ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ενότητα 4: Περαιτέρω εξειδίκευση του υποδείγματος

Ιωάννης Βενέτης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Σχολή Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Πατρών

Σκοποί Ενότητας

- ⇒ Εισαγωγή σε χαρακτηριστικά του απλού διμεταβλητού υποδείγματος χρήσιμα για την περαιτέρω σωστή μελέτη του μαθήματος
- ⇒ Για παράδειγμα η χρήση του χρόνου ως ανεξάρτητη μεταβλητή (τάσεις στις χρονοσειρές)
- ⇒ Μετασχηματισμοί των δεδομένων των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών (ο συντελεστής κλίσης ως ελαστικότητα)
- ⇒ Εισαγωγή στις έννοιες της στασιμότητας και μη-στασιμότητας (χρονοσειρές).
- ⇒ Διαδικασία τυχαίου περιπάτου ή εξέλιξης (random walk) και στοχαστικές τάσεις έναντι των προσδιοριστικών (μη-στοχαστικών) τάσεων
- ⇒ Μέθοδος εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας (μία εναλλακτική μέθοδος)

Περιεχόμενα ενότητας

4.1 Ο χρόνος ως ερμηνευτική μεταβλητή

Έστω ότι η ερμηνευτική μεταβλητή είναι ο ίδιος ο χρόνος, δηλαδή θέτουμε $X_t = t$, $t = 1, ..., T$ όπου T το μέγεθος του δείγματος και γράφουμε το απλό γραμμικό υπόδειγμα ως

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t \quad , \quad t = 1, ..., T \tag{1}$$

Το υπόδειγμα (1) είναι «μη θεωρητικό» αφού καμμία μεταβλητή πλην του χρόνου δεν εισέρχεται ως ερμηνευτική, ενώ η γραμμική συνάρτηση $\alpha + \beta t$ απλώς «περιγράφει» την ανοδική (όταν $\beta > 0$) ή καθοδική (όταν $\beta < 0$) πορεία της μεταβλητής στο χρόνο.

Άρα, ένα υπόδειγμα της μορφης (1) εφαρμόζεται (εκτιμάται) σε περιπτώσεις χρονοσειρών Y_t οι οποίες εμφανίζουν (ανοδική ή καθοδική) «τάση». Μάλιστα η «τάση» θα πρέπει να ικανοποιεί κάποια χαρακτηριστικά, συγκεκριμένα να είναι γραμμική τουλάχιστον μέσα στο δείγμα.

4.1 Ο χρόνος ως ερμηνευτική μεταβλητή

Με βάση την υπόθεση ότι $E(u_t) = 0$, η αναμενόμενη τιμή της Y_t δίνεται από την

$$E(Y_t) = \alpha + \beta t$$

είναι δηλαδή γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Άρα για μοναδιαίες μεταβολές του χρόνου

$$\Delta t = t - (t - 1) = 1$$

δηλαδή για μεταβολές από την μία περίοδο στην άλλη ή από το χρόνο $t - 1$ στο χρόνο t, η μέση μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι ίση με

$$\frac{E(Y_t - Y_{t-1})}{\Delta t} = E(\Delta Y_t) = \alpha + \beta t - \alpha - \beta (t - 1) = \beta$$

Κατά συνέπεια ο συντελεστής β μετρά τη μέση μεταβολή της μεταβλητής Y_t κάθε χρονική περίοδο. Παρομοίως, η μεταβολή μετά από d περιόδους δίνεται από

$$E(Y_t) - E(Y_{t-d}) = \beta d$$

4.2 Λογαριθμικός-λογαριθμικός μετασχηματισμός

Συχνά θα παρατηρήσουμε στην εμπειρική οικονομετρία τη χρήση λογαριθμισμένων μεταβλητών (εξαρτημένης και ανεξάρτητης) αντί των αρχικών. Ο εν λόγω μετασχηματισμός είναι χρήσιμος για πολλούς λόγους και φυσικά εφαρμόζεται όταν οι μεταβλητές **λαμβάνουν θετικές και μόνο τιμές**. Εκτιμούμε λοιπόν ένα υπόδειγμα της μορφής

$$\ln(Y_i) = \alpha + \beta \ln(X_i) + u_i \tag{2}$$

Ο συντελεστής κλίσης β αντιστοιχεί στην ελαστικότητα της Y_i ως προς τη X_i αφού

$$\beta = \frac{d\ln(Y_i)}{d\ln(X_i)} = \frac{dY_i/Y_i}{dX_i/X_i} = \varepsilon_{YX}$$

Άρα δεν χρειάζεται να προβούμε σε αλγεβρικούς υπολογισμούς για την εύρεση της ελαστικότητας, η οποία είναι απαλλαγμένη από τις μονάδες μέτρησης και συχνά παρέχει μία πιο άμεση και οικονομική ερμηνεία της σχέσης των μεταβλητών.

Άρα το υπόδειγμα (2) υποθέτει σταθερή ελαστικότητα της Y_i ως προς τη X_i ή ότι η αρχική εξάρτηση της Y_i πάνω στη X_i είναι πολλαπλασιαστικού τύπου $Y_i = AX_i^{\beta}e^{u_i}$.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του λογαριθμικού μετασχηματισμού είναι η ικανότητά του **να μειώνει την ασυμμετρία και την μεταβλητότητα** των υπο-εξέταση μεταβλητών, στοιχεία τα οποία είναι κοινά στα οικονομικά δεδομένα.

Συχνά, στα οικονομικά δεδομένα, μεταβλητές που λαμβάνουν μόνο θετικές τιμές παρουσιάζουν δεξιά ασυμμετρία και έχουν αυξημένη μεταβλητότητα.

Τέλος, ο λογαριθμικός μετασχηματισμός, μέσω της μείωσης του εύρους μεταβλητότητας των δεδομένων, καθιστά τις μεταβλητές του υποδείγματος λιγότερο ευαίσθητες σε τυχόν ακραίες τιμές.

