ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ενότητα 3: Στατιστική επαγωγή στο απλό γραμμικό υπόδειγμα

Ιωάννης Βενέτης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Πανεπιστήμιο Πατρών

Σκοποί Ενότητας

⇒ Εισαγωγή στη στατιστική επαγωγή στο απλό γραμμικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με χρήση ελέγχων στατιστικής σημαντικότητας των εκτιμημένων συντελεστών

⇒ Εισαγωγή στην πρόβλεψη με το απλό γραμμικό υπόδειγμα. Κατασκευή διαστήματος εμπιστοσύνης της πρόβλεψης

Περιεχόμενα ενότητας

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Στο απλό γραμμικό υπόδειγμα της μορφής

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο σύνολο των κλασσικών υποθέσεων,

- οπότε $u_i \sim N.i.d\left(0, \sigma^2\right)$, $\forall i$
- και, προσωρινά, για αλγεβρική ευκολία υιοθετούμε τη μη ρεαλιστική υπόθεση ότι η ερμηνευτική μεταβλητή X_i, $\forall i$ είναι μη στοχαστική, άρα θεωρείται δεδομένη σε επαναλαμβανόμενα δείγματα
- Οι διαταρακτικοί όροι u_i είναι τυχαίες μεταβλητές που κατανέμονται κανονικά και ανεξάρτητα με τον ίδιο μηδενικό μέσο και την ίδια (άγνωστη) διακύμανση σ^2 για κάθε i
- Η εξαρτημένη μεταβλητή Y_i θεωρείται λοιπόν μία τυχαία μεταβλητή για κάθε i αφού είναι μία απλή γραμμική συνάρτηση των διαταρακτικών όρων u_i

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (ΕΤ) υπολογίζουμε τους εκτιμητές των παραμέτρων ενδιαφέροντος α, β, σ^2. Οι εκτιμητές θα συμβολίζονται:

- γενικά με $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$
- ή με $\hat{\alpha}_{ET}, \hat{\beta}_{ET}, \hat{\sigma}^2_{ET}$ όταν θέλουμε να ξεχωρίσουμε την μέθοδο ΕΤ από άλλες μεθόδους ή να δώσουμε έμφαση στη χρήση της μεθόδου
- ή με $\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\sigma}^2_n$ όταν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στην εξάρτηση των εκτιμητών από το μέγεθος του δείγματος n. Στην περίπτωση χρονοσειρών αντίστοιχα θα μπορούσαμε να γράψουμε $\hat{\alpha}_T, \hat{\beta}_T, \hat{\sigma}^2_T$

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Οι εκτιμητές ΕΤ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$ δίνονται αναλυτικά από τις σχέσεις

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y}) \left(X_i - \bar{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

και

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$$

Είναι εμφανές ότι οι εκτιμητές $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$ αποτελούν συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών και η τιμή που θα λάβουμε σε κάποιο δείγμα για τις $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$ εξαρτάται από την τιμή που έλαβε (τουλάχιστον[1]) η εξαρτημένη μεταβλητή Y_i στο συγκεκριμένο δείγμα.

[1] Αν υιοθετήσουμε το δεύτερο σύνολο κλασσικών υποθέσεων (μία πιο ρεαλιστική κίνηση), τότε η τιμή του εκτιμητή εξαρτάται **και** από τις τιμές των τυχαίων μεταβλητών X_i.

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Ένα διαφορετικό δείγμα θα έδινε διαφορετικές εκτιμήσεις, άρα οι εκτιμητές είναι τυχαίες μεταβλητές που υπόκεινται σε κατανομές δειγματοληψίας[2]. Οπότε, σκοπός μας είναι, **πρώτα** η εκτίμηση των άγνωστων συντελεστών του υποδείγματος **και κατόπιν** η στατιστική επαγωγή για τους εκτιμημένους συντελεστές που θα επιτρέψει την ποιοτική διερεύνηση των χαρακτηριστικών του υποδείγματος.
Επιπλέον, οι εκτιμητές ΕΤ έχουν στατιστικές ιδιότητες οι οποίες τους καθιστούν ελκυστικούς έναντι άλλων εκτιμητών. Για παράδειγμα, κάτω από τις (αυστηρές) υποθέσεις του υποδείγματος (1) αποδεικνύεται ότι οι εκτιμητές ΕΤ είναι **αμερόληπτοι**, δηλαδή

$$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha \ , \ E\left(\hat{\beta}\right) = \beta \ \text{και} \ E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2$$

[2] Κατανομές που μεταβάλλονται με το δείγμα.

