. Γι'αυτό σε εμπειρικές εφαρμογές ακολουθούμε τα παρακάτω τρία βήματα:

ΒΗΜΑ 1 Εκτιμούμε το υπόδειγμα $y = X\beta + u_R$ για το σύνολο των n παρατηρήσεων και κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}_R'\hat{u}_R$

ΒΗΜΑ 2 Εκτιμούμε με ΕΤ το υπόδειγμα για κάθε μία από τις $i = 1, \ldots, m$ υποπεριόδους με μέγεθος δείγματος στην κάθε μία ίσο με n_i. Κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}_i'\hat{u}_i$

BHMA 3 Υπολογίζουμε τη στατιστική F_B ως

$$F_B = \frac{\hat{u}_R'\hat{u}_R - \left(\hat{u}_1'\hat{u}_1 + \hat{u}_2'\hat{u}_2 + \ldots + \hat{u}_m'\hat{u}_m\right)}{\hat{u}_1'\hat{u}_1 + \hat{u}_2'\hat{u}_2 + \ldots + \hat{u}_m'\hat{u}_m} \frac{n-mk}{k} \sim F_{k,n-mk}$$

Όταν η τιμή της στατιστικής F_B είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή $F_{k,n-mk}^{0.05}$ από τους σχετικούς πίνακες για επίπεδο σημαντικότητας 5%, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση περί σταθερότητας των παραμέτρων.

7.3 Έλεγχος σημείου διακοπής κατά Chow

Ο έλεγχος σημείου διακοπής F_B ενδείκνυται για τον έλεγχο πολλαπλών σημείων μεταβολής των παραμέτρων, αλλά και για τον έλεγχο μεταβολής σε υπο-ομάδες συντελεστών. Ένα βασικό εμπειρικό μειονέκτημα του ελέγχου είναι ότι το μέγεθος του δείγματος σε κάθε υπο-περίοδο πρέπει να είναι μεγαλύτερο του αριθμού των ερμηνευτικών μεταβλητών. Στις εμπειρικές οικονομικές εφαρμογές, συχνά έχουμε μεγάλο αριθμό ερμηνευτικών μεταβλητών και ζητήματα ελέγχου διαρθρωτικών μεταβολών σε περιόδους πολέμων ή άλλων εξωγενών γεγονότων με μικρή χρονική διάρκεια (σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος και τον αριθμό των ερμηνευτικών μεταβλητών). Σε αυτές τις περιπτώσεις καταφεύγουμε στον έλεγχο προβλεπτικής αποτυχίας F_f της προηγούμενης ενότητας.

7.4 Έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής όταν το σημείο μεταβολής θεωρείται άγνωστο

Όλοι οι παραπάνω έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής (μεταβολής των παραμέτρων ενδιαφέροντος ενός υποδείγματος) υποθέτουν γνώση του σημείου μεταβολής. Παρότι δυνατό, κάτι τέτοιο δεν είναι συχνό στην οικονομετρική πρακτική. Επιπλέον, στην οικονομετρία συνηθίζουμε να «ελέγχουμε» τις υποθέσεις και όχι να τις επιβάλλουμε. Μία εξαιρετικά ενδιαφέρουσα στατιστική θα έλεγχε αν υπάρχει διακοπή, καθώς και το (χρονικό) σημείο στο οποίο αυτή εμφανίζεται. Δηλαδή θα «εκτιμούσαμε» το σημείο μεταβολής. Ο Andrews[3] (1993) έδειξε, μεταξύ άλλων, ότι μπορούμε να προβούμε σε μία επαναληπτική διαδικασία ελέγχων τύπου F, η οποία μπορεί να ελέγξει

(α) **αν υπάρχει** διαρθρωτική μεταβολή στις παραμέτρους και

(β) **που υφίσταται** η διαρθρωτική μεταβολή των παραμέτρων (σε ποιό χρονικό σημείο του δείγματος)

[3] Andrews, D.W.K. (1993). Tests for parameter instability and structural change with unknown change point. Econometrica, Vol. 61, Issue 4, 821-856

7.4 Έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής όταν το σημείο μεταβολής θεωρείται άγνωστο

Στην παρουσίασή μας θα βασιστούμε στον Bai[4] (1997), ο οποίος μελέτησε τη συμπεριφορά των παραπάνω ελέγχων επικεντρώνοντας την προσοχή του στο πολλαπλό υπόδειγμα παλινδρόμησης. Θα υιοθετήσουμε, όσο το δυνατόν, τους συμβολισμούς του συγκεκριμένου άρθρου.

Έστω λοιπόν ένα υπόδειγμα πολλαπλής παλινδρόμησης

$$y = \underset{T\times p}{X} \cdot \underset{p\times 1}{\beta} + u \tag{7}$$

όπου X η $T \times p$ μήτρα παρατηρήσεων και β το $p \times 1$ διάνυσμα ενδιαφέροντος.

