Διάλεξη 9 Σημειώσεις

Εφαρμογές ολοκληρωμάτων

1 Εμβαδόν

Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες

$$f(x) = 8 - x^2 \text{ και } g(x) = 6 - x$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα

Έχουμε ότι οι δύο καμπύλες $f(x)$ και $g(x)$ είναι ίσες (τέμνονται) στα σημεία

$$\begin{aligned} 8 - x^2 &= 6 - x \Rightarrow \\ x^2 - x - 2 &= 0 \Rightarrow \\ x^*_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2 \cdot 1} &= \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Άρα ολοκληρώνουμε

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{2} \left(8 - x^2\right) dx - \int_{-1}^{2} (6 - x)\, dx = \int_{-1}^{2} \left(8 - x^2 - 6 + x\right) dx \\ &= \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx = -\int_{-1}^{2} x^2 dx + \int_{-1}^{2} x dx + 2\int_{-1}^{2} dx \\ &= -\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} + 2 \cdot \left. x\right|_{-1}^{2} \\ &= -\frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + 4 + 2 \\ &= 10.5 \end{aligned}$$

Οπότε το **εμβαδόν** της σκιασμένης περιοχής στο παραπάνω γράφημα είναι ίσο με 10.5.

2 Μήκος Τόξου

Το μήκος της καμπύλης που σχηματίζει η συνάρτηση $y = f(x)$ από το $x = a$ έως το $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_{a}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

ή

$$L = \int_{a}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

όταν οι $f(x)$ και $f'(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Όταν η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι σχετικά απλή (π.χ ένα χαμηλής τάξης πολυώνυμο), τότε η αναλυτική επίλυση του ολοκληρώματος L καθίσταται από δύσκολη έως και αδύνατη.

Συνήθως λοιπόν χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις του ορισμένου ολοκληρώματος L για τη μέτρηση του μήκους τόξου καμπύλης. Παρακάτω θα δούμε δύο απλά παραδείγματα εύρεσης του L.

- **Παράδειγμα.** Έστω η απλούστερη γραμμική συνάρτηση $y = x$ (η ευθεία των 45^o). Τότε το μήκος του τόξου από το 0 μέχρι το 1 είναι ίσο με

$$\begin{aligned} L &= \int_{0}^{1} \sqrt{1 + (1)^2} dx = \sqrt{2} \int_{0}^{1} dx \\ &= \sqrt{2}\, x|_0^1 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

  Θυμηθείτε από την γεωμετρία ότι το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές που έχουν μήκος a, β δίνεται από

$$\sqrt{a^2 + \beta^2}$$

  στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

- **Παράδειγμα.** Έστω $y = x^{3/2}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα.

Βρείτε το μήκος του τόξου από το 1 μέχρι το 2. Έχουμε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ άρα

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx}$$

Επειδή

$$\int (1 + ax)^{1/2} dx = \frac{2}{3a}(1 + ax)^{3/2} + c$$

έχουμε

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx} \\ &= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 9}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_1^2 \\ &= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{18}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{3/2} \\ &= 2.085 \end{aligned}$$