4.3 Λογαριθμικός-γραμμικός μετασχηματισμός

Σύμφωνα με τον ημιλογαριθμικό μετασχηματισμό, σε ορισμένες περιπτώσεις λογαριθμίζουμε μόνο την εξαρτημένη μεταβλητή

$$\ln(Y_i) = \alpha + \beta X_i + u_i$$

Στην περίπτωση αυτή η ελαστικότητα της Y ως προς τη X δίνεται, για δεδομένη παρατήρηση i, από τον τύπο

$$\varepsilon_{YX} = \beta X_i$$

αφού

$$\frac{d\ln(Y_i)}{dX_i} = \beta$$

και

$$\varepsilon_{YX} = \frac{d\ln(Y_i)}{d\ln(X_i)} = \frac{d\ln(Y_i)}{dX_i/X_i} = \left(\frac{d\ln(Y_i)}{dX_i}\right) X_i = \beta X_i$$

Δηλαδή η ελαστικότητα είναι ανάλογη του επιπέδου της μεταβλητής X. Η ερμηνεία της παραμέτρου β είναι η εξής

- όταν $\beta > 0$: μία αύξηση (μείωση) της μεταβλητής X_i κατά μία μονάδα οδηγεί σε μία $(100 \times \beta)\%$ αύξηση (μείωση) της μεταβλητής Y_i

Μετά την εφαρμογή της μεθόδου των ΕΤ, η **εκτιμημένη ελαστικότητα** υπολογίζεται με βάση το δειγματικό μέσο της ερμηνευτικής μεταβλητής δηλαδή

$$\hat{\varepsilon}_{YX} = \hat{\beta}\bar{X}$$

Η χρήση του ημι-λογαριθμικού μετασχηματισμού είναι ευρέως διαδεδομένη ειδικά σε περιπτώσεις που η ανεξάρτητη μεταβλητή έχει μονάδα μέτρησης το χρόνο ή είναι ψευδομεταβλητή (δηλαδή λαμβάνει μόνο τις τιμές 0 και 1) και η εξαρτημένη μεταβλητή έχει τα γνωστά χαρακτηριστικά που επιτρέπουν να λογαριθμίσουμε, δηλαδή θετικές τιμές μόνο και κατά περίπτωση θετική ασυμμετρία και/ή μεταβλητότητα που εξαρτάται από το μέσο επίπεδο της μεταβλητής.

Στην περίπτωση του γραμμικού-λογαριθμικού μετασχηματισμού

$$Y_i = \alpha + \beta \ln(X_i) + u_i$$

υποθέτουμε ότι η ελαστικότητα της Y ως προς τη X μεταβλητή είναι **αντιστρόφως ανάλογη** του επιπέδου της εξαρτημένης μεταβλητής Y. Δηλαδή καθώς αυξάνεται η εξαρτημένη μεταβλητή Y, η αντίδρασή της στην ανεξάρτητη μεταβλητή X μειώνεται. Αναλυτικά η ελαστικότητα της Y ως προς την X δίνεται από τον τύπο

$$\varepsilon_{YX} = \frac{d\ln(Y_i)}{d\ln(X_i)} = \frac{dY_i/Y_i}{d\ln(X_i)} = \frac{dY_i}{d\ln(X_i)}\frac{1}{Y_i} = \beta\frac{1}{Y_i}$$

και υπολογίζεται με βάση το εκτιμημένο υπόδειγμα μέσω της

$$\hat{\varepsilon}_{YX} = \hat{\beta}\frac{1}{\bar{Y}}$$

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.1 Στασιμότητα

Χρονοσειρά ή χρονολογική σειρά είναι μία χρονικά διατεταγμένη ακολουθία παρατηρήσεων μεταβλητών, για παράδειγμα των μεταβλητών Y_t ή X_t στο απλό γραμμικό υπόδειγμα

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

μολονότι ο όρος επεκτείνεται και σε μη παρατηρήσιμες ή υποθετικές μεταβλητές, όπως ο διαταρακτικός όρος u_t στο παραπάνω υπόδειγμα. Για δεδομένο χρόνο t, η Y_t θεωρείται τυχαία μεταβλητή. Η ιδιομορφία των χρονοσειρών έγκειται στο ότι αποτελούν μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών που εξελίσσονται στο χρόνο (στοχαστική διαδικασία (Stochastic process). Έτσι θεωρούμε ότι οι «παρατηρήσεις»

$$\{\ldots, Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots\} \text{ ή } \{Y_t\}_{-\infty}^{+\infty} \text{ ή } \{Y_t\}$$

προέρχονται από μία και μόνο «πραγματοποίηση» ενός τυχαίου πειράματος, ενώ συνήθως οι οικονομολόγοι παρατηρούν όχι απλώς μία πραγματοποίηση αλλά και ένα πεπερασμένο τμήμα της ακολουθίας, π.χ., $\{Y_1, \ldots, Y_T\}$.

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.1 Στασιμότητα

- Η φύση λοιπόν των χρονοσειρών (μία μόνο πραγματοποίηση, η Y_{t-1} προηγείται της Y_t ενώ έπεται η Y_{t+1} κ.ο.κ) είναι τέτοια που αναμένουμε γενικά οι Y_t να μην είναι ανεξάρτητες και ειδικότερα να συσχετίζονται τουλάχιστον γραμμικά, $Cov(Y_t, Y_s) \neq 0$. Άρα η κλασσική υπόθεση της ανεξαρτησίας (π.χ., των διαταρακτικών όρων) είναι πολύ αυστηρή πόσο μάλλον όταν αναφέρεται σε οικονομικές χρονοσειρές. Στη συντριπτική τους πλειοψηφία (αν όχι όλες) οι μακροοικονομικές και χρηματοοικονομικές χρονοσειρές δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ανεξάρτητες, δηλαδή ως μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.
- Για όλους τους παραπάνω λόγους, γενικεύουμε την τάξη των υπο-εξέταση χρονοσειρών και γνωρίζουμε ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών με πλουσιότερες ιδιότητες από αυτές των ανεξάρτητων και ομοιογενώς κατανεμόμενων μεταβλητών (i.i.d)[1] ή απλώς ανεξάρτητων μεταβλητών (i.n.i.d)[2].