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών»

Επίσης, σημαντικό ρόλο στη στατιστική επαγωγή διαδραματίζει και η δεύτερη ροπή των εκτιμητών, δηλαδή η διακύμανσή τους, αφού σε αυτή βασίζεται η στατιστική ιδιότητα της **αποτελεσματικότητας** ή ακρίβειας των εκτιμητών, ενώ αποτελεί και ουσιαστικό μέρος της στατιστικής επαγωγής ως παράγοντας τυποποίησης των στατιστικών ελέγχου.

Η διακύμανση των εκτιμητών ΕΤ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$ των συντελεστών του απλού γραμμικού υποδείγματος δίνεται από τους παρακάτω τύπους

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

$$Var\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right)$$

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{-1}$$

και

$$Var\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-2}$$

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Αφού έχουμε υπολογίσει την αναμενόμενη τιμή και την διακύμανση των εκτιμητών μένει να διαπιστώσουμε αν μπορούμε να βρούμε την κατανομή τους. Κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας και ανεξαρτησίας των διαταρακτικών όρων, $u_i \sim N.i.d\left(0, \sigma^2\right)$, αποδεικνύεται (δείτε άσκηση 1) ότι

$$\hat{\beta} \sim N.i.d\left(\beta, \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-1}\right)$$

ενώ

$$\frac{(n-2)\,\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 \sim \chi^2_{n-2}$$

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Τα παραπάνω δύο αποτελέσματα είναι ουσιώδη στην βασική στατιστική επαγωγή του απλού γραμμικού υποδείγματος. Ένας έλεγχος υπόθεσης σχετικά με την άγνωστη παράμετρο β θα μπορούσε να βασιστεί στην τυποποιημένη κανονική μεταβλητή

$$z = \frac{\hat{\beta} - E\left(\hat{\beta}\right)}{\sqrt{Var\left(\hat{\beta}\right)}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{se\left(\hat{\beta}\right)} \sim N(0, 1)$$

όπου

$$se\left(\hat{\beta}\right) = \sqrt{Var\left(\hat{\beta}\right)} = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Στην παραπάνω στατιστική, η παράμετρος της διακύμανσης του διαταρακτικού όρου σ^2, άρα και η τυπική απόκλιση σ, είναι άγνωστη οπότε δεν μπορούμε να προβούμε σε εμπειρική χρήση της στατιστικής. Όμως μπορούμε να κάνουμε χρήση ενός γνωστού θεωρήματος από τη στατιστική θεωρία σύμφωνα με το οποίο

> *«Μία τυχαία μεταβλητή $t = \frac{z}{\sqrt{\frac{y}{n}}}$ κατανέμεται ως t-student με n βαθμούς ελευθερίας όταν **(α)** ο αριθμητής κατανέμεται σύμφωνα με την τυποποιημένη κανονική κατανομή $z \sim N(0,1)$ **(β)** ο παρανομαστής δίνεται από την τετραγωνική ρίζα μίας $y \sim \chi^2_n$ τυχαίας μεταβλητής δια τους βαθμούς ελευθερίας n και **(γ)** οι τυχαίες μεταβλητές z,y είναι ανεξάρτητες»*

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Συνεπάγεται ότι μπορούμε να «διώξουμε» την άγνωστη παράμετρο του πληθυσμού σ^2 από τη στατιστική

$$z = \frac{\hat{\beta} - E\left(\hat{\beta}\right)}{\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{se\left(\hat{\beta}\right)}$$

μέσω της διαίρεσης

$$t = \frac{\left(\frac{\hat{\beta}-\beta}{se\left(\hat{\beta}\right)}\right)}{\sqrt{\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\frac{\sigma^2}{(n-2)}}}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)}$$

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Η *νέα* στατιστική ονομάζεται **t-student στατιστική** και κατανέμεται σύμφωνα με

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)} \sim t_{n-2} \tag{2}$$

αφού έχουμε ήδη αναφέρει παραπάνω τις προϋποθέσεις **(α)** και **(β)** του θεωρήματος, ενώ αποδεικνύεται ότι αριθμητής και παρονομαστής είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές άρα ικανοποιείται και η προϋπόθεση **(γ)**.

