ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ενότητα 5: **Το πολλαπλό υπόδειγμα παλινδρόμησης**

Ιωάννης Βενέτης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Σχολή Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Πατρών

Σκοποί Ενότητας

Περιεχόμενα ενότητας

5.1 Εισαγωγή στο πολλαπλό υπόδειγμα

Το πολλαπλό υπόδειγμα παλινδρόμησης αποτελεί την άμεση γενίκευση του απλού γραμμικού υποδείγματος, εισάγοντας περισσότερες από μία ερμηνευτικές μεταβλητές στα δεξιά της εξίσωσης του υποδείγματος.
Έτσι η σχέση κατανάλωσης - διαθέσιμου εισοδήματος στο χρόνο μπορεί να περιγράφεται τώρα από την εξίσωση

$$ln(C_t) = \gamma_0 + \beta ln(Y_t) + \gamma_1 t + u_t \ , \ t = 1, 2, ..., T$$

Επιπλέον, περίτεχνη υποδειγματοποίηση της τάσης των μεταβλητών C_t, Y_t μπορεί να εισαχθεί στο υπόδειγμα υιοθετώντας πολυωνυμικές συναρτήσεις του χρόνου. Για παράδειγμα

$$ln(C_t) = \gamma_0 + \beta ln(Y_t) + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3 + u_t$$

Παράδειγμα 2. Αναφορικά με την εξίσωση των πραγματικών μισθών, πέραν της εκπαίδευσης, ένας μεγάλος αριθμός παραγόντων μπορεί να εισαχθεί και να αναλυθεί η επίδρασή τους στον μισθό. Για παράδειγμα, η επίδραση του φύλου του εργαζομένου μπορεί να αναλυθεί με βάση το υπόδειγμα

$$\ln(w_i) = \alpha + \beta \times \varepsilon\kappa\pi_i + \gamma \times \varphi\upsilon\lambda o_i + u_i$$

όπου $\varphi\upsilon\lambda o_i$ μία μεταβλητή που λαμβάνει τις τιμές 0 όταν ο i εργαζόμενος είναι γυναίκα και 1 όταν ο i εργαζόμενος είναι άνδρας[1].

[1] Τέτοιου είδους μεταβλητές οι οποίες μετρούν «ποιοτικά» χαρακτηριστικά και είναι δυαδικής φύσης - 0 και 1 - ονομάζονται ψευδομεταβλητές (dummy variables) ή δυαδικές μεταβλητές (binary variables).

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Για παράδειγμα ένα k-μεταβλητό υπόδειγμα μπορεί να γραφεί ως

$$y_i = \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + \ldots + \beta_k X_{k,i} + u_i, \ \forall i$$

ενώ γενικά θα θέτουμε $X_{1,i} = 1$, $\forall i$, δηλαδή η $X_{1,i}$ θα αντιπροσωπεύει τη «μεταβλητή» του σταθερού όρου και θα γράφουμε

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + \ldots + \beta_k X_{k,i} + u_i, \ \forall i$$

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Αναλυτικά, θα γράφουμε

$$y = X\beta + u$$

όπου

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & X_{2,1} & \dots & X_{k,1} \\ 1 & X_{2,2} & \dots & X_{k,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2,n} & \dots & X_{k,n} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad u_i = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

δηλαδή

- y είναι το $n \times 1$ **διάνυσμα παρατηρήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής**,
- X είναι η $n \times k$ **«μήτρα παρατηρήσεων» ή μήτρα των δεδομένων** που περιλαμβάνει διανύσματα - στήλες παρατηρήσεων των ανεξάρτητων μεταβλητών, με την πρώτη στήλη να αντιστοιχεί στον σταθερό όρο,
- β είναι το $k \times 1$ διάνυσμα των παραμέτρων προς εκτίμηση και
- u είναι το $n \times 1$ διάνυσμα των διαταρακτικών όρων

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Επιπλέον, αν ορίσουμε το $1 \times k$ διάνυσμα x_i' ως

$$x_i' = \begin{pmatrix} 1 & X_{2,i} & \dots & X_{k,i} \end{pmatrix}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε το πολλαπλό υπόδειγμα παλινδρόμησης ως

$$y_i = x_i'\beta + u_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Οι **κλασσικές υποθέσεις** του απλού γραμμικού υποδείγματος δεν μεταβάλλονται απλώς εμπλουτίζονται στο πολλαπλό υπόδειγμα παλινδρόμησης.

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Υποθέτουμε

- *σταθερούς συντελεστές παλινδρόμησης* β,
- *γραμμικότητα του υποδείγματος ως προς τις παραμέτρους* $y = X\beta + u$,
- *εξωγένεια των ερμηνευτικών μεταβλητών όταν αυτές θεωρούνται στοχαστικές* $E(u|X) = 0_{n\times 1}$,
- *διαταρακτικούς όρους που κατανέμονται κανονικά με μηδενικό μέσο,*
- *ομοσκεδαστικότητα* $Var(u_i) = \sigma_u^2$ *ή δεσμευμένη ομοσκεδαστικότητα* $Var(u_i|X) = \sigma_u^2$ *και*
- *έλλειψη συσχέτισης* $Cov(u_i, u_j) = 0,\ \forall i \neq j$ *ή δεσμευμένα,* $Cov(u_i, u_j|X) = 0\ ,\ \forall i \neq j$

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Επίσης είναι σύνηθες να χρησιμοποιούμε σημειογραφία μητρών για την παρουσίαση τουλάχιστον των τελευταίων 4 υποθέσεων ή ιδιοτήτων των διαταρακτικών όρων. Έτσι οι ιδιότητες του διαταρακτικού όρου συνοψίζονται στην έκφραση

$$u \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right)$$

ή υπό συνθήκη όταν θεωρούμε τις ερμηνευτικές μεταβλητές στοχαστικές

$$u|X \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right)$$

Τέλος θα διαπιστώσουμε σε λίγο ότι **εισάγεται μία νέα υπόθεση η οποία αφορά τις ερμηνευτικές μεταβλητές** και η οποία είναι ουσιαστικά μία **υπόθεση ταυτοποίησης**. Δηλαδή μας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του υποδείγματος.

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

ο εκτιμητής ΕΤ $\hat{\beta}_{ET}$ του διανύσματος παραμέτρων

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

δίνεται από την ελαχιστοποίηση

$$\min_{\hat{\beta}} S\left(\hat{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \hat{u}'\hat{u}$$

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $S\left(\hat{\beta}\right)$ δίνεται αναλυτικά από τον τύπο

$$\begin{aligned} S &= \hat{u}'\hat{u} \\ &= \left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right) \\ &= y'y - y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\ &= y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή ο όρος $y'X\hat{\beta}$ είναι 1×1 (δηλαδή είναι ένα βαθμωτό) άρα το ανάστροφό του $\hat{\beta}'X'y$ ουσιαστικά αντιπροσωπεύει τον ίδιο αριθμό, οπότε έχουμε $y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'y$.

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Οι **συνθήκες πρώτης τάξης** για ελάχιστο επιβάλλουν το μηδενισμό των μερικών παραγώγων της συνάρτησης ως προς $\hat{\beta}$, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} &= 0 \Rightarrow -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \\
&\Rightarrow X'X\hat{\beta} = X'y \\
&\Rightarrow \hat{\beta}_{ET} = (X'X)^{-1} X'y \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι ο εκτιμητής ΕΤ $\hat{\beta}_{ET}$ υπάρχει όταν η $n \times k$ μήτρα X είναι βαθμού k, δηλαδή $r(X) = k$, οπότε και η $X'X$ είναι βαθμού k (πλήρης στηλοβαθμού) άρα είναι αντιστρέψιμη. Συνεπώς, απαιτείται οι μεταβλητές του υποδείγματος που σχηματίζουν τις στήλες της μήτρας παρατηρήσεων X να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αλλιώς ο βαθμός της μήτρας είναι μικρότερος του k και η μήτρα $X'X$ είναι ιδιάζουσα, δηλαδή μη αντιστρέψιμη, άρα δεν μπορούμε να καταλήξουμε στην λύση $\hat{\beta}_{ET} = (X'X)^{-1} X'y$.

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Οι **συνθήκες δεύτερης τάξης** θέλουν τη μήτρα των δεύτερων μερικών παραγώγων (εσσιανή μήτρα) υπολογισμένη στο στάσιμο σημείο (θέτοντας δηλαδή $\hat{\beta}_{ET}$ όπου β) να είναι θετικά ορισμένη. Αυτή είναι η ικανή συνθήκη για ελάχιστο στο στάσιμο σημείο $\hat{\beta}_{ET}$. Η συγκεκριμένη μήτρα δίνεται από

$$\left.\frac{\partial^2 S}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}'}\right|_{\hat{\beta}=\hat{\beta}_{ET}} = 2X'X > 0 \tag{2}$$

όπου >0 σημαίνει ότι η μήτρα $X'X$ είναι **θετικά ορισμένη και όχι ότι όλα τα στοιχεία της μήτρας είναι θετικά**.