[1] **I**ndependently and **i**dentically **d**istributed.

[2] **I**ndependently and **n**on **i**dentically **d**istributed.

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.1 Στασιμότητα

Αυστηρή στασιμότητα (strict stationarity). Η Y_t είναι αυστηρώς στάσιμη αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των

$$\{Y_{t-k} \ldots, Y_{t-2}, Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_{t+k}\}$$

είναι ανεξάρτητη του χρόνου t για όλα τα k. Είναι **η σχετική θέση και όχι η απόλυτη θέση** που είναι σημασίας για την κατανομή. Άρα, η από κοινού κατανομή των $\{Y_6, Y_{10}\}$ σε μία αυστηρώς στάσιμη διαδικασία θεωρείται ίδια με την από κοινού κατανομή των $\{Y_{21}, Y_{25}\}$ ή αυτή των $\{Y_1, Y_3, Y_5\}$ με αυτή των $\{Y_2, Y_4, Y_6\}$ κ.ο.κ. Ο μέσος, η διακύμανση και όλες οι ροπές υψηλότερης τάξης δεν εξαρτώνται από την απόλυτη τιμή του χρόνου t.

Παράδειγμα. Μία ακολουθία i.i.d μεταβλητών είναι αυστηρώς στάσιμη. Άρα ο διαταρακτικός όρος του απλού γραμμικού υποδείγματος με βάση τις κλασσικές υποθέσεις είναι μία αυστηρώς στάσιμη διαδικασία.

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.1 Στασιμότητα

Η ιδιότητα της στασιμότητας μίας χρονοσειράς $\{Y_t\}$ επεκτείνεται και σε συναρτήσεις της, π.χ., και η $\{Y_t^2\}$ είναι στάσιμη. Προσοχή, διότι ακόμα και αν όλα τα στοιχεία ενός διανύσματος είναι μεμονωμένα στάσιμα, το διάνυσμα ως σύνολο μπορεί να μην είναι στάσιμο.

Ασθενής ή κατά συνδιακύμανση στασιμότητα (weak or covariance stationarity). Η $\{Y_t\}$ είναι κατά συνδιακύμανση (ασθενώς) στάσιμη αν ο μέσος και η συνδιακύμανση των Y_t είναι συναρτήσεις ανεξάρτητες του χρόνου άρα αν

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \mu \\ Cov(Y_t, Y_{t-k}) &= \gamma_Y(k) \quad \forall k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Όταν $k = 0$ τότε

$$Cov(Y_t, Y_t) = Var(Y_t) = \sigma^2 = \gamma_Y(0)$$

αναφέρεται στη διακύμανση της Y_t.

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.1 Στασιμότητα

Η συνάρτηση

$$\rho_Y(k) = \frac{\gamma_Y(k)}{\gamma_Y(0)}$$

ονομάζεται **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης**[3] (autocorrelation function, ACF) και αποδεικνύεται ότι

$$-1 \leq \rho_Y(k) \leq 1$$

Το «διάγραμμα» της $\rho_Y(k)$ ως προς το k ονομάζεται κορρελόγραμμα (correlogram). Όταν είναι σαφές ότι αναφερόμαστε στη χρονοσειρά Y_t μπορούμε να παραλείπουμε τον υποδείκτη Y από το συμβολισμό των συναρτήσεων/ροπών, π.χ., γράφουμε μ, $\gamma(k)$, $\rho(k)$ αντί μ_Y, $\gamma_Y(k)$, $\rho_Y(k)$.

[3] Η αυτοσυσχέτιση καλείται και σειριακή συσχέτιση (serial correlation). Για παράδειγμα, αντί της έκφρασης *«η Y_t δεν αυτοσυσχετίζεται»* μπορεί να δείτε την έκφραση *«η Y_t δεν συσχετίζεται σειριακά»*. Αντίστοιχα η συνάρτηση $Cov(Y_t, Y_{t-k})$ καλείται συνάρτηση **αυτοσυνδιακύμανσης** (autocovariance function).

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.1 Στασιμότητα

Η δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εκτιμάται μέσω του

$$\hat{\rho}_Y(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} \left(Y_t - \overline{Y}\right)\left(Y_{t-k} - \overline{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T} \left(Y_t - \overline{Y}\right)^2}$$

ενώ ένα «προσεγγιστικό[4]» τυπικό σφάλμα δίνεται από $1/\sqrt{T}$. Όταν λοιπόν η τιμή της $\hat{\rho}_Y(k)$ είναι μεγαλύτερη σε απόλυτους όρους από δύο φορές το τυπικό σφάλμα, δηλαδή $|\hat{\rho}_Y(k)| > \frac{2}{\sqrt{T}}$, θεωρούμε ότι η εκτίμηση $\hat{\rho}_Y(k)$ είναι στατιστικά σημαντική ή ότι απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

$$\begin{aligned} H_0 &: \rho_Y(k) = 0 \quad , \quad k \geq 1 \\ H_1 &: \rho_Y(k) \neq 0 \quad , \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

σε επίπεδο σημαντικότητας 5% που θέλει την υποκείμενη χρονοσειρά να μην αυτοσυσχετίζεται γραμμικά.

[4] Θα γίνει κατανοητό σε επόμενες διαλέξεις γιατί χρησιμοποιούμε τον όρο «προσεγγιστικό».