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης του εκτιμητή ονομάζεται τυπικό σφάλμα και η εκτίμηση του τυπικού σφάλματος του δίνεται από

$$\widehat{se}\left(\hat{\beta}\right) = \sqrt{\widehat{Var}\left(\hat{\beta}\right)} = \hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{-1/2}$$

Δηλαδή, «υιοθετεί» τον αμερόληπτο εκτιμητή

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$

της διακύμανσης σ^2 του διαταρακτικού όρου.

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Με βάση τη στατιστική t-student (2) μπορούμε να προβούμε σε μονόπλευρο ή δίπλευρο έλεγχο υπόθεσης. Συνήθως, για τους συντελεστές κλίσης οι έλεγχοι είναι δίπλευροι, δηλαδή ελέγχουμε την

$$\begin{array}{rlll} \text{Μηδενική υπόθεση} & H_0: & \beta & = & \text{αριθμός} \\ \text{έναντι της} & & & & \\ \text{εναλλακτικής υπόθεσης} & H_1: & \beta & \neq & \text{αριθμός} \end{array}$$

Ο έλεγχος δίπλευρων υποθέσεων πραγματοποιείται ως εξής. Υπολογίζουμε την t-student στατιστική

$$t = \frac{\hat{\beta} - \text{αριθμός}}{\widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)} \sim t_{n-2}$$

και τη συγκρίνουμε με την κριτική τιμή (έστω $t_{n-2}^{\alpha/2}$) από τους πίνακες της t-student κατανομής με $n-2$ βαθμούς ελευθερίας και δεδομένο α (επίπεδο σημαντικότητας). Το τελευταίο ορίζει τη πιθανότητα να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 ενώ είναι σωστή.

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Αν ισχύει ότι $|t| \leq t_{n-2}^{\alpha/2}$, τότε **δεν απορρίπτουμε**[3] τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας $(100\alpha)\%$, ενώ όταν $|t| > t_{n-2}^{\alpha/2}$ τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας $(100\alpha)\%$. Στην οικονομετρική πρακτική συνηθίζεται ευρέως να θέτουμε $\alpha = 0.05$ ή αν δεν είμαστε «αυστηροί[4]» τότε $\alpha = 0.10$. Είναι σπάνιο να υιοθετήσουμε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.01$, αν και απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης σε τέτοια επίπεδα και για «συμβατικά μεγέθη δείγματος» παρέχει «σημαντικότατες ενδείξεις» εναντίον της μηδενικής υπόθεσης H_0. Σχετικά με τους συμβολισμούς, συνηθίζεται να γράφουμε το α και επί τοις εκατό, π.χ., αν $\alpha = 0.05$ τότε το επίπεδο σημαντικότητας λέμε ότι είναι 5%.

[3] Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για την απόρριψη της υποθέσεως και όχι ότι η μηδενική υπόθεση είναι πραγματικά ορθή.

[4] Καθώς το δείγμα μεγαλώνει τα τυπικά σφάλματα μικραίνουν, γι'αυτό συνηθίζεται να θέτουμε το $\alpha = 1\%$ για «μεγάλα» δείγματα και το $\alpha = 10\%$ για «μικρά» δείγματα. Για τις ανάγκες του μαθήματος, η επιλογή $\alpha = 5\%$ θα είναι αρκετή.

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Όταν ο δίπλευρος έλεγχος είναι της μορφής

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \beta = \quad 0 \\ H_1 : \quad & \beta \neq \quad 0 \end{aligned}$$

δηλαδή όταν ελέγχουμε **αν η παράμετρος του πληθυσμού είναι μηδενική** και απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση λέμε ότι

- *«η εκτίμηση $\hat{\beta}$ διαφέρει σημαντικά από το μηδέν»*
- *«ή ότι η εκτίμηση είναι στατιστικά σημαντική»*
- *«ή ότι η μεταβλητή X_i έχει στατιστικά σημαντική επίδραση στην Y_i»*

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Ο συγκεκριμένος έλεγχος ονομάζεται **έλεγχος σημαντικότητας** του εκτιμημένου συντελεστή και είναι ο βασικότερος έλεγχος που διεξάγουμε στα πρώτα στάδια της εμπειρικής ανάλυσης.
Το $(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης ορίζεται μέσω της παρακάτω πιθανότητας

$$P\left(-t_{n-2}^{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\beta}-\beta}{\widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)} \leq t_{n-2}^{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

όπου $t_{n-2}^{\alpha/2}$ αντιστοιχεί στην «κατάλληλη» κριτική τιμή από τους πίνακες της t-student κατανομής με $n-2$ βαθμούς ελευθερίας.