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Σημείωση: *Μία συμμετρική μήτρα* A *διάστασης* $n \times n$ *είναι θετικά (ημι) ορισμένη όταν για κάθε n-διάστατο διάνυσμα* $x \neq 0$ *ισχύει* $x'Ax > 0$ (≥ 0)*, ενώ αντίστοιχα για* $x'Ax < 0$ *και* (≤ 0) *ορίζονται οι αρνητικά ορισμένες και αρνητικά ημιορισμένες μήτρες. Οι εφαρμογές τους στην οικονομετρία είναι πολλές και θα τις απαντήσουμε σε αρκετές περιπτώσεις. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τη σύγκριση μητρών και την αναγκαστική θετικότητα των στοιχείων της διαγωνίου μίας μήτρας.*

Η τελευταία ιδιότητα (θετικά ορισμένη) για τη μήτρα των δεύτερων μερικών παραγώγων υπολογισμένη στο στάσιμο σημείο, είναι ικανή συνθήκη ελαχιστοποίησης μίας συνάρτησης k μεταβλητών και ισχύει όταν $r(X) = k$. Άρα, για να ισχύει τόσο η (1) όσο και η (2) πρέπει ο βαθμός της $n \times k$ μήτρας X να είναι k.

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Το πολλαπλό υπόδειγμα παλινδρόμησης εισάγει λοιπόν μία επιπλέον «κλασσική» υπόθεση

ο βαθμός της $n \times k$ μήτρας X είναι ίσος με k, δηλαδή $r(X) = k$

Η παραπάνω υπόθεση ονομάζεται και **υπόθεση ταυτοποίησης** αφού καθιστά δυνατή την εκτίμηση των παραμέτρων. Όταν δεν ισχύει, π.χ., όταν $r(X) < k$, τότε υπάρχει **πρόβλημα πολυσυγγραμικότητας** και πρέπει να επανεξειδικεύσουμε το υπόδειγμα.
Από την (1) εύκολα συνάγεται ότι το διάνυσμα των καταλοίπων είναι ορθογώνιο με τη μήτρα δεδομένων $X'\hat{u} = 0$
όπως και ότι οι προσαρμοσμένες ή εκτιμημένες τιμές $\hat{y}$ της y είναι ορθογώνιες με τα κατάλοιπα

$$\hat{y}'\hat{u} = \left(X\hat{\beta}\right)'\hat{u} = \hat{\beta}'X'\hat{u} = \hat{\beta}' \times 0 = 0$$

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Στην συνέχεια μελετούμε τις πρώτες δύο ροπές (**αναμενόμενη τιμή και διακύμανση**) του εκτιμητή ΕΤ. Αντικαθιστώντας τη σχέση

$$y = X\beta + u$$

στον τύπο του εκτιμητή (1) μπορούμε να αναλύσουμε τον εκτιμητή ως συνάρτηση του διανύσματος των διαταρακτικών όρων,

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{ET} &= (X'X)^{-1} X'y \\
&= (X'X)^{-1} X' (X\beta + u) \\
&= (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'u \\
&= \beta + (X'X)^{-1} X'u
\end{aligned}$$

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Η απόσταση

$$\hat{\beta}_{ET} - \beta = (X'X)^{-1} X'u \qquad (3)$$

ονομάζεται **σφάλμα δειγματοληψίας**.
Η αναμενόμενη τιμή δίνεται μετά από απλή εφαρμογή του τελεστή προσδοκιών στο σφάλμα δειγματοληψίας,

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\right) &= E\left((X'X)^{-1} X'u\right) \\ &= (X'X)^{-1} X'E(u) \\ &= (X'X)^{-1} X' \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

όταν $E(u) = 0$.

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Στην περίπτωση που οι ερμηνευτικές μεταβλητές θεωρούνται στοχαστικές τότε η ανάλυσή μας είναι δεσμευμένη και

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta \middle| X\right) &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'u \middle| X\right) \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X'E\left(u|\, X\right) \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X' \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

όταν $E\left(u|\, X\right) = 0$.
Η διακύμανση του εκτιμητή βρίσκεται επίσης εύκολα υιοθετώντας το σφάλμα δειγματοληψίας ως αφετηρία της ανάλυσης. Για ευκολία στην αλγεβρική παρουσίαση θέτουμε

$$\left(X'X\right)^{-1} X' = A$$

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Τότε, η διακύμανση του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων (και του σφάλματος δειγματοληψίας) δίνεται από τη μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων

$$\begin{aligned}
Var\left(\hat{\beta}_{ET}\right) &= Var\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\right) \\
&= Var\left((X'X)^{-1} X'u\right) \\
&= Var\left(Au\right) \\
&= AVar\left(u\right) A' \\
&= A\sigma^2 I_n A' \\
&= \sigma^2 AA' \\
&= \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}
\end{aligned}$$

η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά αμέσως παρακάτω,

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

$$Var\left(\hat{\beta}_{ET}\right) = Var\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\right)$$

$$= \begin{pmatrix} Var\left(\hat{\beta}_1\right) & Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) & \dots & Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k\right) \\ Cov\left(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1\right) & Var\left(\hat{\beta}_2\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Cov\left(\hat{\beta}_{k-1}, \hat{\beta}_k\right) \\ Cov\left(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1\right) & \dots & Cov\left(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_{k-1}\right) & Var\left(\hat{\beta}_k\right) \end{pmatrix}$$

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Τα στοιχεία επί της διαγωνίου, δηλαδή τα

$$Var\left(\hat{\beta}_j\right) = \left[\sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}\right]_{j,j}$$

αντιστοιχούν στις διακυμάνσεις των επιμέρους στοιχείων του διανύσματος των εκτιμητών $\hat{\beta}_{ET}$ ενώ τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου αντιστοιχούν στις συνδιακυμάνσεις.
η μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων

$$Var\left(\hat{\beta}_{ET}\right) = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

είναι συμμετρική και λόγω της υποθέσεως πλήρους βαθμού $r(X) = k$ είναι και θετικά ορισμένη.

5.2 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στο πολλαπλό υπόδειγμα

Η δεσμευμένη διακύμανση δίνεται από

$$Var\left(\hat{\beta}_{ET}\middle| X\right) = Var\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\middle| X\right) = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

Η μη δεσμευμένη διακύμανση, όταν οι ερμηνευτικές μεταβλητές θεωρούνται στοχαστικές, δίνεται από τον ακόλουθο τύπο,

$$Var\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\right) = E\left[Var\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\middle| X\right)\right] + Var\left[E\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\middle| X\right)\right]$$

Επειδή $E\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\middle| X\right) = 0$, με απλές αντικαταστάσεις καταλήγουμε ότι,

$$Var\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\right) = E\left[Var\left(\hat{\beta}_{ET} - \beta\middle| X\right)\right] = \sigma^2 E\left[\left(X'X\right)^{-1}\right]$$

5.3 Θεώρημα Gauss-Markov

Έχοντας υπολογίσει την αναμενόμενη τιμή και τη διακύμανση του εκτιμητή ΕΤ προχωράμε στην παρουσίαση και απόδειξη του θεωρήματος Gauss - Markov. Σύμφωνα με το θεώρημα

> *«ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων είναι* ***B.L.U.E (Best Linear Unbiased Estimator)*** *δηλαδή είναι ένας* ***άριστος, γραμμικός και αμερόληπτος εκτιμητής*** *όταν ισχύουν οι κλασσικές υποθέσεις»*

5.3 Θεώρημα Gauss-Markov

Άριστος καλείται ένας εκτιμητής ο οποίος είναι **αποτελεσματικότερος όλων των άλλων εκτιμητών σε μία δεδομένη τάξη εκτιμητών**. Ένας εκτιμητής $\hat{\beta}$ καλείται αποτελεσματικός σε σχέση με κάποιον άλλο εκτιμητή $\tilde{\beta}$ όταν η διακύμανσή του είναι μικρότερη

$$Var\left(\tilde{\beta}\right) - Var\left(\hat{\beta}\right) \geq 0$$

δηλαδή όταν επιτυγχάνει μεγαλύτερη ακρίβεια εκτίμησης. Όταν $\tilde{\beta}$ και $\hat{\beta}$ είναι διανύσματα εκτιμητών με ίδια διάσταση, έστω $k \times 1$, τότε $Var\left(\tilde{\beta}\right)$ και $Var\left(\hat{\beta}\right)$ είναι $k \times k$ μήτρες και ο τύπος

$$Var\left(\tilde{\beta}\right) - Var\left(\hat{\beta}\right) \geq 0$$

μεταφράζεται ως «**η διαφορά των μητρών είναι θετικά ημιορισμένη μήτρα**» δηλαδή για τις ανάγκες του μαθήματος, τα διαγώνια στοιχεία της διαφοράς που μετρούν διαφορές διακύμανσης είναι μεγαλύτερα ή ίσα με το μηδέν.

5.4 εκτιμητής της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου

Η μέθοδος ΕΤ εκτός του διανύσματος $\hat{\beta}_{ET}$ δίνει και έναν άλλο εκτιμητή, αυτόν της διακύμανσης των διαταρακτικών όρων

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k}$$

όπου $\hat{u}$ είναι το $n \times 1$ διάνυσμα των καταλοίπων της εκτίμησης. Η μελέτη της αμεροληψίας του εκτιμητή γίνεται ως εξής.