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.2 Ιεράρχηση στοχαστικών υποθέσεων χωρίς σειριακή συσχέτιση

Ο παρακάτω πίνακας

$E(u_t)=0,\ E(u_t^2)=\sigma^2,\ E(u_t u_s)=0,\quad \forall t\neq s$	λευκός θόρυβος	$Y\pi 1$
$u_t\,\vert\,\mathbb{I}_t \sim (0,\sigma^2)$	περίπτωση «ακολουθίας διαφορών martingale»	$Y\pi 2$
$u_t \sim i.i.d\,(0,\sigma^2)$	ανεξάρτητος λευκός θόρυβος	$Y\pi 3$
$u_t \sim N.i.d\,(0,\sigma^2)$	Gaussian ανεξάρτητος λευκός θόρυβος	$Y\pi 4$

«ταξινομεί» κάποιες υποθέσεις (συνθήκες σχετικά με την κατανομή και/ή τις ροπές της κατανομής των διαταρακτικών όρων) οι οποίες είναι πολύ συχνές στη σχετική οικονομετρική βιβλιογραφία. Θεωρήστε ότι το σύνολο $\mathbb{I}_t$ εκφράζει όλη την πληροφόρηση που έχουμε μέχρι και το χρόνο t.

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.2 Ιεράρχηση στοχαστικών υποθέσεων χωρίς σειριακή συσχέτιση

Συνήθως θα υποθέτουμε ότι περιλαμβάνει τουλάχιστον τις παρατηρηθείσες τιμές της υπο-εξέταση μεταβλητής, έστω u_t, μέχρι το χρόνο t δηλαδή

$$\mathbb{I}_t = (u_t, u_{t-1}, \ldots) \text{ και αντίστοιχα } \mathbb{I}_{t-1} = (u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots)$$

Κάθε υπόθεση/συνθήκη υπονοεί την ακριβώς από πάνω της χωρίς να συμβαίνει και το αντίστροφο. Καθώς «κινούμαστε» από την Υπ1 στην Υπ4 οι ιδιότητες που προσδίδουμε στη χρονοσειρά u_t γίνονται ολοένα και πιο αυστηρές δηλαδή κατέχουμε (υποθέτουμε ότι κατέχουμε) ολοένα και περισσότερη πληροφόρηση σχετικά με την u_t. Οπότε, καθώς κινούμαστε από την υπόθεση Υπ1 στην Υπ4, η στατιστική επαγωγή με βάση κατάλληλα τυποποιημένες συναρτήσεις των u_t διευκολύνεται.

4.5.3 Εργοδικές χρονοσειρές (ergodic time series)

Θα λέμε ότι μία ασθενώς στάσιμη χρονοσειρά $\{Y_t\}$ είναι **εργοδική** όταν

$$\gamma(k) = Cov(Y_t, Y_{t-k}) \to 0 \text{ καθώς } k \to +\infty$$

Για παράδειγμα αν

$$E(Y_t) = \mu \ , \ Var(Y_t) = \sigma^2 \text{ και } Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 2$$

τότε η Y_t είναι (ασθενώς) στάσιμη όμως **δεν είναι εργοδική** αφού η αυτοσυνδιακύμανση δεν τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνει η χρονική απόσταση των παρατηρήσεων της Y_t.

Τέτοιες περιπτώσεις είναι εξαιρετικά σπάνιες στην οικονομετρία αφού δεν αντιστοιχούν σε παρατηρούμενες ή θεωρητικές οικονομικές χρονοσειρές. Αν υποθέσουμε ότι η μόνη εξάρτηση που υπάρχει στη χρονοσειρά είναι γραμμική σειριακή εξάρτηση (γραμμική συσχέτιση) και η χρονοσειρά είναι στάσιμη, τότε είναι λογικό (για οικονομικές χρονοσειρές) να υποθέσουμε ότι η εξάρτηση φθίνει στο μηδέν καθώς οι παρατηρήσεις απομακρύνονται χρονικά.

Το υπόδειγμα AR(1)
Το υπόδειγμα που θα παρουσιάσουμε παρακάτω είναι από τα πλέον συνηθισμένα στη σύγχρονη οικονομετρία λόγω της απλότητάς του, της διαισθητικής του ερμηνείας καθώς και της «επιτυχίας» του στην υποδειγματοποίηση της εξάρτησης οικονομικών χρονοσειρών.

Ονομάζεται «αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα[5] πρώτης τάξης» ή αλλιώς AR(1) υπόδειγμα και λαμβάνει τη μορφή,

$$Y_t = \alpha + \varphi Y_{t-1} + u_t \tag{3}$$

όπου u_t είναι λευκός θόρυβος

[5] Ή αυτοπαλίνδρομο σχήμα (autoregressive model or scheme).

4.5.4 Παραδείγματα ασθενώς στάσιμων χρονοσειρών

Το παραπάνω υπόδειγμα συνδέει τη μεταβλητή Y_t με το «παρελθόν» της. Το υπόδειγμα όπως δίνεται στη σχέση (3) είναι ίσως παραπλανητικό ως προς την έκταση της σειριακής συσχέτισης της χρονοσειράς αφού μία πρώτη «αφελής» διατύπωση θα ήθελε την Y_t να εξαρτάται άμεσα μόνο από το πρόσφατο παρελθόν της, και ειδικότερα από την τιμή της μεταβλητής μία χρονική περίοδο πριν, δηλαδή την Y_{t-1}. Όμως, μία τέτοια θεώρηση θα ήταν εσφαλμένη.

$$\text{όταν} \quad |\varphi| < 1$$

$$Y_t = \frac{\alpha}{1-\varphi} + \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^j u_{t-j}$$

Εξετάζοντας τις ροπές της AR(1) διαδικασίας έχουμε σχετικά με το μέσο ότι

$$
\begin{aligned}
E\left(Y_t\right) &= \frac{\alpha}{1-\varphi} + \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^j E\left(u_{t-j}\right) \\
&= \frac{\alpha}{1-\varphi} + \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^j \times 0 \\
&= \frac{\alpha}{1-\varphi}
\end{aligned}
$$

Άρα η ύπαρξη σταθερού όρου στο AR(1) υπόδειγμα ισοδυναμεί με την ύπαρξη μη μηδενικού μέσου.