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

Αν αναδιατάξουμε τις ανισότητες μέσα στην πιθανότητα έχουμε

$$
\begin{aligned}
P\left(-t_{n-2}^{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\beta}-\beta}{\widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)} \leq t_{n-2}^{\alpha/2}\right) &= 1-\alpha \Leftrightarrow \\
P\left(-t_{n-2}^{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\left(\hat{\beta}\right) \leq \hat{\beta}-\beta \leq t_{n-2}^{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)\right) &= 1-\alpha \Leftrightarrow \\
P\left(-t_{n-2}^{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\left(\hat{\beta}\right) - \hat{\beta} \leq -\beta \leq t_{n-2}^{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\left(\hat{\beta}\right) - \hat{\beta}\right) &= 1-\alpha \Leftrightarrow \\
P\left(\hat{\beta} - t_{n-2}^{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\left(\hat{\beta}\right) \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{n-2}^{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)\right) &= 1-\alpha
\end{aligned}
$$

3.1 Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας συντελεστών

δηλαδή η πιθανότητα οι τυχαίες μεταβλητές $\hat{\beta} - t_{n-2}^{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)$ και $\hat{\beta} + t_{n-2}^{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\left(\hat{\beta}\right)$ να λαμβάνουν τιμές που περικλείουν την παράμετρο του πληθυσμού β είναι $(1-\alpha)\%$. Το διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί επίσης να οριστεί ως το διάστημα των τιμών $\beta^{(0)}$ της παραμέτρου β για το οποίο η μηδενική υπόθεση $H_0 : \beta = \beta^{(0)}$ δεν απορρίπτεται από τους δίπλευρους ελέγχους.
Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης και να προβούμε σε έλεγχο υποθέσεων σχετικά με το σταθερό όρο του υποδείγματος α αλλά και τη διακύμανση σ^2 του διαταρακτικού όρου.

3.1.1 Παράδειγμα

3.2 Πρόβλεψη με το απλό γραμμικό υπόδειγμα

Μία από τις βασικότερες εμπειρικές χρήσεις της Οικονομετρίας εδράζεται στη χρήση του υποδείγματος για την πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής. Ουσιαστικά, οι προσαρμοσμένες τιμές $\hat{Y}_i$ του υποδείγματος

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$$

αποτελούν την πρόβλεψη του υποδείγματος και της μεθόδου εκτίμησης για την εξαρτημένη μεταβλητή και για δεδομένες (δειγματικές) τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής X_i. Οι συγκεκριμένες τιμές, $\hat{Y}_i$, $i = 1, \ldots, n$ ονομάζονται **προσαρμοσμένες τιμές ή προβλέψεις**. Όταν όμως θεωρήσουμε τιμές της X οι οποίες είναι εκτός των τιμών του δείγματος ή ειδικότερα με δεδομένα χρονοσειρών, εκτός του χρονικού εύρους που καλύπτει το δείγμα, τότε η παραγόμενη τιμή $\hat{Y}$ της Y ονομάζεται μόνο **πρόβλεψη** με βάση το εκτιμημένο υπόδειγμα.

3.2 Πρόβλεψη με το απλό γραμμικό υπόδειγμα

Με βάση την εκτίμηση του υποδείγματος και τη δοσμένη τιμή X_0 είμαστε σε θέση να «προβλέψουμε» την εξαρτημένη μεταβλητή Y. Συγκεκριμένα, η **σημειακή πρόβλεψη** (point forecast) δίνεται από

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0 \tag{3}$$

ή όταν έχουμε δεδομένα χρονοσειρών από την

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{T+1} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_{T+1} \\
\hat{Y}_{T+2} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_{T+2} \\
&\vdots \\
\hat{Y}_{T+k} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_{T+k}
\end{aligned}$$

όπου k ονομάζεται **ορίζοντας πρόβλεψης**.