3 Πλεόνασμα καταναλωτή και πλεόνασμα παραγωγού

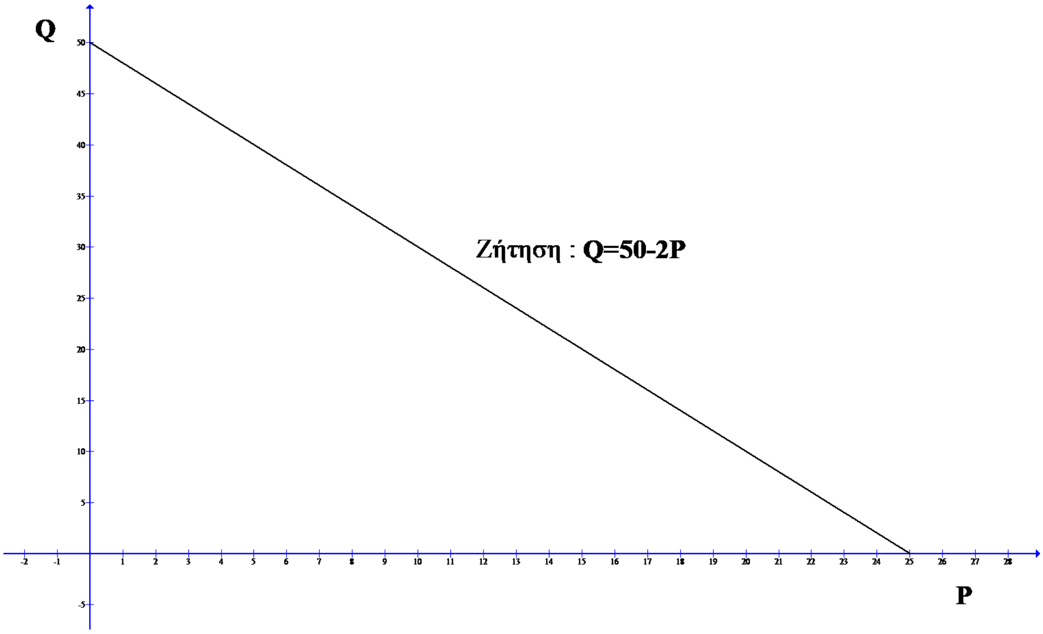
Έστω ότι $Q = D(P)$ η συνάρτηση ζήτησης και $Q = S(P)$ η συνάρτηση προσφοράς σε μία αγορά. Για παράδειγμα το παρακάτω γράφημα (γράφημα 1) δείχνει τη γραμμική συνάρτηση ζήτησης

$$Q = 50 - 2P$$

Έστω ότι $P = D^{-1}(Q)$ η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης και $P = S^{-1}(P)$ η αντίστροφη συνάρτηση προσφοράς. Το παρακάτω γράφημα δείχνει την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης για την προαναφερθείσα γραμμική συνάρτηση ζήτησης

$$P = 25 - 0.5Q$$

Η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης δείχνει τις ανώτερες τιμές που ο καταναλωτής είναι πρόθυμος να πληρώσει για διαφορετικές ποσότητες $Q_1, Q_2, \ldots$ ενός αγαθού



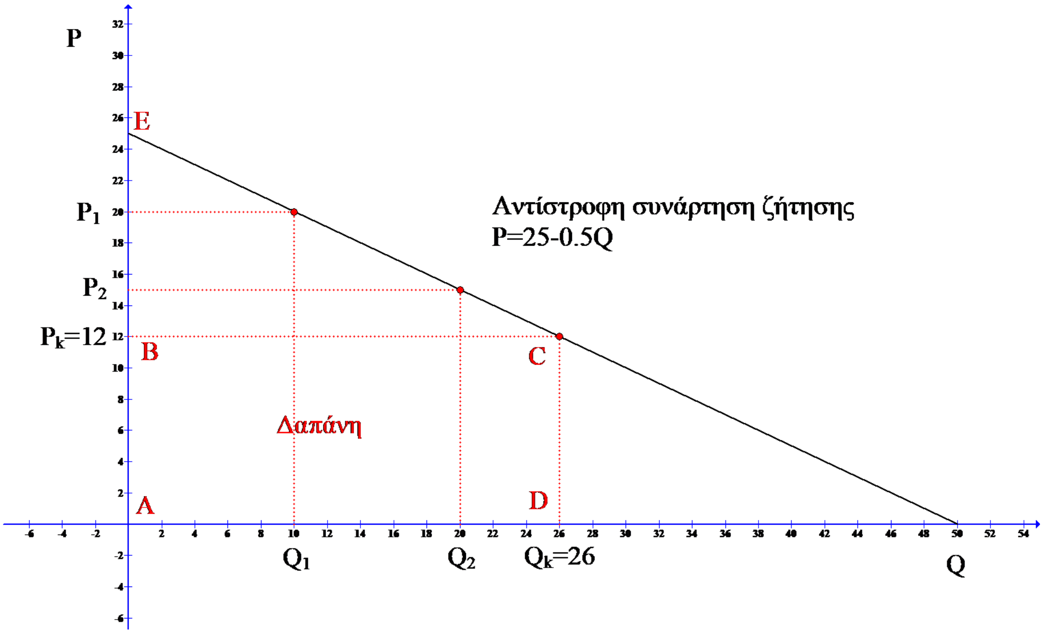
Γράφημα 1. Διαγραμματική απεικόνιση γραμμικής συνάρτησης ζήτησης $Q = 50 - 2P$