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.4 Παραδείγματα ασθενώς στάσιμων χρονοσειρών

Αναλυτικά, η διακύμανση σ_Y^2 ή $\gamma_Y(0)$ ή $Var(Y_t)$ της χρονοσειράς Y_t δίνεται από

$$\begin{aligned}
Var(Y_t) &= E\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\varphi^j u_{t-j}\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\varphi^i u_{t-i}\right) \\
&= E\left(u_t + \varphi u_{t-1} + \varphi^2 u_{t-2} + \ldots\right)\left(u_t + \varphi u_{t-1} + \varphi^2 u_{t-2} + \ldots\right) \\
&= \sigma_u^2 + \varphi^2\sigma_u^2 + \varphi^4\sigma_u^2 + \varphi^6\sigma_u^2 + \ldots \\
&= \sigma_u^2\left(1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \varphi^6 + \ldots\right) \\
&= \sigma_u^2 \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\varphi^2\right)^j \\
&= \frac{\sigma_u^2}{1-\varphi^2}
\end{aligned}$$

Η συνδιακύμανση δίνεται ως εξής. Αφού

$$Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^j u_{t-j}$$

και

$$Y_{t-k} = \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^j u_{t-k-j}$$

έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\gamma_Y(k) &= E\left(Y_t Y_{t-k}\right) \\
&= E\left(u_t + \varphi u_{t-1} + \ldots\right)\left(u_{t-k} + \varphi u_{t-k-1} + \ldots\right) \\
&= \frac{\sigma_u^2}{1-\varphi^2}\varphi^k \\
&= \sigma_Y^2 \varphi^k
\end{aligned}
$$

Επομένως, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για την στάσιμη AR(1) χρονοσειρά Y_t του υποδείγματος (3) δίνεται από

$$
\rho_Y(k) = \frac{\gamma_Y(k)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\sigma_Y^2 \varphi^k}{\sigma_Y^2} = \varphi^k
$$

Το υπόδειγμα AR(p)

Έστω το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα[6] τάξεως p ή αλλιώς υπόδειγμα AR(p)

$$y_t = \alpha + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + u_t, \quad t = 1, \ldots, T$$

όπου u_t λευκός θόρυβος

Μία AR(p) διαδικασία ή χρονοσειρά y_t μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\varphi(L) y_t = \alpha + u_t$$

όπου

$$\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \ldots - \varphi_p L^p$$

ένα πολυώνυμο p τάξεως του τελεστή υστέρησης[7] L.

[6] Θα υιοθετήσουμε μικρά γράμματα για να συμβολίσουμε τις χρονοσειρές

[7] Έστω ότι j ακέραιος. Τότε ο τελεστής υστέρησης δίνει $L^j y_t = y_{t-j}$. Για σταθερούς όρους, π.χ., α, ισχύει ότι $L^j \alpha = \alpha$.

Επειδή το L είναι ένας τελεστής συνηθίζεται, όταν προβαίνουμε σε αλγεβρικές πράξεις, να γράφουμε $\varphi(z)$ αντί $\varphi(L)$. Η συνθήκη στασιμότητας γενικά για AR(p) χρονοσειρές δίνεται ως εξής:

> *«όλες οι ρίζες r_j, για $j = 1, \ldots, p$ του πολυωνύμου $\varphi(z)$ πρέπει να βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου»*

Δηλαδή αν $\varphi(r_j) = 0$ τότε πρέπει η ρίζα $|r_j| > 1$ για κάθε j ώστε η y_t να είναι ασθενώς στάσιμη. Αν κάποια ρίζα r_j του πολυωνύμου είναι μιγαδική, δηλαδή μπορεί να εκφραστεί ως $r_j = \alpha \pm bi$ όπου α, b είναι πραγματικοί αριθμοί και $i = \sqrt{-1}$, τότε

$$|r_j| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Για παράδειγμα, έστω ένα $AR(2)$ υπόδειγμα

$$y_t = 0.85y_{t-1} - 0.23y_{t-2} + u_t$$

Η συνθήκη στασιμότητας επιβάλλει οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\varphi(z) = 1 - 0.85z + 0.23z^2$$

να βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.
Έχουμε ότι

$$\varphi(z) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1.847 \pm 0.966i$$

και

$$|r_{1,2}| = \sqrt{(1.847)^2 + (0.966)^2} = 2.084 > 1$$

οπότε η χρονοσειρά y_t είναι στάσιμη.

4.5.5 Μη στασιμότητα

Μη στάσιμες (nonstationary) καλούνται οι χρονοσειρές για τις οποίες τουλάχιστον μία ροπή τους εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο.

Συνήθως, η οικονομετρική θεωρία περιορίζεται στις δύο πρώτες ροπές ή από κοινού ροπές δηλαδή το μέσο, τη διακύμανση και τη αυτοσυνδιακύμανση ή αυτοσυσχέτιση.

Οπτικά, οι μη στάσιμες χρονοσειρές εμφανίζουν ορισμένα πρόδηλα χαρακτηριστικά. Δύο από αυτά είναι η εμφάνιση έντονων «δομών» ή «σχηματισμών» (structures or patterns) και η δεύτερη είναι η εμφάνιση «τάσεων» (trends).

Ως παράδειγμα μπορούμε να δούμε τα παρακάτω δύο διαγράμματα τα οποία παρουσιάζουν δύο πραγματοποιήσεις μη στάσιμων χρονοσειρών.

Ένα δημοφιλές υπόδειγμα «γέννησης» μίας μη στάσιμης χρονοσειράς $\{y_t\}$ είναι το παρακάτω

$$y_t = \alpha + bt + u_t, \quad t = 1, 2, ..., T$$

όπου υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά u_t των διαταρακτικών όρων του υποδείγματος είναι στάσιμη.

Για παράδειγμα, μπορούμε να υιοθετήσουμε για την u_t κάποια από τις υποθέσεις Υπ1, Υπ2, Υπ2α, Υπ3, Υπ4 ή γενικότερα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η χρονοσειρά u_t αυτοσυσχετίζεται αλλά είναι στάσιμη με μηδενικό μέσο.

