

Άσκηση 1 (25%)

Έστω τα σύνολα

$$A_1 = \{x : x \in \{1\}\}$$

$$A_2 = \{x : x \in [1, 3]\}$$

$$A_3 = \{x : x \in \{3\}\}$$

$$B_1 = \{y : y \in [1, 2]\}$$

$$B_2 = \{y : y = 2.5 - 0.5x\}$$

$$B_3 = \{y : y \in [1, 3]\}$$

Υπολογίστε τα Καρτεσιανά γινόμενα $A_i \times B_i$, για $i = 1, 2, 3$ και σχεδιάστε τα γινόμενα **σε ένα** γράφημα στο \mathbb{R}^2 . Σημειώστε με σαφήνεια πάνω στο γράφημα τα επιμέρους καρτεσιανά γινόμενα που το απαρτίζουν.

Υπόδειξη:

(α) Η τελεία συμβολίζει δεκαδικό αριθμό

(β) $[\alpha, \beta]$: κλειστό διάστημα από α μέχρι β .

Απάντηση Άσκηση 1 (25%)

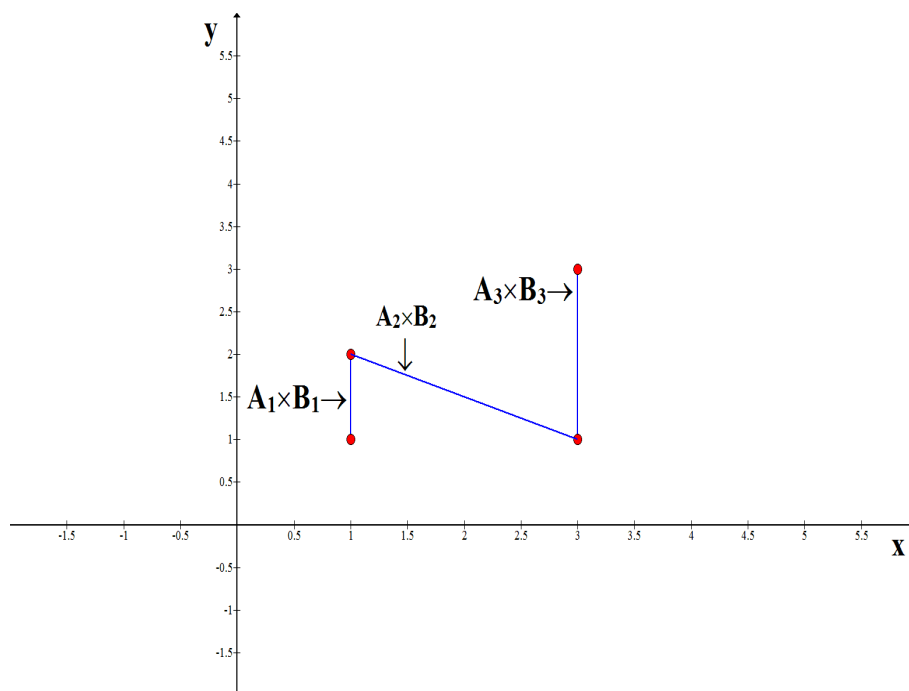
Έχουμε

$$A_1 \times B_1 = \{(x, y) : x \in \{1\} \wedge y \in [1, 2]\}$$

$$A_2 \times B_2 = \{(x, y) : x \in [1, 3] \wedge y = 2.5 - 0.5x\}$$

$$A_3 \times B_3 = \{(x, y) : x \in \{3\} \wedge y \in [1, 3]\}$$

Υπολογίστε τα Καρτεσιανά γινόμενα $A_i \times B_i$, για $i = 1, 2, 3$ και σχεδιάστε τα γινόμενα **σε ένα** γράφημα στο \mathbb{R}^2 . Σημειώστε με σαφήνεια πάνω στο γράφημα τα επιμέρους καρτεσιανά γινόμενα που το απαρτίζουν.



Σχήμα 1: Δημιουργήθηκε στο Graph 4.4.2. Δείτε <http://www.padowan.dk/>

Απάντηση Άσκηση 2 (25%)

Μία επιχείρηση αντιμετωπίζει λογαριθμική συνάρτηση ζήτησης

$$\ln(Q) = \alpha - \beta P, \quad \alpha, \beta > 0, \quad Q, P > 0$$

(2.1) Προβείτε σε (και βεβαιώστε την) βελτιστοποίηση της λογαριθμικής συνάρτησης εσόδων $\ln(TR)$ ως προς την τιμή.

(2.1) Απάντηση

$$TR = P \cdot Q \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \ln(TR) &= \ln(P) + \ln(Q) \\ &= \ln(P) + \alpha - \beta P \end{aligned}$$

Οπότε μεγιστοποιούμε την συνάρτηση

$$\max_P \ln(TR)$$

Σ.Π.Τ

$$\frac{d \ln(TR)}{dP} = 0 \Rightarrow \frac{1}{P} - \beta = 0 \Rightarrow P^* = \frac{1}{\beta} > 0$$

Σ.Δ.Τ

$$\left. \frac{d^2 \ln(TR)}{dP^2} \right|_{P=P^*} = -\frac{1}{P^{*2}} < 0 \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d^2 \ln(TR)}{dP^2} \right|_{P=P^*} = -\beta < 0$$

Επειδή η Σ.Δ.Τ είναι αρνητική στο βέλτιστο έχουμε τοπικό ελάχιστο. Επειδή είναι αρνητική για κάθε τιμή $P > 0$ έχουμε και ολικό μέγιστο.

(2.2) Ποιά είναι η ελαστικότητα ζήτησης στο βέλτιστο; **Σχολιάστε.**

(2.2) **Απάντηση**

$$e_D = \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q} = \frac{d \ln(Q)}{dP} \cdot P = -\beta \cdot P$$

Η ελαστικότητα ζήτησης για τη συγκεκριμένη συνάρτηση ζήτησης είναι γραμμική συνάρτηση της τιμής P

και

$$e_D^* = -\beta \cdot P^* = -1$$

δηλαδή έχουμε **μοναδιαία** ελαστικότητα στο βέλτιστο. Μία αύξηση της τιμής κατά 1% μειώνει κατά 1% την ζήτηση.

Απάντηση Άσκηση 3 (25%)

Υπολογίστε την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης γύρω από το $x_0 = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \ln(1+x), \quad x > -1$$

Απάντηση Αφού $x_0 = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f(x_0) &= \ln(1+0) \\ &= \ln(1) & f'(x_0) &= \frac{1}{1+0} = 1 & f''(x_0) &= -\frac{1}{(1+0)^2} = -1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

και η δεύτερης τάξης προσέγγιση δίνεται από το πολυώνυμο δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\approx 0 + 1 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 \\ &\approx x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4 (25%)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(5.1)

$$\int x^2 e^x dx$$

(5.2) και

$$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx$$

(5.1) **Απάντηση** Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\ &= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + c \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x + c \end{aligned}$$

(5.2) **Απάντηση**

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 2 \left((\ln x)^2 - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \right) \Rightarrow$$
$$I = 2 (\ln x)^2 - I \Rightarrow$$
$$I = (\ln x)^2$$

άρα

$$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \Big|_1^e = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 = 1$$

ή με αντικατάσταση

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$
$$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 2 \int_0^1 u du = u^2 \Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$