- **Το πλεόνασμα του καταναλωτή** Π.Κ ή CS (consumer surplus) είναι ένας δείκτης ευημερίας. Η διαφορά της μέγιστης τιμής που οι καταναλωτές θα ήταν διατεθειμένοι να πληρώσουν από αυτήν που διαμορφώνεται στην αγορά και τελικά πληρώνουν. Για παράδειγμα

$$\begin{array}{llll} \text{δαπάνη} & P_1Q_1 = 20 \cdot 10 = 200 & \text{όταν η τιμή } P_1 \text{ είναι} & = 20 \\ \text{δαπάνη} & P_2Q_2 = 15 \cdot 20 = 300 & \text{όταν η τιμή } P_2 \text{ είναι} & = 15 \\ & & & \vdots \\ \text{δαπάνη} & P_kQ_k = 12 \cdot 26 = 312 & \text{όταν η τιμή } P_k \text{ είναι} & = 12 \end{array}$$

  Αν η τιμή διαμορφωθεί στην $P_k = 12$ τότε η δαπάνη είναι ίση με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου **ABCD** δηλαδή ίση με 312. Όμως κάποιοι καταναλωτές ήταν διατεθειμένοι να πληρώσουν περισσότερο από $P_k = 12$ για το αγαθό. Το πλεόνασμα του καταναλωτή λοιπόν δίνεται από την συνολική δαπάνη που είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν οι αγοραστές σε κάθε επίπεδο τιμής μείον την τελική δαπάνη από τους αγοραστές που βασίζεται στην "τελική" τιμή P όπως αυτή διαμορφώνεται στην αγορά. Άρα το πλεόνασμα του καταναλωτή δίνεται από την περιοχή του τριγώνου **EBC**

- Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης, το πλεόνασμα του



Γράφημα 2. Διαγραμματική απεικόνιση του πλεονάσματος του καταναλωτή και της δαπάνης με βάση την **αντίστροφη** συνάρτηση ζήτησης

καταναλωτή υπολογίζεται από τη σχέση

$$CS = \int_0^{Q^*} D^{-1}(Q)dQ - P^*Q^*$$

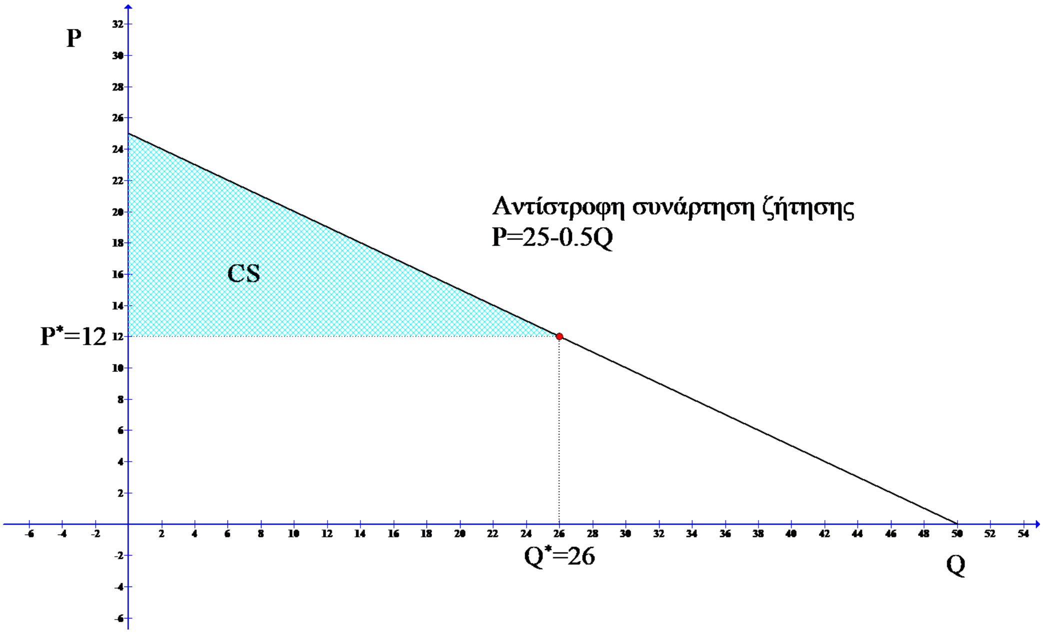
και γραφικά δίνεται από το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής όπως φαίνεται παρακάτω όταν υποθέσουμε ότι η τιμή ισορροπίας είναι $P^* = 12$ άρα και η ποσότητα ισορροπίας είναι ίση με $Q^* = 26$ (στο επίπεδο κάθετος άξονας P και οριζόντιος άξονας Q) δηλαδή