Είναι εμφανές ότι ο μέσος της σειράς $\{y_t\}$ (δεσμευμένος ή μη) εξαρτάται γραμμικά από το χρόνο.

$$E(y_t) = \alpha + \beta t$$

ενώ διακύμανση και συνδιακύμανση δεν εξαρτώνται άμεσα από το χρόνο αφού

$$Var(y_t) = \sigma_y^2 = \sigma_u^2$$

και

$$Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_y(k) = \gamma_u(k)$$

Χρονοσειρές με μη στασιμότητα αυτού του τύπου ονομάζονται και **«στάσιμες γύρω από τάση» (trend stationary)** και μπορούν να γενικευτούν ως προς την υποδειγματοποίηση της μέσης τιμής της y_t χρησιμοποιώντας πολυώνυμα του χρόνου μεγαλύτερης τάξης, για παράδειγμα

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_k t^k + u_t$$

ή και πιο σύνθετες μη γραμμικές συναρτήσεις του χρόνου, $y_t = f(t) + u_t$, με την $\{u_t\}$ να θεωρείται πάντα μία ασθενώς στάσιμη χρονοσειρά μηδενικού μέσου.

4.5.5 Μη στασιμότητα

Ένα άλλο δημοφιλές παράδειγμα μη στάσιμων χρονοσειρών, ίσως το σημαντικότερο στη σύγχρονη οικονομετρία χρονοσειρών, είναι αυτές οι οποίες καθίστανται στάσιμες μετά την εφαρμογή του τελεστή πρώτων διαφορών. Οι χρονοσειρές αυτού του τύπου ονομάζονται **«στάσιμες μέσω πρώτων διαφορών» (difference stationary)**.

Έστω ότι η χρονοσειρά $\{y_t\}$ δημιουργείται από το υπόδειγμα **τυχαίας εξέλιξης ή τυχαίου περιπάτου (random walk)**

$$y_t = y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim i.i.d\left(0, \sigma_u^2\right) \tag{4}$$

ή από το υπόδειγμα **τυχαίας εξέλιξης με μετατόπιση (random walk with drift)**

$$y_t = a + y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim i.i.d\left(0, \sigma_u^2\right) \tag{5}$$

4.5.5 Μη στασιμότητα

Αποδεικνύεται εύκολα όταν λύσουμε προς τα πίσω (backwards solution) ότι χρονοσειρές που «δημιουργούνται» σύμφωνα με τα υποδείγματα (4) και (5) μπορούν να γραφούν αντίστοιχα ως

$$y_t = y_0 + \sum_{j=1}^{t} u_j \text{ ή } y_t = \sum_{j=1}^{t} u_j \text{ αν θέσουμε την αρχική τιμή } y_0 = 0$$

και

$$y_t = y_0 + at + \sum_{j=1}^{t} u_j \text{ ή } y_t = at + \sum_{j=1}^{t} u_j \text{ αν θέσουμε την αρχική τιμή } y_0 = 0$$

όπου ο όρος $\sum_{j=1}^{t} u_j$ καλείται **«στοχαστική τάση» (stochastic trend)** σε αντίθεση με τον όρο at ο οποίος αντιστοιχεί στην προσδιοριστική τάση.

ο μέσος, η διακύμανση, η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης και αυτοσυσχέτισης δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E(y_t) = 0 \\ \sigma_Y^2 &= \gamma_Y(0) = Var(y_t) = t\sigma_u^2 \\ \gamma_Y(k) &= Cov(y_t, y_{t-k}) = (t-k)\sigma_u^2 \ , \ k \geq 1 \\ \rho_Y(k) &= \frac{\gamma_Y(k)}{\gamma_Y(0)} = \frac{(t-k)\sigma_u^2}{t\sigma_u^2} = 1 - \frac{k}{t} \ , \ k \geq 1 \end{aligned} \tag{6}$$

ενώ αν δημιουργείται από ένα υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου με μετατόπιση οι αντίστοιχες ροπές δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E(y_t) = at \\ \sigma_Y^2 &= \gamma_Y(0) = Var(y_t) = t\sigma_u^2 \\ \gamma_Y(k) &= Cov(y_t, y_{t-k}) = (t-k)\sigma_u^2 \ , \ k \geq 1 \\ \rho_Y(k) &= \frac{\gamma_Y(k)}{\gamma_Y(0)} = \frac{(t-k)\sigma_u^2}{t\sigma_u^2} = 1 - \frac{k}{t} \ , \ k \geq 1 \end{aligned} \tag{7}$$

4.5 Στασιμότητα και μη στασιμότητα
4.5.5 Μη στασιμότητα

Είναι εμφανές ότι σε κάθε περίπτωση η χρονοσειρά είναι μη στάσιμη αφού τουλάχιστον η διακύμανση και η συνδιακύμανση αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου. Εφαρμόζοντας τον τελεστή πρώτων διαφορών $\Delta = (1 - L)$ στην χρονοσειρά y_t στο υπόδειγμα τυχαίας εξέλιξης χωρίς μετατόπιση καταλήγουμε σε μία στάσιμη χρονοσειρά, αφού

$$y_t = y_{t-1} + u_t \Leftrightarrow y_t - y_{t-1} = u_t \Leftrightarrow \Delta y_t = u_t$$

και παρομοίως στο υπόδειγμα τυχαίας εξέλιξης με μετατόπιση

$$\Delta y_t = \alpha + u_t$$

Αυτού του τύπου οι μη στάσιμες χρονοσειρές καλούνται και **ολοκληρώσιμες πρώτης τάξης**, $I(1)$, **(integrated of order 1)** ενώ αντίστοιχα η σειρά Δy_t καλείται **ολοκληρώσιμη μηδενικής τάξης**, $I(0)$, αφού δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε πρώτες διαφορές για να έχουμε στασιμότητα.

4.5.5 Μη στασιμότητα

Το ζήτημα της μη στασιμότητας των οικονομικών χρονοσειρών αποτέλεσε τον κυρίαρχο άξονα έρευνας τα τελευταία - τουλάχιστον - 20 χρόνια στην οικονομετρία χρονοσειρών αφού, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το ζήτημα των πλασματικών συσχετίσεων μεταξύ μη στάσιμων χρονοσειρών είναι άμεσο και έντονο.