5.4 εκτιμητής της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου

Άρα ο εκτιμητής ΕΤ $\hat{\sigma}^2$ της διακύμανσης των διαταρακτικών όρων είναι αμερόληπτος αφού

$$E\left(\hat{\sigma}^2 \middle| X\right) = E\left(\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k} \middle| X\right) = \frac{\sigma^2 (n-k)}{n-k} = \sigma^2$$

το οποίο υπονοεί (δείτε τον **ν.ε.π**) ότι

$$E\left(\hat{\sigma}^2 \middle| X\right) = \sigma^2 \Rightarrow E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2$$

5.5 Στατιστική επαγωγή στο πολλαπλό υπόδειγμα

Με βάση το σφάλμα δειγματοληψίας (3) παρατηρούμε ότι το διάνυσμα των εκτιμητών ΕΤ, $\hat{\beta}_{ET}$, κατανέμεται υπό συνθήκη σύμφωνα με την κανονική κατανομή (κατανέμεται υπό συνθήκη κανονικά),

$$\hat{\beta}_{ET}\Big| X \sim N\left(\beta, \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}\right)$$

αφού δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των διαταρακτικών όρων u οι οποίοι σύμφωνα με την κλασσική υπόθεση

$$u| X \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right)$$

5.5 Στατιστική επαγωγή στο πολλαπλό υπόδειγμα

5.5 Στατιστική επαγωγή στο πολλαπλό υπόδειγμα

Οπότε ο λόγος των ανεξάρτητων μεταβλητών z και $\frac{\hat{u}'\hat{u}}{\sigma^2}$ παράγει μία τυχαία μεταβλητή

$$t = \frac{z}{\sqrt{\left(\frac{\hat{u}'\hat{u}}{\sigma^2} / (n-k)\right)}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}\sqrt{\left[(X'X)^{-1}\right]_{jj}}} \sim t_{n-k} \tag{4}$$

που κατανέμεται σύμφωνα με την t-student κατανομή με $n-k$ βαθμούς ελευθερίας και $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k}$.

Όλοι οι έλεγχοι υποθέσεων σχετικά με μεμονωμένες παραμέτρους (όπως οι έλεγχοι στατιστικής σημαντικότητας) και η κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης βασίζονται στην παραπάνω στατιστική, ακριβώς όπως και στο απλό γραμμικό υπόδειγμα.

5.5 Στατιστική επαγωγή στο πολλαπλό υπόδειγμα

Παράδειγμα:

5.6 Κριτήρια προσαρμογής στο πολλαπλό υπόδειγμα
5.6.1 Ο συντελεστής προσδιορισμού στο πολλαπλό υπόδειγμα

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τη μαθηματική εξαγωγή του συντελεστή προσδιορισμού R^2 από το εκτιμημένο υπόδειγμα με βάση έναν «διαχωρισμό τετραγώνων». Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι το συνολικό άθροισμα τετραγώνων της εξαρτημένης μεταβλητής $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})$ μπορεί να γραφεί ως το **άθροισμα των τετραγώνων που «εξηγείται»** από την παλινδρόμηση $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})$ συν το άθροισμα των τετραγώνων που δεν «εξηγείται» από τις ερμηνευτικές μεταβλητές, $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$, δηλαδή το **άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων**.

5.6.1 Ο συντελεστής προσδιορισμού στο πολλαπλό υπόδειγμα

Επειδή το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων μίας μεταβλητής y_i από το δειγματικό της μέσο $\bar{y}$ αποτελεί μέτρο μεταβλητότητας, ο διαχωρισμός στον οποίο θα προβούμε αναλύει το ποσοστό της μεταβλητότητας της εξαρτημένης μεταβλητής που εξηγείται από το εκτιμημένο υπόδειγμα και καλείται συντελεστής προσδιορισμού R^2. Για ευκολία στην αλγεβρική παρουσίαση, θα κάνουμε χρήση της μήτρας μετασχηματισμού

$$N = I_n - \frac{1}{n}\mathbf{i}\mathbf{i}'$$

όπου

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}'$$

είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα με όλα του τα στοιχεία ίσα με τη μονάδα.

5.6.1 Ο συντελεστής προσδιορισμού στο πολλαπλό υπόδειγμα

Η μήτρα N μετατρέπει οποιοδήποτε $n \times 1$ διάνυσμα σε αποκλίσεις από το δειγματικό μέσο δηλαδή

$$Ny = y - \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \ddots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}$$

και είναι **συμμετρική και ταυτοδύναμη**, δηλαδή ισχύουν οι ιδιότητες $N = N'$ και $NN = N$ αντίστοιχα.

5.6.1 Ο συντελεστής προσδιορισμού στο πολλαπλό υπόδειγμα

Πολ/ντας από αριστερά το εκτιμημένο υπόδειγμα με τη μήτρα N έχουμε

$$Ny = NX\hat{\beta} + N\hat{u} = NX\hat{\beta} + \hat{u}$$

αφού

$$\mathbf{i}'\hat{u} = \sum_{j=1}^{n} \hat{u} = 0$$

οπότε

$$\begin{aligned} N\hat{u} &= \left(I_n - \frac{1}{n}\mathbf{i}\mathbf{i}'\right)\hat{u} \\ &= I_n\hat{u} - \frac{1}{n}\mathbf{i}\mathbf{i}'\hat{u} \\ &= I_n\hat{u} - \frac{1}{n}\mathbf{i}\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{u}_j\right) \\ &= \hat{u} \end{aligned}$$

5.6.1 Ο συντελεστής προσδιορισμού στο πολλαπλό υπόδειγμα

Το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων της εξαρτημένης μεταβλητής από τον δειγματικό της μέσο δίνεται από

$$(Ny)' Ny = y'N'Ny = y'NNy = y'Ny$$

και είναι ίσο με

$$y'Ny = \left(NX\hat{\beta} + \hat{u}\right)' \left(NX\hat{\beta} + \hat{u}\right) = \hat{\beta}' X'NX\hat{\beta} + \hat{u}'\hat{u}$$

αφού

$$\hat{\beta}' X'N\hat{u} = \hat{\beta}' X'\hat{u} = 0$$

Δηλαδή, το συνολικό άθροισμα τετραγώνων (total sum of squares, TSS), $y'Ny$, είναι ίσο με το επεξηγημένο άθροισμα τετραγώνων (explained sum of squares, ESS), $\hat{\beta}'X'NX\hat{\beta}$, συν το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων (residual sum of squares, RSS), $\hat{u}'\hat{u}$,

$$TSS = ESS + RSS$$

5.6.1 Ο συντελεστής προσδιορισμού στο πολλαπλό υπόδειγμα

Ο συντελεστής προσδιορισμού λοιπόν δίνεται από τον γνωστό τύπο

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} \text{ ή } R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'Ny}$$

που μετατρέπει τις ποσότητες ESS και RSS σε ποσοστά του TSS ενώ αποδεικνύεται ότι $0 \leq R^2 \leq 1$.
Προσοχή, διότι όταν η παλινδρόμηση δεν περιέχει σταθερό όρο τότε δεν χρησιμοποιούμε την ποσότητα R^2 ως μέτρο προσαρμογής αφού μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές, άρα δεν έχει νόημα η ερμηνεία της.
Επίσης, αυξάνοντας τον αριθμό των ερμηνευτικών μεταβλητών k αυξάνεται και η τιμή του R^2. Θεωρητικά, θα μπορούσαμε να αυξήσουμε την «προσαρμογή» του υποδείγματος προσθέτοντας ολοένα και περισσότερες γραμμικά ανεξάρτητες ερμηνευτικές μεταβλητές στα δεξιά του υποδείγματος ακόμα και αν αυτές δεν είναι στατιστικά σημαντικές.

5.6.1 Ο συντελεστής προσδιορισμού στο πολλαπλό υπόδειγμα

Μάλιστα, αν επιλέγαμε $k = n$, τότε θα επιτυγχάναμε τέλεια προσαρμογή με $R^2 = 1$ (αν και η εκτίμηση των παραμέτρων θα ήταν προοδευτικά και λιγότερο ακριβής, δηλαδή θα αύξανε σημαντικά η διακύμανσή τους). Συνεπώς ο συντελεστής προσδιορισμού δεν μπορεί να υιοθετηθεί ως μέτρο επάρκειας ή καταλληλότητας ή προσαρμογής στην πολλαπλή παλινδρόμηση. Γι'αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε ένα **διορθωμένο (adjusted), ως προς τους βαθμούς ελευθερίας, μέτρο προσαρμογής**.

5.6.2 Διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού $\bar{R}^2$

Συγκεκριμένα, **ο διορθωμένος ή προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμού** συμβολίζεται με $\bar{R}^2$ και δίνεται από

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}\left(1 - R^2\right)$$

με τον όρο $\frac{n-1}{n-k}$ να επιβάλλει «διόρθωση» στην εισαγωγή ερμηνευτικών μεταβλητών στο υπόδειγμα. Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής $\bar{R}^2$ αυξάνεται (μειώνεται) όταν η επιπλέον ερμηνευτική μεταβλητή που εισάγουμε στο υπόδειγμα «θα δώσει» στατιστική t-student (4) για τον εκτιμημένο συντελεστή της με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη (μικρότερη) από 1.
Σημειώνουμε ότι ο συντελεστής προσδιορισμού (διορθωμένος ή μη) αποτελεί μέτρο γραμμικής προσαρμογής και σχέσης και δεν πρέπει να υιοθετείται όταν εξετάζουμε μη γραμμικά υποδείγματα.