3.2 Πρόβλεψη με το απλό γραμμικό υπόδειγμα

Το σφάλμα πρόβλεψης

$$\begin{aligned} e_0 &= Y_0 - \hat{Y}_0 \\ &\text{ή} \\ e_{T+k} &= Y_{T+k} - \hat{Y}_{T+k} \end{aligned}$$

ορίζεται ως η απόκλιση της «πραγματικής» τιμής Y_0 που θα λάβει η εξαρτημένη μεταβλητή από την πρόβλεψή της $\hat{Y}_0$ με βάση το υπόδειγμα αναφοράς.

3.2 Πρόβλεψη με το απλό γραμμικό υπόδειγμα

Με βάση την υπόθεση ότι x_0 μη στοχαστική μεταβλητή, το μέσο σφάλμα πρόβλεψης είναι μηδενικό $E\left(e_0\right) = 0$ όταν ο εκτιμητής ΕΤ είναι αμερόληπτος, δηλαδή όταν $E\left(\hat{\beta} - \beta\right) = 0$ αποτέλεσμα που βασίζεται στην υπόθεση $E\left(u_i\right) = 0$, $\forall i$, ενώ αποδεικνύεται με χρήση των υποθέσεων $Var\left(u_i\right) = \sigma^2$, $Cov\left(u_i, u_j\right) = 0$, $\forall i \neq j$ ότι

$$Var\left(e_0\right) = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \right)$$

Έχοντας βρει την αναμενόμενη τιμή $E(e_0) = 0$ και διακύμανση $Var(e_0)$ του σφάλματος πρόβλεψης e_0, μένει να βρούμε την κατανομή του ώστε να προβούμε σε στατιστική επαγωγή.

3.2 Πρόβλεψη με το απλό γραμμικό υπόδειγμα

το σφάλμα πρόβλεψης

$$t = \frac{e_0}{\widehat{se}\left(e_0\right)} = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\widehat{se}\left(e_0\right)} \sim t_{n-2}$$

ή αναλυτικά

$$e_0 \sim N\left(0, \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\right)\right)$$

3.2 Πρόβλεψη με το απλό γραμμικό υπόδειγμα

Αντικαθιστώντας τη διακύμανση $Var(e_0)$ με την εκτιμημένη διακύμανση $\widehat{Var}(e_0)$ (η οποία χρησιμοποιεί $\hat{\sigma}^2$ αντί σ^2), το σφάλμα πρόβλεψης κατανέμεται ως μία t-student τυχαία μεταβλητή με $n-2$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή

$$t = \frac{e_0}{\widehat{se}(e_0)} = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\widehat{se}(e_0)} \sim t_{n-2}$$

όπου $\widehat{se}(e_0) = \sqrt{\widehat{Var}(e_0)}$. Συνεπώς, το $(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης πρόβλεψης για την «πραγματική» τιμή Y_0 δίνεται από τον τύπο

$$\hat{Y}_0 \pm t_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{se}(e_0)$$

όπου $t_{n-2}^{\frac{\alpha}{2}}$ η κριτική τιμή της t-student κατανομής με $n-2$ βαθμούς ελευθερίας (κοντά στην τιμή 2 για $n \geq 30$ και $\alpha = 5\%$). Στην εμπειρική ανάλυση είναι σχεδόν βέβαιο ότι πρέπει να υιοθετούμε διαστήματα εμπιστοσύνης της πρόβλεψης ούτως ώστε να παρουσιάζουμε ένα εύρος πιθανών τιμών γύρω από την σημειακή πρόβλεψη.

3.2.1 Παράδειγμα

3.3 Ασκήσεις

3.3 Ασκήσεις: Άσκηση 1

3.3 Ασκήσεις: Άσκηση 2

Τέλος ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο **«Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών»** έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ιωάννης Βενέτης, Αναπλ. Καθηγητής. «Οικονομετρία. Τίτλος ενότητας». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

eclass.upatras.gr/courses/ECON1326

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- Ιωάννης Α. Βενέτης (2013). **Εισαγωγή στην Οικονομετρία**, GOTSIS Εκδόσεις, Πάτρα, ISBN 978-960-9427-25-8