$$CS = \int_0^{26} (25 - 0.5Q)\, dQ - 12 \times 26$$

- Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ζήτησης μπορούμε να υπολογίσουμε το πλεόνασμα του καταναλωτή από το ολοκλήρωμα

$$CS = \int_{P^*}^{P_U} D(P)dP$$

όπου P_U η τιμή που προκύπτει λύνοντας την εξίσωση $0 = D(P)$. Αν η καμπύλη ζήτησης δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή δεν υπάρχει λύση



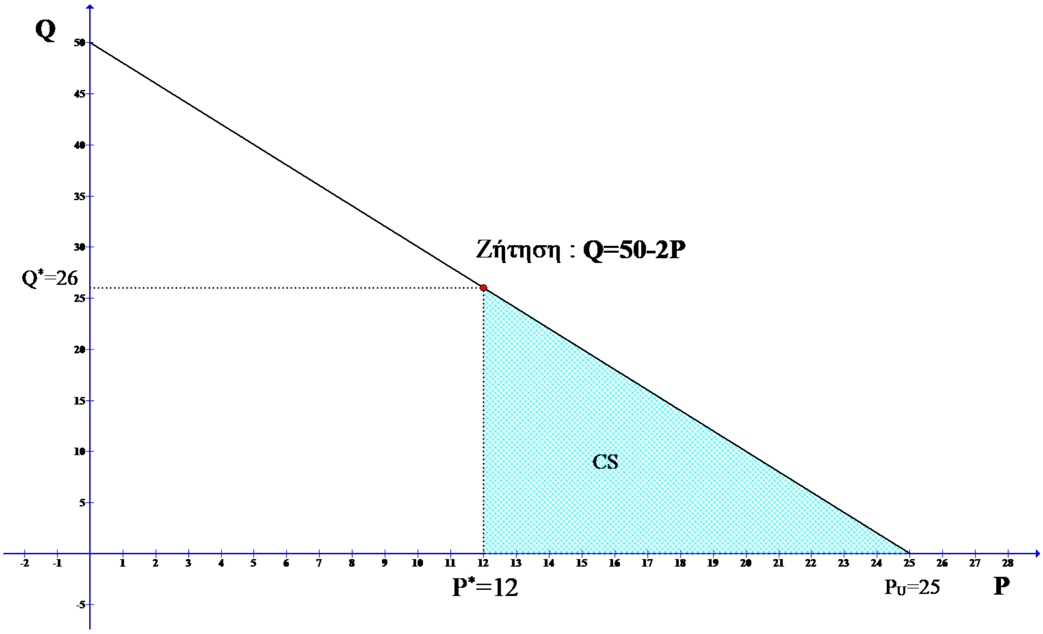
Γράφημα 3. Πλεόνασμα καταναλωτή με βάση την **αντίστροφη** συνάρτηση ζήτησης

στην εξίσωση $0 = D(P)$ τότε θέτουμε $P_U = +\infty$. Το παρακάτω γράφημα δείχνει την περιοχή που αντιστοιχεί στο πλεόνασμα του καταναλωτή όταν η τιμή είναι $P^* = 12$ δηλαδή[1]

$$CS = \int_{12}^{25} (50 - 2P)\, dP = ... = 169$$

- Αντίστοιχα, η αγοραία καμπύλη προσφοράς δείχνει τη συνολική προσφερόμενη ποσότητα για κάθε επίπεδο τιμής του αγαθού και ισοδύναμα η αντίστροφη καμπύλη προσφοράς δείχνει την ελάχιστη τιμή που απαιτεί να εισπράξει ο παραγωγός (επιχείρηση) για να παράγει και να προσφέρει μια δεδομένη ποσότητα του αγαθού. Το **πλεόνασμα του παραγωγού** Π.Π ή PS (producer surplus) δίνεται από τα έσοδα μείον το μεταβλητό κόστος του παραγωγού (το σταθερό κόστος δεν επηρεάζει το πλεόνασμα αφού δεν εξαρτάται από το ύψος της προσφερόμενης ποσότητας) και το