5.6.3 Κριτήρια προσαρμογής AIC και BIC

Τέλος, να αναφέρουμε και την ύπαρξη δύο ακόμα κριτηρίων που χρησιμοποιούνται ευρέως στην εφαρμοσμένη οικονομετρία ως κριτήρια επιλογής υποδειγμάτων. Ο διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού επιβάλλει μία «ποινή» λόγω της μείωσης των βαθμών ελευθερίας όταν αυξάνουμε το υπόδειγμα (με πρόσθεση μεταβλητών). Η ποινή αυτή όμως μπορεί να μην είναι επαρκώς μεγάλη ώστε να οδηγήσει απαραίτητα τον ερευνητή στο σωστό υπόδειγμα (υποθέτοντας πάντα ότι το σωστό υπόδειγμα περιλαμβάνεται στις προς εκτίμηση επιλογές του). Υπάρχει πάντα η πιθανότητα υπερ-προσαρμογής (overfitting) με το εκτιμημένο υπόδειγμα να εμφανίζεται «εξαιρετικά καλό» μέσα στο δείγμα, παρέχοντας όμως φτωχά αποτελέσματα πρόβλεψης (εκτός δείγματος), αφού η προσθήκη ερμηνευτικών μεταβλητών μπορεί να αυξάνει τη διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης.

5.6.3 Κριτήρια προσαρμογής AIC και BIC

Τα κριτήρια προσαρμογής, (ονομάζονται και κριτήρια πρόβλεψης) που υιοθετούνται συχνά στην εξειδίκευση οικονομετρικών υποδειγμάτων είναι το πληροφοριακό κριτήριο του **Akaike (Akaike Information Criterion)** που δίνεται από τον τύπο

$$AIC = \ln\left(\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n}\right) + \frac{2k}{n}$$

και το κριτήριο **Schwartz ή Bayesian** κριτήριο

$$BIC = \ln\left(\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n}\right) + \frac{k\log n}{n}$$

Και τα δύο κριτήρια έχουν πλεονεκτήματα αν και το AIC θεωρείται ότι είναι πιο ελαστικό από το BIC οπότε ανάλογα με τους σκοπούς της εφαρμογής επιλέγεται κάποιο από τα δύο. Στη βάση των δύο κριτηρίων επιλέγεται το υπόδειγμα με τη μικρότερη τιμή κριτηρίου.

5.6.3 Κριτήρια προσαρμογής AIC και BIC

Για παράδειγμα, αν πρέπει να επιλέξουμε κατά πόσο θα εισάγουμε μία μεταβλητή, έστω $X_{2,i}$, ή όχι σε ένα δοσμένο υπόδειγμα k μεταβλητών, προχωρούμε με βάση την παρακάτω τεχνική εξειδίκευσης:

- **Βήμα 1.** Εκτιμούμε το υπόδειγμα με όλες τις ερμηνευτικές μεταβλητές πλην της $X_{2,i}$. Κρατούμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\hat{u}'\hat{u}$ και υπολογίζουμε το κριτήριο $AIC(1) = \ln\left(\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n}\right) + \frac{2k}{n}$.
- **Βήμα 2.** Εισάγουμε την $X_{2,i}$ στο υπόδειγμα, επανεκτιμούμε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και κρατάμε το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων, έστω $\hat{e}'\hat{e}$ και υπολογίζουμε το κριτήριο $AIC(2) = \ln\left(\frac{\hat{e}'\hat{e}}{n}\right) + \frac{2(k+1)}{n}$.
- **Βήμα 3.** Αν $AIC(2) < AIC(1)$, τότε επιλέγουμε το δεύτερο υπόδειγμα. Αν όχι, δεν εισάγουμε την $X_{2,i}$ στο υπόδειγμα.

Είναι κατανοητό βέβαια ότι ακριβής εξειδίκευση χρησιμοποιώντας όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των k ερμηνευτικών μεταβλητών οδηγεί στην εκτίμηση 2^k ξεχωριστών υποδειγμάτων, άρα ο υπολογιστικός φόρτος αυξάνει γρήγορα καθώς αυξάνουμε τις ερμηνευτικές μεταβλητές.

5.7 Ερμηνεία συντελεστών πολλαπλής παλινδρόμησης και διαμερισμένη παλινδρόμηση

Παρατηρήστε ότι το πολλαπλό υπόδειγμα παλινδρόμησης μπορεί να γραφεί στη διαμερισμένη μορφή

$$\underset{n\times 1}{y} = \underset{n\times(k-g)}{X_1} \times \underset{(k-g)\times 1}{\beta_1} + \underset{n\times g}{X_2} \times \underset{g\times 1}{\beta_2} + \underset{n\times 1}{u}$$

Η συγκεκριμένη μορφή γραφής του υποδείγματος θα μας επιτρέψει να εμβαθύνουμε στην ερμηνεία των συντελεστών β_1 και β_2 στο πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα.
Συγκεκριμένα, μετά την εκτίμηση ΕΤ γράφουμε

$$y = X_1\hat{\beta}_1 + X_2\hat{\beta}_2 + \hat{u}$$

και με την παρακάτω ανάλυση βρίσκουμε τις αναλυτικές εκφράσεις για τους εκτιμητές $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ **ξεχωριστά**[2].

[2]Γνωρίζουμε ήδη την «κοινή» μη διαμερισμένη έκφραση $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$.

5.7 Ερμηνεία συντελεστών πολλαπλής παλινδρόμησης και διαμερισμένη παλινδρόμηση

Οι κανονικές εξισώσεις της ελαχιστοποίησης του αθροίσματος των τετραγώνων των καταλοίπων δίνουν

$$X'X\hat{\beta} = X'y \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} y \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X_1'X_1\hat{\beta}_1 + X_1'X_2\hat{\beta}_2 = X_1'y \\ X_2'X_1\hat{\beta}_1 + X_2'X_2\hat{\beta}_2 = X_2'y \end{cases}$$

Λύνοντας (ξεχωριστά) ως προς τις εκτιμήσεις $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ των παραμέτρων[3] β_1, β_2 έχουμε τις εκφράσεις,

$$\hat{\beta}_1 = (X_1'M_2X_1)^{-1} X_1'M_2y$$

και

$$\hat{\beta}_2 = (X_2'M_1X_2)^{-1} X_2'M_1y$$

[3] Είναι διανύσματα με διαστάσεις $(k-g) \times 1$ και $g \times 1$ αντίστοιχα.

5.7 Ερμηνεία συντελεστών πολλαπλής παλινδρόμησης και διαμερισμένη παλινδρόμηση

Οι μήτρες

$$M_i = I - X_i \left(X_i' X_i\right)^{-1} X_i'$$

για $i = 1, 2$ είναι συμμετρικές και ταυτοδύναμες, δηλαδή $M_i = M_i'$ και $M_i M_i = M_i$. Εξαιτίας των τελευταίων ιδιοτήτων παρατηρούμε ότι οι συντελεστές παλινδρόμησης $\hat{\beta}_i$ ουσιαστικά αντιστοιχούν στους συντελεστές που θα «λαμβάναμε» αν εκτιμούσαμε την παλινδρόμηση των καταλοίπων $M_j y$ επί των (επίσης) καταλοίπων $M_j X_i$ αφού τότε

$$\hat{\beta}_i = \left(\left(X_i' M_j'\right)\left(M_j X_i\right)\right)^{-1}\left(X_i' M_j'\right)\left(M_j y\right) = \left(X_i' M_j X_i\right)^{-1} X_i' M_j y$$

5.7 Ερμηνεία συντελεστών πολλαπλής παλινδρόμησης και διαμερισμένη παλινδρόμηση

Εισαγωγή λοιπόν μίας παραπάνω μεταβλητής στο υπόδειγμα σημαίνει ότι αφαιρούμε τις επιδράσεις της από όλες τις άλλες μεταβλητές του υποδείγματος ώστε να μελετήσουμε το άμεσο αποτέλεσμα των υπόλοιπων μεταβλητών στην εξαρτημένη. Έτσι στο υπόδειγμα

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \ldots + \beta_k X_{k,i} + u_i$$

οι συντελεστές β_i ονομάζονται και **συντελεστές μερικής κλίσης** και η ερμηνεία, για παράδειγμα του β_2, είναι ότι «μετρά» τη μεταβολή στην y_i από μία μεταβολή στην $X_{2,i}$ με δεδομένο ότι όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές (ceteris paribus).
Αν το υπόδειγμα είναι λογαριθμικό όπως παρακάτω

$$\ln(y_i) = \beta_1 + \beta_2 \ln(X_{2,i}) + \beta_3 \ln(X_{3,i}) + u_i$$

τότε οι συντελεστές β_2 και β_3 εκφράζουν **μερική ελαστικότητα** της y_i ως προς τις $X_{2,i}$ και $X_{3,i}$ αντίστοιχα.