[4] Bai, J. (1997) Estimation of a breakpoint in multiple regression models. The Review of Economics and Statistics, Vol. 79, No. 4, 551-563

7.4 Έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής όταν το σημείο μεταβολής θεωρείται άγνωστο

Αν θέλουμε να ελέγξουμε για πλήρη διαρθρωτική μεταβολή στο β (pure structural break), η οποία λαμβάνει χώρα στο σημείο $k \in (1, \ldots, T)$, τότε ορίζουμε τη μήτρα δεδομένων

$$\underbrace{Z_0(k)}_{T \times p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1,k+1} & x_{2,k+1} & \cdots & x_{p,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1,T} & x_{2,T} & \cdots & x_{p,T} \end{pmatrix}$$

και σχηματίζουμε το βοηθητικό υπόδειγμα

$$y = X\beta + Z_0(k)\delta + e(k) \tag{8}$$

Αν θέλουμε να ελέγξουμε για μερική διαρθρωτική μεταβολή στο β (partial structural break), η οποία λαμβάνει χώρα στο σημείο $k \in (1, \ldots, T)$, δηλαδή θέλουμε να ελέγξουμε αν ένα υποσύνολο του β μεταβάλλεται (έστω $q < p$ παράμετροι), τότε η μήτρα δεδομένων

7.4 Έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής όταν το σημείο μεταβολής θεωρείται άγνωστο

Η διαδικασία ελέγχου για ύπαρξη διαρθρωτικής μεταβολής στο υπόδειγμα (8), δηλαδή ο έλεγχος $H_0 : \delta = 0$, καθώς και η εύρεση του σημείου μεταβολής k έχει ως εξής:

ΒΗΜΑ 1. Εκτιμούμε το (7) με τη μέθοδο των ΕΤ και «κρατάμε» το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $S = \hat{u}'\hat{u}$.

ΒΗΜΑ 2. Στη συνέχεια για κάθε $k \in (1, \ldots, T)$ εκτιμούμε με ΕΤ το υπόδειγμα (8) και «κρατάμε» το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων

$$S_T(k) = \hat{e}'(k)\,\hat{e}(k) \quad , \quad k \in (1, \ldots, T)$$

και την εκτίμηση της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου

$$\hat{\sigma}^2(k) = \frac{S(k)}{T - p - q} \quad , \quad k \in (1, \ldots, T)$$

7.4 Έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής όταν το σημείο μεταβολής θεωρείται άγνωστο

Η διαδικασία ελέγχου για ύπαρξη διαρθρωτικής μεταβολής στο υπόδειγμα (8), δηλαδή ο έλεγχος $H_0 : \delta = 0$, καθώς και η εύρεση του σημείου μεταβολής k έχει ως εξής:

ΒΗΜΑ 3. Υπολογίζουμε τη στατιστική

$$F(k) = \frac{S - S(k)}{\hat{\sigma}^2(k)} \quad , \quad k \in (1, \ldots, T)$$

Το σημείο διαρθρωτικής μεταβολής βρίσκεται εκεί που μεγιστοποιείται η στατιστική $F(k)$, δηλαδή στο σημείο

$$\hat{k} = \arg \max_{k \in [\pi T, (1-\pi)T]} F(k)$$

7.4 Έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής όταν το σημείο μεταβολής θεωρείται άγνωστο

με την προϋπόθεση ότι η στατιστική F στο συγκεκριμένο σημείο $F\left(\hat{k}\right)$ ξεπερνά μία συγκεκριμένη κριτική τιμή, δηλαδή όταν $F\left(\hat{k}\right) > F_{\pi}^{\alpha}$, όπου α το επίπεδο σημαντικότητας και $\pi \in (0, 1)$ ένα ποσοστό επιλογής του ερευνητή που εξηγείται παρακάτω. Η συνάρτηση $[\cdot]$ δίνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος του δεκαδικού αριθμού $\cdot$ (greatest integer function ή floor function)

7.4 Έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής όταν το σημείο μεταβολής θεωρείται άγνωστο

Σημείωση 1: Θεωρητικά το k μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ $1 \leq k \leq T$, όμως πρακτικά ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε δείγμα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος του αριθμού των εκτιμημένων παραμέτρων. Συνήθως επιλέγουμε $1 < k_1 \leq k \leq k_2 < T$, όπου το k_1 αντιστοιχεί στο 15% των παρατηρήσεων από την αρχή του δείγματος, δηλαδή επιλέγουμε $\pi = 0.15$ άρα $k_1 = [\pi T]$, και το k_2 στο 15% των παρατηρήσεων από το τέλος του δείγματος, $k_2 = [(1-\pi)T] = T - k_1$. Το ποσοστό $\pi\%$ ονομάζεται και **«ποσοστό αποκοπής» (trimming factor)**. Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα δείγμα $T = 160$ παρατηρήσεων και επιλέξουμε το προτεινόμενο $\pi = 0.15$, τότε $k_1 = 24$ και $k_2 = 160 - 24 = 136$.

7.4 Έλεγχοι διαρθρωτικής μεταβολής όταν το σημείο μεταβολής θεωρείται άγνωστο

Σημείωση 2: Προσοχή, διότι η κατανομή της $F\left(\hat{k}\right)$ δεν είναι τυπική, με την έννοια ότι δεν εμπίπτει στις γνωστές $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ή χ^2_g ή F_{g_1,g_2} κατανομές ή σε οποιαδήποτε άλλη τυπική (δηλαδή γνωστή) κατανομή. Οι κριτικές τιμές F^{α}_{π} για επίπεδο σημαντικότητας α και «ποσοστό αποκοπής» π μπορούν να βρεθούν στον Andrews (1993) σελ. 840. Για παράδειγμα, όταν ελέγχουμε δύο (2) παραμέτρους με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 10\%$ και ποσοστό αποκοπής 15%, τότε $F^{0.10}_{0.15} = 10.01$, ενώ όταν ελέγχουμε για 4 μεταβλητές με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ και ποσοστό αποκοπής 15% τότε $F^{0.05}_{0.15} = 16.45$.

7.5 Ασκήσεις

Τέλος ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- Ιωάννης Α. Βενέτης (2013). **Εισαγωγή στην Οικονομετρία**, GOTSIS Εκδόσεις, Πάτρα, ISBN 978-960-9427-25-8