[1] Εντάξει, στην περίπτωση γραμμικών συναρτήσεων ζήτησης ή προσφοράς, τα πλεονάσματα αντιστοιχούν σε εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου που δίνεται από το μισό του γινομένου της βάσης επί το ύψος του τριγώνου (0.5 επί το γινόμενο των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου). Άρα στην συγκεκριμένη άσκηση $CS = \frac{1}{2}(13 \cdot 26) = 169$



Γράφημα 4. Πλεόνασμα καταναλωτή $CS = 169$ κάτω από την συνάρτηση ζήτησης $Q = 50 - 2P$ με τιμή ισορροπίας ή στην τιμή $P^* = 12$

υπολογίζουμε μέσω της

$$PS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} S^{-1}(Q)dQ$$

ή

$$\begin{aligned} PS &= P^*Q^* - \int_0^{Q^*} S^{-1}(Q)dQ \\ &= P^*Q^* - \int_0^{Q^*} MC(Q)dQ \\ &= P^*Q^* - [TC(Q^*) - TC(0)] \\ &= P^*Q^* - TVC(Q^*) \end{aligned}$$

Δηλαδή το πλεόνασμα του παραγωγού είναι η διαφορά της τελικής δαπάνης για το προϊόν από την ελάχιστη δαπάνη που ζητείται από τον παραγωγό ώστε να προσφέρει το προϊόν ή η διαφορά της τελικής τιμής από την ελάχιστη αποδεκτή τιμή από τον παραγωγό. Τα έσοδα P^*Q^* πρέπει να καλύπτουν το συνολικό μεταβλητό κόστος $TVC(Q^*)$ στο επίπεδο παραγωγής Q^*.

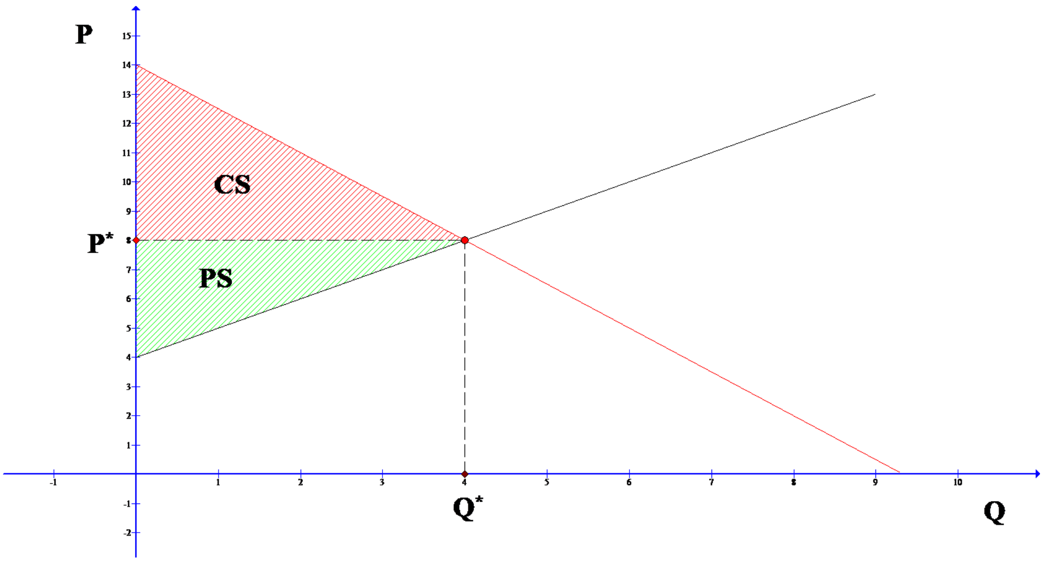
- Εναλλακτικά, το πλεόνασμα του παραγωγού βρίσκεται από την καμπύλη προσφοράς μέσω του ολοκληρώματος

$$PS = \int_{P_L}^{P^*} S(P)dP$$

όπου $P_L = \max\{0, P_L\}$ και P_L η τιμή που προκύπτει λύνοντας την εξίσωση $0 = S(P)$