5.7.1 Παράδειγμα. Παλινδρόμηση με σταθερό όρο

Παρατηρήστε ότι αν εκτιμήσουμε με ΕΤ τα υποδείγματα

$$y_i = \alpha_1 + u_i$$

και

$$X_i = \alpha_2 + e_i$$

τότε οι εκτιμήσεις των σταθερών όρων $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ δίνονται από $\hat{\alpha}_1 = \bar{y}$ και $\hat{\alpha}_2 = \bar{X}$ αντίστοιχα. Άρα τα κατάλοιπα των δύο παλινδρομήσεων είναι απλώς οι αποκλίσεις των μεταβλητών από τον εκάστοτε δειγματικό αριθμητικό μέσο, έστω

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{\alpha}_1 = y_i - \bar{y}$$

$$\hat{e}_i = X_i - \hat{\alpha}_2 = X_i - \bar{X}$$

5.7.1 Παράδειγμα. Παλινδρόμηση με σταθερό όρο

Οπότε η εκτίμηση ΕΤ

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}) \left(X_i - \bar{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

του β από το υπόδειγμα

$$y_i = \alpha + \beta X_i + \eta_i$$

αντιστοιχεί στην εκτίμηση του β από την εξίσωση

$$\hat{u}_i = \beta \hat{e}_i + \eta_i$$

ή

$$(y_i - \bar{y}) = \beta \left(X_i - \bar{X}\right) + \eta_i$$

5.7.1 Παράδειγμα. Παλινδρόμηση με σταθερό όρο

η οποία δίνει

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \hat{e}_i}{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}) \left(X_i - \bar{X} \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}$$

Η εισαγωγή του σταθερού όρου στα οικονομετρικά υποδείγματα είναι ουσιώδης αφού παρέχει **κατάλοιπα με μηδενικό μέσο** και επιτρέπει την εξίσωση του επιπέδου των δύο μεταβλητών. **Σε αντίθετη περίπτωση, ο συντελεστής κλίσης διογκώνεται ή μειώνεται** για να ανταποκριθεί στις ανάγκες της εκτίμησης.

5.8 Εξειδίκευση του υποδείγματος
5.8.1 Παράλειψη σχετικών με το υπόδειγμα μεταβλητών

Έστω το «αληθές» ή σύμφωνο με τη θεωρία υπόδειγμα

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$

με τον ερευνητή να εκτιμά «λανθασμένα» το μικρότερο ή «περιορισμένο» υπόδειγμα

$$y = X_1\beta_{1,R} + u_R$$

δηλαδή ο ερευνητής παραλείπει τις σχετικές μεταβλητές X_2 (όταν υποθέσουμε ότι $\beta_2 \neq 0$).

5.8.1 Παράλειψη σχετικών με το υπόδειγμα μεταβλητών

Τότε ο εκτιμητής ΕΤ $\hat{\beta}_{1,R}$ του διανύσματος παραμέτρων β_1 μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των εκτιμητών ΕΤ $\hat{\beta}_1$ και $\hat{\beta}_2$ που θα λαμβάναμε από την εκτίμηση του «σωστού» επαυξημένου υποδείγματος

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{1,R} &= (X_1' X_1)^{-1} X_1' y \\
&= (X_1' X_1)^{-1} X_1' \left(X_1 \hat{\beta}_1 + X_2 \hat{\beta}_2 + \hat{u} \right) \\
&= \hat{\beta}_1 + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \hat{\beta}_2 + (X_1' X_1)^{-1} X_1' \hat{u} \qquad (5) \\
&= \hat{\beta}_1 + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \hat{\beta}_2
\end{aligned}
$$

αφού $X_1' \hat{u} = 0$.

5.8.1 Παράλειψη σχετικών με το υπόδειγμα μεταβλητών

Παρατηρούμε ότι ο εκτιμητής $\hat{\beta}_{1,R}$, ο οποίος ονομάζεται **«συνολικό αποτέλεσμα»**, είναι ίσος με τον εκτιμητή $\hat{\beta}_1$ **(άμεσο αποτέλεσμα)** μόνο όταν οι παραλειπόμενες μεταβλητές X_2 είναι ορθογώνιες με τις X_1

$$X_1' X_2 = 0_{(k-g)\times g}$$

δηλαδή όταν οι X_2 είναι ουσιαστικά ασυσχέτιστες με τις X_1 μεταβλητές.
Εναλλακτικά, όταν $\hat{\beta}_2 \approx 0$, δηλαδή όταν η επίδραση των X_2 επί της εξαρτημένης μεταβλητής είναι πολύ μικρή ή στατιστικά μη σημαντική (π.χ., επειδή $\beta_2 \approx 0$ ή $\beta_2 = 0$) τότε $\hat{\beta}_{1,R} = \hat{\beta}_1$.
Άρα αν παραλείψουμε κάποιες μεταβλητές X_2 από το υπόδειγμα, η εκτίμησή μας δεν επηρεάζεται όταν οι X_2 και X_1 είναι ασυσχέτιστες και/ή όταν οι X_2 ούτως ή άλλως δεν επηρεάζουν (επεξηγούν) την ερμηνευτική μεταβλητή.

5.8.1 Παράλειψη σχετικών με το υπόδειγμα μεταβλητών

Οι θεωρητικές ιδιότητες του εκτιμητή $\hat{\beta}_{1,R}$ μπορούν να αναλυθούν αν αντικαταστήσουμε το «αληθές» ή σύμφωνο με τη θεωρία υπόδειγμα

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$

στην (5). Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή και διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\beta}_{1,R}$ από την περιορισμένη παλινδρόμηση.

Δηλαδή ο εκτιμητής $\hat{\beta}_{1,R}$ είναι μεροληπτικός. Η μεροληψία που εμφανίζει

$$E\left(\hat{\beta}_{1,R}\right) - \beta_1 = \left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'X_2\beta_2$$

ονομάζεται **μεροληψία παραλειπόμενων μεταβλητών (omitted variables bias)** ή **έμμεσο αποτέλεσμα**.

5.8.1 Παράλειψη σχετικών με το υπόδειγμα μεταβλητών

Εντούτοις, η εκτίμηση, έστω και κατά παράβαση της θεωρίας, «μικρών» υποδειγμάτων οδηγεί σε εκτιμητές με μικρότερη διακύμανση, δηλαδή πιο αποτελεσματικούς. Αναλυτικά, η διακύμανση του εκτιμητή από το «μικρό» ή περιορισμένο υπόδειγμα δίνεται από τον τύπο

$$Var\left(\hat{\beta}_{1,R}\right) = \sigma^2 \left(X_1' X_1\right)^{-1}$$

ενώ η διακύμανση του εκτιμητή από το επαυξημένο ή μη περιορισμένο υπόδειγμα είναι

$$Var\left(\hat{\beta}_{1}\right) = \sigma^2 \left(X_1' M_2 X_1\right)^{-1}$$

Η αφαίρεση $Var\left(\hat{\beta}_{1}\right) - Var\left(\hat{\beta}_{1,R}\right)$ παράγει μία θετικά ημιορισμένη μήτρα

$$\sigma^2 \left[\left(X_1' M_2 X_1\right)^{-1} - \left(X_1' X_1\right)^{-1}\right] \geq 0$$

5.8.1 Παράλειψη σχετικών με το υπόδειγμα μεταβλητών

Φυσικά, η αποτελεσματικότητα που επιτυγχάνεται με ύπαρξη μεροληψίας δεν αποτελεί επιθυμητή ιδιότητα εκτίμησης. Γιατί να χρειαζόμαστε πιο «ακριβείς» εκτιμητές όταν αυτοί δεν εκτιμούν το ζητούμενο αποτέλεσμα β;

5.8.2 Εισαγωγή περιττών μεταβλητών

Έστω ότι το «αληθές» ή σύμφωνο με τη θεωρία υπόδειγμα είναι της μορφής

$$y = X_1\beta_1 + u$$

και περιλαμβάνει μόνο τις X_1 μεταβλητές. Έστω ότι ο ερευνητής «λανθασμένα» εκτιμά το «μεγαλύτερο» ή επαυξημένο υπόδειγμα

$$y = X_1\beta_* + X_2\beta_2 + u$$

όπου οι μεταβλητές X_2 είναι περιττές με την έννοια ότι $\beta_2 = 0$ (ο ερευνητής βέβαια δεν το γνωρίζει αυτό).

5.8.2 Εισαγωγή περιττών μεταβλητών

Άρα η εκτίμηση ΕΤ $\hat{\beta}_*$ εκτιμά τις πληθυσμιακές παραμέτρους του διανύσματος β_1. Η εκτίμηση ΕΤ από το επαυξημένο υπόδειγμα δίνεται σύμφωνα με τον τύπο

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_* &= \left(X_1' M_2 X_1\right)^{-1} X_1' M_2 y \\
&= \left(X_1' M_2 X_1\right)^{-1} X_1' M_2 \left(X_1 \beta_1 + u\right) \\
&= \beta_1 + \left(X_1' M_2 X_1\right)^{-1} X_1' M_2 u
\end{aligned}$$

και η προσδοκώμενη τιμή του εκτιμητή είναι ίση με $E\left(\hat{\beta}_*\right) = \beta_1$ δηλαδή ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος. Όμως, η εισαγωγή περιττών μεταβλητών έχει σαν συνέπεια την αύξηση της διακύμανσης του εκτιμητή, δηλαδή χάνουμε σε αποτελεσματικότητα αφού αποδεικνύεται[4] ότι,

$$Var\left(\hat{\beta}_* - \beta_1\right) - Var\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) = \sigma^2 \left[\left(X_1' M_2 X_1\right)^{-1} - \left(X_1' X_1\right)^{-1}\right] \geq 0$$

[4] Δείτε άσκηση 13

5.8.2 Εισαγωγή περιττών μεταβλητών

Παρόλα αυτά, το γεγονός ότι ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος καθιστά ελκυστικότερη, στην πρακτική έρευνα, την υιοθέτηση «μεγάλων» υποδειγμάτων έστω και αν κάποιες μεταβλητές μπορεί να θεωρηθούν τελικά περιττές. Εναποθέτουμε την απόφαση εισαγωγής ή μη των περιττών μεταβλητών στους ελέγχους υποθέσεων. Αντιθέτως, η υιοθέτηση μικρών υποδειγμάτων ενέχει τον κίνδυνο μεροληπτικών εκτιμήσεων και δεν παρέχει τη δυνατότητα ελέγχου της σημαντικότητας μεταβλητών που δεν εισήχθησαν στο υπόδειγμα.