Η σύγχρονη οικονομετρική πρακτική αφαιρεί τις «τάσεις» είτε αυτές είναι προσδιοριστικές είτε στοχαστικές και κατόπιν προβαίνει σε εκτίμηση και επαγωγή των παραμέτρων ενδιαφέροντος, αφού σε αντίθετη περίπτωση οποιαδήποτε ευρήματα κινδυνεύουν να χαρακτηριστούν «πλασματικά».

Πρέπει να αναφέρουμε ότι και οι δύο τρόποι υποδειγματοποίησης της μη στασιμότητας είναι «μη θεωρητικές» αφού υποδηλώνουν άγνοια σχετικά με τη δημιουργία της τάσης στη χρονοσειρά ενώ έχουν και γενικότερα σημαντικές επιπτώσεις στη διαδικασία της εμπειρικής έρευνας. Για παράδειγμα,
αν η τάση είναι προσδιοριστική τότε

- η χρονοσειρά τείνει μακροχρόνια να επιστρέφει στο μέσο της (δηλαδή στην γραμμική ή άλλη προσδιοριστική τάση)
- οι διαταράξεις u_t έχουν αποτελέσματα τα οποία φθίνουν με το πέρασμα του χρόνου[8]
- ενώ η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης $E\left(y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}\right)^2$, όπου $\hat{y}_{t+h}$ υποδηλώνει την πρόβλεψη της χρονοσειράς h περιόδους μετά το τέλος του δείγματος, T, είναι σταθερή για κάθε ορίζοντα πρόβλεψης h.

[8] Τέτοιου είδους αποτελέσματα, ως συνάρτηση του χρονικού ορίζοντα στον οποίο εκδηλώνονται, ονομάζονται και «συναρτήσεις απόκρισης σε αιφνίδιες διαταραχές» (impulse response functions), ένα θέμα στο οποίο δεν θα επεκταθούμε περισσότερο.

Αν η τάση είναι στοχαστική τότε

- η υποκείμενη σειρά δεν τείνει μακροχρόνια προς κάποιο μέσο (ή τάση)
- οι διαταράξεις έχουν «μόνιμα» μη φθίνοντα αποτελέσματα στη χρονοσειρά
- ενώ η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης αυξάνει καθώς αυξάνεται ο ορίζοντας της πρόβλεψης, h.

4.6 Μέθοδος εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας

Σε αυτή την ενότητα θα γνωρίσουμε μία νέα μέθοδο εκτίμησης παραμέτρων ενδιαφέροντος. Η μέθοδος ονομάζεται **«μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας» (maximum likelihood method, ML)** και προϋποθέτει γνώση της κατανομής από την οποία προέρχονται τα δεδομένα[9].

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ από μία κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(z|\theta)$$

όπου $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι ένα k-διάστατο διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων και Θ ένας δοσμένος παραμετρικός χώρος. Δηλαδή τα δεδομένα δημιουργήθηκαν με βάση μία συγκεκριμένη κατανομή $f(z|\cdot)$, η οποία χαρακτηρίζεται από την τιμή της παραμέτρου θ.

[9] Στην οικονομετρία είναι συχνό φαινόμενο να μη γνωρίζουμε την κατανομή των δεδομένων ή του διαταρακτικού όρου. Στις περιπτώσεις αυτές συνήθως «επιβάλλουμε» την υπόθεση της κανονικής κατανομής παρότι κάτι τέτοιο μπορεί να μην ισχύει. Τότε, η μέθοδος εκτίμησης ονομάζεται **«μέθοδος οιονεί μεγίστης πιθανοφάνειας»** (quasi-maximum likelihood method).

4.6 Μέθοδος εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας

Η ανεξαρτησία[10] των $z_1, z_2, \ldots, z_n$ συνεπάγεται ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n | \theta)$$

γράφεται ως το γινόμενο των επιμέρους οριακών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i | \theta)$$

[10] Ένα τυχαίο δείγμα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ συνεπάγεται ότι οι $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι ανεξάρτητες.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του δείγματος (sample likelihood)

$$L_n(\theta|z_1, z_2, \ldots, z_n) \text{ ή } L_n(\theta)$$

ορίζεται σε αυτή την περίπτωση ως

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i|\theta)$$

όπου τα τυχαία στοιχεία της συνάρτησης πυκνότητας αντικαθιστώνται από τα αντίστοιχα παρατηρούμενα στοιχεία του δείγματος $z_1, z_2, \ldots, z_n$ και η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μετατρέπεται σε συνάρτηση της παραμέτρου θ.

4.6 Μέθοδος εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας

Η αρχή της μεγιστοποίησης της συνάρτησης $L_n(\theta)$ ως προς την παράμετρο θ ερμηνεύεται ως *«εύρεση της τιμής της παραμέτρου θ που καθιστά την πιθανότητα παρατήρησης του συγκεκριμένου δείγματος $z_1, z_2, \ldots, z_n$ όσο το δυνατόν μεγαλύτερη».*
Στην περίπτωση που δεν έχουμε τυχαίο δείγμα ή στην περίπτωση που υποπτευόμαστε εξάρτηση των παρατηρήσεων του δείγματος, **π.χ., όταν μελετούμε χρονοσειρές**, τότε αναλύουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(z_1, z_2, \ldots, z_T|\theta)$ στο γινόμενο των δεσμευμένων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, \ldots, z_T|\theta) &= f(z_T|z_{T-1}, z_{T-2}, \ldots, z_1; \theta) \times \\ &\quad \times f(z_{T-1}|z_{T-2}, z_{T-3}, \ldots, z_1; \theta) \\ &\quad \times \ldots \\ &\quad \times f(z_2|z_1; \theta) \times f(z_1|\theta) \\ &= f(z_1|\theta) \times \prod_{t=2}^{T} f(z_t|\mathbb{I}_{t-1}; \theta) \end{aligned}$$

όπου $\mathbb{I}_{t-1}$ συμβολίζει το πληροφοριακό σύνολο

$$\mathbb{I}_{t-1} = \{z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots, z_1\} \;\; \gamma\iota\acute{\alpha} \;\; t \geq 2$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας του θ θα συμβολίζεται με $\tilde{\theta}_{ML}$ και δίνεται από

$$\tilde{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta} L_n(\theta)$$

Ο συμβολισμός argmax (argument that maximizes) υποδηλώνει τη συχνή αδυναμία εύρεσης αναλυτικής λύσης (δηλαδή λύσης κλειστής μορφής) στο πρόβλημα μεγιστοποίησης, αφού στις περισσότερες των περιπτώσεων οι συνθήκες πρώτης τάξης

$$\frac{dL_n(\theta)}{\theta} = 0$$

είναι μη γραμμικές εξισώσεις.