Το παρακάτω γράφημα δείχνει μαζί το πλεόνασμα του καταναλωτή και το πλεόνασμα του παραγωγού χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς όταν

$$\begin{aligned} Q_D &= \frac{28}{3} - \frac{2}{3}P \\ Q_S &= -4 + P \end{aligned}$$



Γράφημα 5. Πλεόνασμα καταναλωτή και παραγωγού με βάση τις αντίστροφες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς

Το άθροισμα των δύο πλεονασμάτων καλείται **κοινωνικό πλεόνασμα**, $K\Pi$ ή στην Αγγλική: **social surplus** (SS),

$$K\Pi = \Pi K + \Pi\Pi$$

$$SS = CS + PS$$

3.1 Παράδειγμα (S.O.S)

1. Έστω η συνάρτηση ζήτησης

$$Q = aP^{-\beta}$$

με $a > 0, \beta > 1$. Βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή ως συνάρτηση κάποιας τιμής P_0, δηλαδή υπολογίστε το $CS(P_0)$.

2. Έστω τώρα η συνάρτηση προσφοράς στην ίδια αγορά

$$Q = \gamma \ln(1 + P)$$

με $\gamma > 0$. Βρείτε το πλεόνασμα του παραγωγού ως συνάρτηση κάποιας τιμής P_0, δηλαδή υπολογίστε το $PS(P_0)$.

Απάντηση

1. Είναι εμφανές ότι για P_0 η ποσότητα που ζητείται είναι $Q_0 = aP_0^{-\beta}$. Επειδή η άσκηση ζητά να βρούμε το πλεόνασμα του καταναλωτή ως συνάρτηση της τιμής P_0 ενδείκνυται να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$CS = \int_{P_0}^{P_U} D(P)dP$$

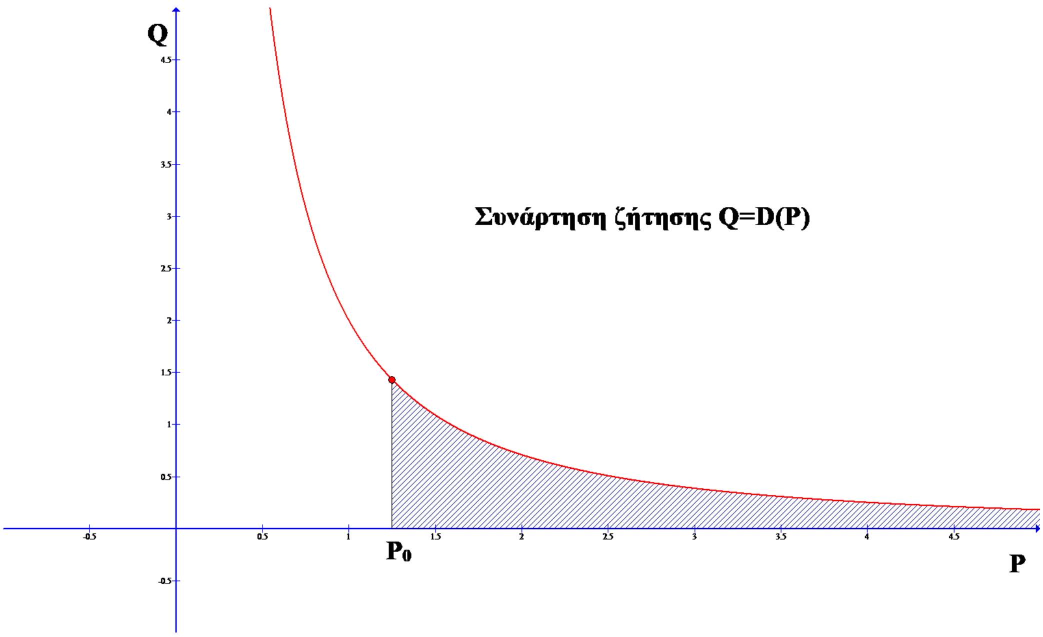
άρα να βρούμε την περιοχή που φαίνεται σε σκίαση στο παρακάτω γράφημα.