5.9 Πολυσυγγραμμικότητα

5.9 Πολυσυγγραμμικότητα

Όταν ο βαθμός της μήτρας δεδομένων X είναι $r(X) < k$ τότε τουλάχιστον κάποιες από τις στήλες της μήτρας X είναι γραμμικώς εξαρτημένες, δηλαδή τουλάχιστον μία ερμηνευτική μεταβλητή δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός τουλάχιστον μίας άλλης ερμηνευτικής μεταβλητής. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τέλεια πολυσυγγραμμικότητα και δεν είναι δυνατή η εκτίμηση ΕΤ. Δηλαδή, δεν υπολογίζεται ο εκτιμητής

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

αφού η μήτρα $(X'X)$ είναι μη αντιστρέψιμη. Άρα τίθεται θέμα ταυτοποίησης και ουσιαστικά δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε το άμεσο αποτέλεσμα τουλάχιστον μίας ερμηνευτικής μεταβλητής. Το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν εμφανίζεται συχνά στην εμπειρική ανάλυση και αν εμφανιστεί τότε οφείλεται σε λανθασμένη εξειδίκευση του υποδείγματος.

5.9 Πολυσυγγραμμικότητα

Αντίθετα, ένα πρόβλημα που μπορεί να εμφανιστεί κατά την εμπειρική εκτίμηση ενός πολλαπλού υποδείγματος παλινδρόμησης είναι αυτό της πολυσυγγραμμικότητας όπου υπάρχει «ισχυρή» συσχέτιση μεταξύ των ερμηνευτικών μεταβλητών άρα καθίσταται δύσκολο να διαχωριστεί το άμεσο αποτέλεσμα της ερμηνευτικής μεταβλητής.

Η παρακάτω σχέση δίνει έναν εναλλακτικό τύπο για τη διακύμανση των εκτιμητών ΕΤ

$$Var\left(\hat{\beta}_j - \beta_j\right) = \frac{\sigma^2}{(n-1)\,\hat{\sigma}^2_{x_j}\left(1 - R_j^2\right)} \quad , \quad j = 2, \ldots, k$$

5.9 Πολυσυγγραμμικότητα

όπου

$$\hat{\sigma}^2_{x_j} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{j,i} - \bar{X}_j\right)^2$$

είναι ο εκτιμητής της διακύμανσης της j ερμηνευτικής μεταβλητής ενώ R_j^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού από την βοηθητική παλινδρόμηση

$$X_{j,i} = \text{σταθερά} + \sum_{m \neq j} \gamma_m X_{m,i} + \text{σφάλμα}$$

5.9 Πολυσυγγραμμικότητα

Η διακύμανση $Var\left(\hat{\beta}_j - \beta_j\right)$ εκφράζει το βαθμό ακρίβειας των εκτιμητών. Μικρότερη (μεγαλύτερη) διακύμανση υποννοεί μεγαλύτερη (μικρότερη) ακρίβεια. Παρατηρούμε ότι η ακρίβεια εκτίμησης αυξάνεται (α) όταν αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος n, (β) όταν αυξάνεται η μεταβλητότητα της υπο-εξέταση ερμηνευτικής μεταβλητής $s_{x_j}^2$ και (γ) όσο μειώνεται η συγγραμμικότητα της j ερμηνευτικής μεταβλητής με τις υπόλοιπες του υποδείγματος, δηλαδή καθώς $R_j^2 \to 0$. Συμπερασματικά, μεγάλα δείγματα, αυξημένη μεταβλητότητα στις ερμηνευτικές μεταβλητές και μικρή συγγραμμικότητα ευννοούν τον ακριβέστερο διαχωρισμό του άμεσου αποτελέσματος $\hat{\beta}_j$ της j μεταβλητής στην εξαρτημένη μεταβλητή y_i. Παρατηρήστε ότι καθώς $R_j^2 \to 1$ η διακύμανση του εκτιμητή τείνει στο άπειρο, δηλαδή γίνεται ολοένα και πιο αβέβαιη η εκτίμησή μας. Στην περίπτωση της τέλειας συγγραμμικότητας $R_j^2 = 1$.

5.9 Πολυσυγγραμμικότητα

Ο παράγοντας $\frac{1}{1-R_j^2}$ ονομάζεται και **παράγοντας πληθώρισης της διακύμανσης (variance inflation factor)** αφού είναι αυτός που καθορίζει πόσο αυξάνεται η διακύμανση του εκτιμητή ΕΤ λόγω συγγραμμικότητας της j ερμηνευτικής μεταβλητής με τις υπόλοιπες ερμηνευτικές μεταβλητές του υποδείγματος. Ένας εμπειρικός κανόνας εξειδίκευσης του υποδείγματος θεωρεί ότι ο παράγοντας πληθώρισης της διακύμανσης δεν πρέπει να ξεπερνά την τιμή 10, δηλαδή πρέπει

$$\frac{1}{1-R_j^2} < 10$$

ή ισοδύναμα

$$R_j^2 < 0.90$$

Όταν αυτό δεν ισχύει, τότε πρέπει να αντιμετωπίσουμε την υπάρχουσα πολυσυγγραμμικότητα.

5.9 Πολυσυγγραμμικότητα

Μία λύση είναι να συνδυάσουμε μεταβλητές οι οποίες συσχετίζονται (μετρούν το ίδιο χαρακτηριστικό) σε μία κοινή μεταβλητή (έναν δείκτη), η οποία μετρά το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό. Άλλες λύσεις προτείνουν, την αύξηση του μεγέθους του δείγματος αλλά συνήθως αυτό δεν είναι άμεσα εφικτό αφού ήδη θα το είχαμε πράξει, την εισαγωγή μεταβλητών στο υπόδειγμα που δεν συσχετίζονται με τις υπόλοιπες μεταβλητές (επίσης συνήθως όχι άμεσα εφικτό αφού ήδη θα το είχαμε πράξει) ή την απόρριψη κάποιας μεταβλητής, μία λύση που δεν συνίσταται αφού αλλάζει η φύση του υπο-εξέταση προβλήματος (αλλάζει το σύνολο δέσμευσης και η ερμηνεία των συντελεστών παλινδρόμησης).

5.10 Ψευδομεταβλητές

Ψευδομεταβλητές ή εικονικές μεταβλητές ή δυαδικές μεταβλητές ονομάζονται μεταβλητές που κατασκευάζονται από τον ερευνητή και παίρνουν μόνο τις τιμές 0 και 1. Έχουν ευρεία χρήση στην οικονομετρία και **αποσκοπούν στη «μέτρηση» ποιοτικών χαρακτηριστικών ή εξωγενών παραγόντων ή και μη γραμμικοτήτων** καθώς και την επίδρασή τους στην εξαρτημένη μεταβλητή.
Ένα κλασσικό παράδειγμα χρήσης ψευδομεταβλητών αναφέρεται σε ερμηνευτικές μεταβλητές οι οποίες χαρακτηρίζονται ως ποιοτικές, όπως για παράδειγμα, το «φύλο» του εργαζόμενου στην παρακάτω εξίσωση που προσεγγίζει/υποδειγματοποιεί τις αποδοχές των εργαζομένων

$$\ln(\text{αποδοχές}) = f(\text{φύλο, ηλικία, μόρφωση, λοιποί παράγοντες})$$

5.10 Ψευδομεταβλητές

Για την ανάλυσή μας, υποθέτουμε ότι μόνο οι τρεις πρώτες μεταβλητές - φύλο, ηλικία, μόρφωση - επιδρούν στη διαμόρφωση των αποδοχών καθώς και ότι το δείγμα $i = 1, \ldots, n$ ατόμων που επιλέξαμε είναι από την ίδια επιχείρηση. Η μεταβλητή «ηλικία» είναι μετρήσιμη, η «μόρφωση» παρότι μη μετρήσιμη προσεγγίζεται από τη μεταβλητή «έτη εκπαίδευσης» αλλά το «φύλο»; Πως θα μετρήσουμε την επίδραση του φύλου (αν υπάρχει) στις αποδοχές, και φυσικά πως θα ελέγξουμε υποθέσεις του τύπου «υπάρχει μισθολογικά διάκριση φύλων;», «αν υπάρχει, τότε η διάκριση λειτουργεί υπέρ των ανδρών;» και/ή «εξελίσσονται μισθολογικά γρηγορότερα οι άνδρες από τις γυναίκες;»
Τέτοιου τύπου μεταβλητές (ποιοτικές) εισάγονται σε ένα υπόδειγμα ως εξής: Το ποιοτικό χαρακτηριστικό του οποίου την επίδραση θέλουμε να ελέγξουμε διαχωρίζεται σε δυνατότητες. Αν έχουμε n δυνατότητες κατασκευάζουμε $n-1$ ψευδομεταβλητές και μία σταθερά για εισαγωγή στο υπόδειγμα αλλιώς εισάγουμε n ψευδομεταβλητές χωρίς τη σταθερά.