4.6 Μέθοδος εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας

Πριν προβούμε στην παρουσίαση δύο παραδειγμάτων εφαρμογής της μεθόδου, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι το διάνυσμα των παραμέτρων θ θα πρέπει να **ταυτοποιείται** δηλαδή να είναι δυνατή η εκτίμησή του με βάση τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.

Τέλος, να αναφέρουμε, ότι η μέθοδος έχει και άλλες στατιστικές απαιτήσεις πέραν της γνώσης της υποκείμενης κατανομής και τη ταυτοποίησης, όπως την ομαλότητα της συνάρτησης πιθανοφάνειας που βεβαιώνει την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης πιθανοφάνειας κ.α.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο παραδείγματα εκτίμησης παραμέτρων με άμεση εφαρμογή στην οικονομετρική πρακτική.

4.6.1 Άσκηση

Στη δεύτερη άσκηση, σχετική με το κλασσικό γραμμικό υπόδειγμα

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \ , \ u_i \sim N.i.d(0, \sigma_u^2) \ , \ i = 1, \ldots, n$$

σκοπός μας είναι η εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού

$$\theta = \left(\alpha \quad , \quad \beta \quad , \quad \sigma_u^2 \right)'$$

με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας και η σύγκριση των εκτιμητών

$$\tilde{\theta}_{ML} = \left(\tilde{\alpha}_{ML} \quad , \quad \tilde{\beta}_{ML} \quad , \quad \tilde{\sigma}^2_{u,ML} \right)'$$

με αυτών της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (ΕΤ).

4.6.1 Άσκηση

Για ευκολία, θεωρήστε την ερμηνευτική μεταβλητή x_i, $i = 1, \ldots, n$ ως μη στοχαστική. Η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας $\ln L_n\left(\alpha, \beta, \sigma_u^2\right)$ δίνεται από την

$$
\begin{aligned}
\ln L_n\left(\alpha, \beta, \sigma_u^2\right) &= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \\
&= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2
\end{aligned}
$$

4.6.1 Άσκηση

Οι **συνθήκες πρώτης τάξης** δίνονται από τις εξισώσεις

$$\frac{\partial \ln L_n}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L_n}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)\, x_i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L_n}{\partial \sigma_u^2} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\left(\sigma^2\right)^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = 0$$

4.6.1 Άσκηση

οι οποίες έχουν λύση

$$\tilde{\alpha}_{ML} = \bar{y} - \tilde{\beta}_{ML}\bar{x}$$

$$\tilde{\beta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\tilde{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$$

με τους εκτιμημένους διαταρακτικούς όρους

$$\hat{u} = y_i - \tilde{\alpha}_{ML} - \tilde{\beta}_{ML} x_i$$

να ταυτίζονται με τα κατάλοιπα της μεθόδου των ΕΤ.

4.6.1 Άσκηση

Ως άσκηση, μπορούμε *να* διαπιστώσουμε ότι η εσσιανή μήτρα των δεύτερων παραγώγων $\frac{\partial^2 \ln L_n}{\partial\theta\partial\theta'}$ είναι αρνητικά ορισμένη όταν υπολογιστεί στο στάσιμο σημείο $\tilde{\theta}_{ML}$ άρα οι εκτιμητές $\tilde{\alpha}_{ML}, \tilde{\beta}_{ML}, \tilde{\sigma}^2_{ML}$ μεγιστοποιούν τη συνάρτηση $\ln L_n\left(\alpha, \beta, \sigma_u^2\right)$.

4.7 Ιδιότητες εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας

Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες «ομαλότητας» (regularity conditions) της συνάρτησης πιθανοφάνειας, οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας επιδεικνύουν έναν αριθμό ελκυστικών ασυμπτωτικών[11] ιδιοτήτων που τους καθιστούν δημοφιλείς στην εφαρμοσμένη ανάλυση. Οι ιδιότητες αυτές συνοψίζονται παρακάτω και θα γίνουν κατανοητές όταν ασχοληθούμε με την ασυμπτωτική ανάλυση στο κεφάλαιο 8:

(α) καθώς το δείγμα τείνει στο άπειρο - δηλαδή καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνει ή αλλιώς σε μεγάλα δείγματα - οι εκτιμητές συμπίπτουν με τις παραμέτρους που εκτιμούν[12]

(β) καθώς το δείγμα τείνει στο άπειρο, οι εκτιμητές είναι αποτελεσματικοί δηλαδή έχουν την μικρότερη δυνατή διακύμανση ή αλλιώς επιτυγχάνουν τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια,

(γ) καθώς το δείγμα τείνει στο άπειρο, κατάλληλα τυποποιημένες συναρτήσεις των εκτιμητών κατανέμονται κανονικά

[11] Ασυμπτωτικά σημαίνει καθώς το δείγμα τείνει στο άπειρο (θεωρητικά).

[12] Ιδιότητα συνέπειας. Θα γίνει επίσης κατανοητή στο κεφάλαιο 8.

4.8 Ασκήσεις

4.8 Ασκήσεις: Άσκηση 1

4.8 Ασκήσεις: Άσκηση 2

Τέλος ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- Ιωάννης Α. Βενέτης (2013). **Εισαγωγή στην Οικονομετρία**, GOTSIS Εκδόσεις, Πάτρα, ISBN 978-960-9427-25-8