5.10 Ψευδομεταβλητές

Για παράδειγμα, για το ποιοτικό χαρακτηριστικό «φύλο» υπάρχουν **δύο** δυνατότητες: άνδρας ή γυναίκα. Κατασκευάζουμε **μία** μεταβλητή, τη D_i, η οποία παίρνει τις τιμές 1 όταν ο i εργαζόμενος στο δείγμα είναι άνδρας και 0 όταν ο i εργαζόμενος είναι γυναίκα, δηλαδή

- $D_i = 1$, όταν i αντιστοιχεί σε άνδρα εργαζόμενο
- $D_i = 0$, όταν i αντιστοιχεί σε γυναίκα εργαζόμενη

Όπως θα διαπιστώσουμε και ο αντίθετος προσδιορισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί, απλώς αλλάζουν οι ερμηνείες συγκεκριμένων παραμέτρων του υποδείγματος.

Δεν κατασκευάζουμε και δεύτερη μεταβλητή, π.χ την μεταβλητή

- $D_{2,i} = 1$, όταν i αντιστοιχεί σε γυναίκα εργαζόμενη
- $D_{2,i} = 0$, όταν i αντιστοιχεί σε άνδρα εργαζόμενο

διότι είναι περιττή και θα οδηγήσει σε **τέλεια πολυσυγγραμικότητα** αν εισαχθεί στο υπόδειγμα **μαζί** με σταθερό όρο - κάτι που ονομάζεται **«παγίδα των ψευδομεταβλητών»**. Κατασκευάζουμε και δεύτερη μεταβλητή, (την $D_{2,i}$ όπως δόθηκε παραπάνω) μόνο αν δεν πρόκειται να εισάγουμε σταθερό όρο στο υπόδειγμα.
Εκτιμούμε με τη μέθοδο ΕΤ το υπόδειγμα

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 D_i + \beta_3 HL_i + \beta_4 EK_i + u_i$$

όπου y_i: λογάριθμος αποδοχών, HL_i: ηλικία, EK_i: έτη εκπαίδευσης. Προσέχουμε ιδιαίτερα την ερμηνεία των παραμέτρων.

5.10 Ψευδομεταβλητές

Κάνοντας χρήση της δεσμευμένης μαθηματικής ελπίδας, η αναμενόμενη τιμή των λογαριθμικών αποδοχών για τους άνδρες $E\left(y_i | \alpha\nu\delta\rho\alpha\varsigma\right)$, δίνεται από

$$E\left(y_i | D_i = 1\right) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 E\left(HL_i\right) + \beta_4 E\left(EK_i\right)$$

ενώ για τις εργαζόμενες γυναίκες

$$E\left(y_i | D_i = 0\right) = \beta_1 + \beta_3 E\left(HL_i\right) + \beta_4 E\left(EK_i\right)$$

Άρα, σύμφωνα με την εξειδίκευση του υποδείγματος, οι μέσες αποδοχές με δεδομένο το φύλο του εργαζόμενου διαφοροποιούνται αν $\beta_2 \neq 0$ και μάλιστα υπάρχει διάκριση υπέρ των ανδρών όταν $\beta_2 > 0$.

5.10 Ψευδομεταβλητές

Τέλος, ανάλογα με το εμπειρικό ερώτημα που διερευνάται, θα μπορούσαμε να κάνουμε χρήση **δύο ψευδομεταβλητών** (μία για τους άνδρες και μία για τις γυναίκες), χωρίς όμως να εισάγουμε σταθερά

$$y_i = \beta_1 D_i + \beta_2 D_{2,i} + \beta_3 HL_i + \beta_4 EK_i + u_i$$

Τότε η ερμηνεία των παραμέτρων που αντιστοιχούν στις ψευδομεταβλητές είναι

$$\begin{aligned} E\left(y_i | \alpha\nu\delta\rho\alpha\varsigma\right) &= E\left(y_i | D_i = 1, D_{2,i} = 0\right) \\ &= \beta_1 + \beta_3 E\left(HL_i\right) + \beta_4 E\left(EK_i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(y_i | \gamma\upsilon\nu\alpha\iota\kappa\alpha\right) &= E\left(y_i | D_i = 0, D_{2,i} = 1\right) \\ &= \beta_2 + \beta_3 E\left(HL_i\right) + \beta_4 E\left(EK_i\right) \end{aligned}$$

και ο έλεγχος υπόθεσης $H_0 : \beta_1 = \beta_2$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξει τη διάκριση και άνιση μεταχείριση λόγω φύλου.

Οι ψευδομεταβλητές μπορούν να εισαχθούν στο πολλαπλό υπόδειγμα παλινδρόμησης και πολλαπλασιαστικά. Για παράδειγμα μπορεί να υποπτευόμαστε ότι υπάρχει διάκριση υπέρ των ανδρών και επίσης ότι οι άνδρες εξελίσσονται μισθολογικά γρηγορότερα από τις γυναίκες λόγω φύλου και μόνο. Εκτιμούμε το υπόδειγμα

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 D_i + \beta_3 HL_i + \beta_4 EK_i + \beta_5 \left(HL_i \cdot D_i \right) + u_i$$

Παρατηρήστε ότι οι μέσες αποδοχές - με δεδομένο το φύλο - δίνονται σύμφωνα με το παραπάνω υπόδειγμα από

$$E \left(y_i | \alpha\nu\delta\rho\alpha\varsigma \right) = \left(\beta_1 + \beta_2 \right) + \left(\beta_3 + \beta_5 \right) E \left(HL_i \right) + \beta_4 E \left(EK_i \right)$$

ενώ

$$E \left(y_i | \gamma\upsilon\nu\alpha\iota\kappa\alpha \right) = \beta_1 + \beta_3 E \left(HL_i \right) + \beta_4 E \left(EK_i \right)$$

5.10 Ψευδομεταβλητές

Αν απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0 : \beta_2 = 0$ τότε μπορούμε να πούμε ότι τα δεδομένα παρέχουν σημαντική ένδειξη για διάκριση στις μέσες αποδοχές λόγω φύλου. Αν επιπλέον απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0 : \beta_5 = 0$ έναντι της $\beta_5 > 0$ τότε η εκτιμημένη % μεταβολή των μέσων αποδοχών για κάθε ένα επιπλέον έτος ηλικίας για τους άνδρες είναι (με όλους τους άλλους παράγοντες που επηρεάζουν τις αποδοχές σταθερούς)

$$\frac{\partial \widehat{E}\left(y_i | \alpha\nu\delta\rho\alpha\varsigma\right)}{\partial HL_i} = \left(\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_5\right) \times 100$$

ενώ για τις γυναίκες είναι

$$\frac{\partial \widehat{E}\left(y_i | \gamma\upsilon\nu\alpha\iota\kappa\alpha\right)}{\partial HL_i} = \hat{\beta}_3 \times 100$$

Άρα οι άνδρες εξελίσσονται μισθολογικά γρηγορότερα από τις γυναίκες.

5.10.1 Εποχικότητα

Έστω ότι τα δεδομένα y_t, x_t έχουν τριμηνιαία συχνότητα, δηλαδή οι παρατηρήσεις αναφέρονται σε τρίμηνα. Για παράδειγμα, έστω ότι η μεταβλητή y_t αντιστοιχεί σε πωλήσεις και το δείγμα αρχίζει το πρώτο τρίμηνο του 1995. Τότε y_1 αντιστοιχεί στις (συνολικές) πωλήσεις του πρώτου τριμήνου του 1995, y_2 στις πωλήσεις του δεύτερου τριμήνου του 1995, y_7 στις πωλήσεις του τρίτου τριμήνου του 1996 κτλ.

5.10.1 Εποχικότητα

Υποπτευόμαστε μία σχέση της μορφής

$$\text{πωλήσεις} = f\,(\text{εποχικότητα}, x_t)$$

όπου x_t είναι ένα διάνυσμα μεταβλητών (λοιποί παράγοντες) που επηρεάζει τις πωλήσεις. Η εποχικότητα είναι μη μετρήσιμη μεταβλητή με τέσσερις δυνατότητες $n = 4$ στη δεδομένη συχνότητα μέτρησης των μεταβλητών. Η μέτρηση αντιστοιχεί είτε στο πρώτο τρίμηνο είτε στο δεύτερο είτε στο τρίτο ή στο τέταρτο.

Κατασκευάζουμε λοιπόν **τρεις (ή τέσσερις αν δεν εισάγουμε σταθερά στο υπόδειγμα)** ψευδομεταβλητές $i = 1, 2, 3$ ή $i = 1, 2, 3, 4$

- $D_{i,t} = 1$, όταν t αντιστοιχεί στο i τρίμηνο
- $D_{i,t} = 0$, όταν t αντιστοιχεί στα υπόλοιπα τρίμηνα

και εκτιμούμε το υπόδειγμα

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_2 D_{2,t} + \alpha_3 D_{3,t} + \alpha_4 D_{4,t} + x_t' \beta + u_t \tag{6}$$

ή το υπόδειγμα

$$y_t = \alpha_1 D_{1,t} + \alpha_2 D_{2,t} + \alpha_3 D_{3,t} + \alpha_4 D_{4,t} + x_t' \beta + u_t \tag{7}$$

Στην πρώτη περίπτωση θέσαμε κάποιο τρίμηνο ως τρίμηνο αναφοράς, π.χ στο συγκεκριμένο παράδειγμα θέσαμε το πρώτο τρίμηνο ως τρίμηνο αναφοράς αφού δεν εισάγαμε την $D_{1,t}$ στην εξειδίκευση.

Η ερμηνεία των παραμέτρων στα (6) και (7) είναι βέβαια διαφορετική. Αυτό αποκαλύπτεται όταν εξετάσουμε τις αντίστοιχες δεσμευμένες προσδοκίες των πωλήσεων. Στο υπόδειγμα (7) οι μέσες πωλήσεις με δεδομένο το i-οστό τρίμηνο του έτους είναι

$$E\left(y_t | D_{i,t} = 1\right) = \alpha_i + E\left(x_t'\right)\beta$$

Οι συντελεστές α_i μετρούν την επίδραση κάθε τριμήνου στη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Στο υπόδειγμα (6) όμως, μόνο το α_0 μετρά την επίδραση του πρώτου τριμήνου

$$E\left(y_t | D_{2,t} = 0, D_{3,t} = 0, D_{4,t} = 0\right) = \alpha_0 + E\left(x_t'\right)\beta + u_t$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ μετρούν διαφοροποίηση των τριμήνων 2, 3 και 4 σε σχέση με το τρίμηνο αναφοράς, π.χ.,

$$E\left(y_t | D_{2,t} = 1\right) = \left(\alpha_0 + \alpha_2\right) + E\left(x_t'\right)\beta$$

Αν $\hat{\alpha}_2 < 0$ και στατιστικά σημαντικό, τότε οι μέσες πωλήσεις του δευτέρου τριμήνου είναι χαμηλότερες **σε σχέση** με το πρώτο κ.ο.κ.

5.10.3 Επιδράσεις συγκεκριμένων εξωγενών παραγόντων

Έστω η διμεταβλητή σχέση

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \quad , \quad t = 1, \ldots, T$$

και έστω ότι υποπτευόμαστε ότι την περίοδο από t_0 μέχρι t_1 το μέσο επίπεδο της μεταβλητής αλλά και η μέση ελαστικότητα ως προς τη x έχουν επηρεαστεί από εξωγενείς παράγοντες, π.χ., απεργία, πόλεμος, φυσική καταστροφή, αλλαγές προτιμήσεων, αλλαγές πολιτικής κ.ο.κ. Θέτουμε

$$\begin{aligned} D_t &= 1 \quad \alpha\nu \quad t \in [t_0, \ldots, t_1] \\ D_t &= 0 \quad \alpha\nu \quad t \in [1, \ldots, t_0 - 1] \cup [t_1 + 1, \ldots, T] \end{aligned}$$

και εκτιμούμε το υπόδειγμα

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \delta_1 D_t + \delta_2 (x_t D_t) + u_t \quad , \quad t = 1, \ldots, T$$

5.10.3 Επιδράσεις συγκεκριμένων εξωγενών παραγόντων

Αν ο έλεγχος υπόθεσης[5]

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0$$

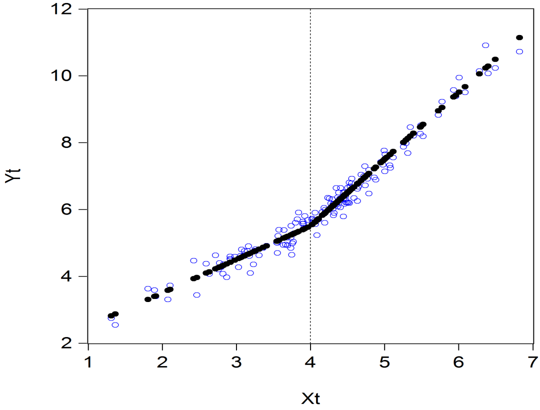
απορρίψει τη μηδενική τότε δεν απορρίπτουμε την «επίδραση» των εξωγενών παραγόντων είτε στη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, είτε στην ελαστικότητα της εξαρτημένης ως προς την ερμηνευτική είτε και στα δύο. Φυσικά μπορούμε πάντα να ελέγξουμε μεμονωμένα αν $H_0 : \delta_1 = 0$ ή $H_0 : \delta_2 = 0$ ανάλογα με το ζητούμενο.

[5] Δείτε στο κεφάλαιο 6 για αναλυτική παρουσίαση των ελέγχων γενικών γραμμικών υποθέσεων.

5.10.4 Τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις

Οι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις όπως αυτή που φαίνεται «προσαρμοσμένη» στο αμέσως επόμενο διάγραμμα διασποράς (1) δύο μεταβλητών Y_i, X_i παρουσιάζουν αυξημένο ενδιαφέρον και ιδιαιτερότητα αφού «συνδέουν» τη ψευδομεταβλητή D_i με την ερμηνευτική μεταβλητή του υποδείγματος.

5.10.4 Τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις



Σχήμα: 5.4 Διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών Y_i, X_i (μπλε κενοί κύκλοι) όπου η γραμμή παλινδρόμησης $\hat{Y}_i$ (μαύροι γεμάτοι κύκλοι) είναι τμηματικά συνεχής

5.10.4 Τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις

Έτσι, ορίζουμε την ψευδομεταβλητή D_i ως συνάρτηση του επιπέδου της ερμηνευτικής μεταβλητής

$$D_i = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad X_i > \delta \\ 0 & \alpha\nu \quad X_i \leq \delta \end{cases}$$

και το υπόδειγμα γράφεται ως

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 (X_i - \delta) D_i + u_i$$

ή πιο αναλυτικά ως

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i D_i + \beta_4 D_i + u_i$$

όπου $\beta_4 = -\beta_3 \delta$.

5.10.4 Τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις

Τέτοιου τύπου σχέσεις όπου **ενδογενώς**[6] καθορίζεται μία μεταβολή είτε στο μέσο επίπεδο της εξαρτημένης μεταβλητής είτε στη επίδραση των ερμηνευτικών μεταβλητών παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Για παράδειγμα, η αντίδραση της Y_i ως προς τη X_i μπορεί να μεταβάλλεται καθώς τα επίπεδα της ερμηνευτικής μεταβλητής X_i αυξάνονται (όπως στο γράφημα (1) όπου όταν η X_i λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες του $\delta = 4$, η επίδρασή της στην Y_i μεταβλητή αυξάνεται).

[6] Ενδογενώς σε σχέση με την ερμηνευτική μεταβλητή, η οποία εισάγεται στο υπόδειγμα παρότι δεν καθορίζεται από το υπόδειγμα.

Χρησιμοποιώντας **άλγεβρα μητρών** δείξτε ότι η εκτίμηση ΕΤ του β_1 στο υπόδειγμα που περιλαμβάνει μόνο σταθερά

$$y_i = \beta_1 + u_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

είναι ίση με

$$\hat{\beta} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Απάντηση
Η μήτρα δεδομένων X δίνεται από το $n \times 1$ διάνυσμα

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

με ανάστροφη

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1 = n$$

με αντίστροφη

$$(X'X)^{-1} = (n)^{-1} = \frac{1}{n}$$

ενώ

$$X'y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + \ldots + 1 \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

5.11 Ασκήσεις Ασκ.2

Οπότε ο εκτιμητής ΕΤ δίνεται από

$$\hat{\beta}_1 = \left(X'X\right)^{-1} X'y$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$$

5.11 Ασκήσεις Ασκ.15

Στο Excel ή στο Gretl ή σε οποιοδήποτε λογισμικό επιλογής σας, δημιουργήστε τις παρακάτω μεταβλητές

$$\begin{aligned} e_i &\sim N.i.d\,(0,1) \\ X_{2,i} &\sim N.i.d\,(0,4) \\ X_{3,i} &= 5 + 9X_{2,i} \\ y_i &= -4 + 1.5X_{2,i} + e_i \end{aligned}$$

και προσπαθήστε να εκτιμήσετε το υπόδειγμα

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + u_i$$

με τη μέθοδο ΕΤ. Τι παρατηρείτε; Στη συνέχεια εκτιμήστε τα υποδείγματα

$$y_i = \alpha + \beta X_{2,i} + u_{1,i}$$

και

$$y_i = \alpha + \beta X_{3,i} + u_{2,i}$$

Σχολιάστε

Τέλος ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ιωάννης Βενέτης, Αναπλ. Καθηγητής. «Οικονομετρία. Τίτλος ενότητας». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

eclass.upatras.gr/courses/ECON1326

Σημείωμα Αδειοδότησης

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- Ιωάννης Α. Βενέτης (2013). **Εισαγωγή στην Οικονομετρία**, GOTSIS Εκδόσεις, Πάτρα, ISBN 978-960-9427-25-8