Θα είναι δυσκολότερο να υπολογίσουμε το πλεόνασμα μέσω του τύπου

$$CS = \int_{0}^{Q_0} D^{-1}(Q)dQ - P_0Q_0$$

και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε όπου Q_0 την τιμή $aP_0^{-\beta}$. Επειδή καθώς $Q \to 0$ η τιμή δεν ορίζεται (τείνει στο άπειρο) θέτουμε $P_U = +\infty$ και

$$\begin{aligned}
CS &= \int_{P_0}^{P_U} D(P)dP \\
&= \int_{P_0}^{+\infty} aP^{-\beta}dP = \lim_{\varepsilon\to+\infty}\int_{P_0}^{\varepsilon} aP^{-\beta}dP \\
&= \lim_{\varepsilon\to+\infty}\left[\left.\frac{aP^{1-\beta}}{1-\beta}\right|_{P_0}^{\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon\to+\infty}\left[\frac{a\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{aP_0^{1-\beta}}{1-\beta}\right] \\
&= \frac{aP_0^{1-\beta}}{\beta-1} > 0
\end{aligned}$$



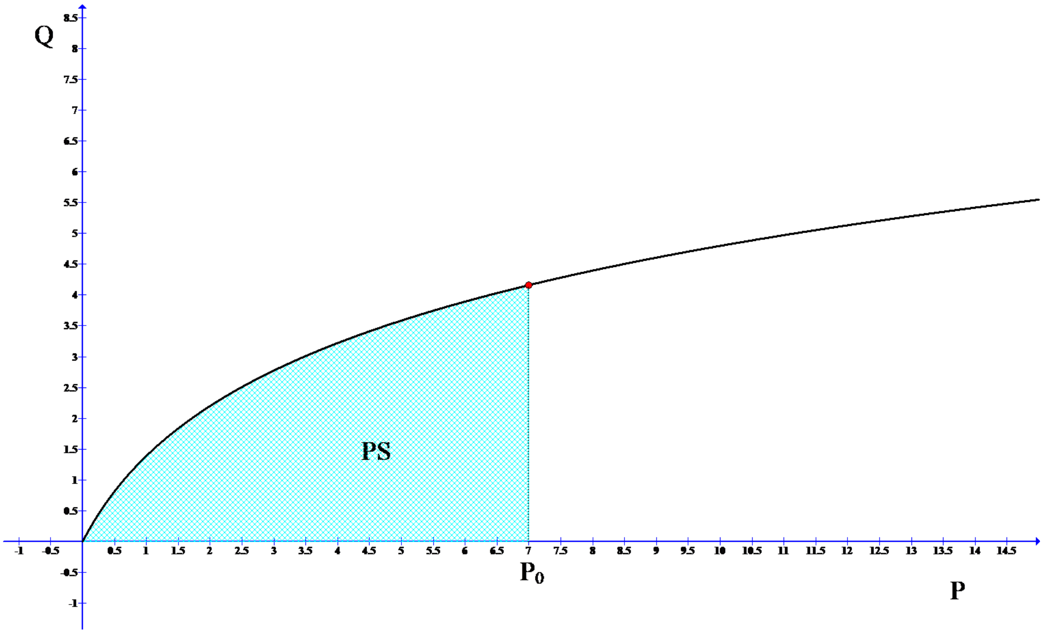
Γράφημα 6. Πλεόνασμα καταναλωτή κάτω από την καμπύλη ζήτησης

2. Το πλεόνασμα του παραγωγού για κάποια τιμή P_0 δίνεται από
$$PS = \gamma \int_0^{P_0} \ln(1+P)\, dP$$
όπως φαίνεται από την σκιασμένη περιοχή στο παρακάτω γράφημα
Θέτουμε $u = 1 + P$ και $du = dP$ με όρια ολοκλήρωσης $[1, 1+P_0]$
$$\begin{aligned} PS &= \gamma \int_0^{P_0} \ln(1+P)\, dP \\ &= \gamma \int_1^{1+P_0} \ln u du \\ &= \gamma u (\ln u - 1)|_1^{1+P_0} \\ &= \gamma (1+P_0)(\ln(1+P_0) - 1) - \gamma (\ln 1 - 1) \\ &= \gamma (1+P_0) \ln(1+P_0) - \gamma (1+P_0) + \gamma \\ &= \gamma \ln(1+P_0) + \gamma P_0 \ln(1+P_0) - \gamma P_0 \end{aligned}$$

4 Δείκτης Gini και καμπύλη Lorenz

Παρουσίαση δείκτη Gini και καμπύλης Lorenz

Στο παραπάνω γράφημα (γράφημα 8):



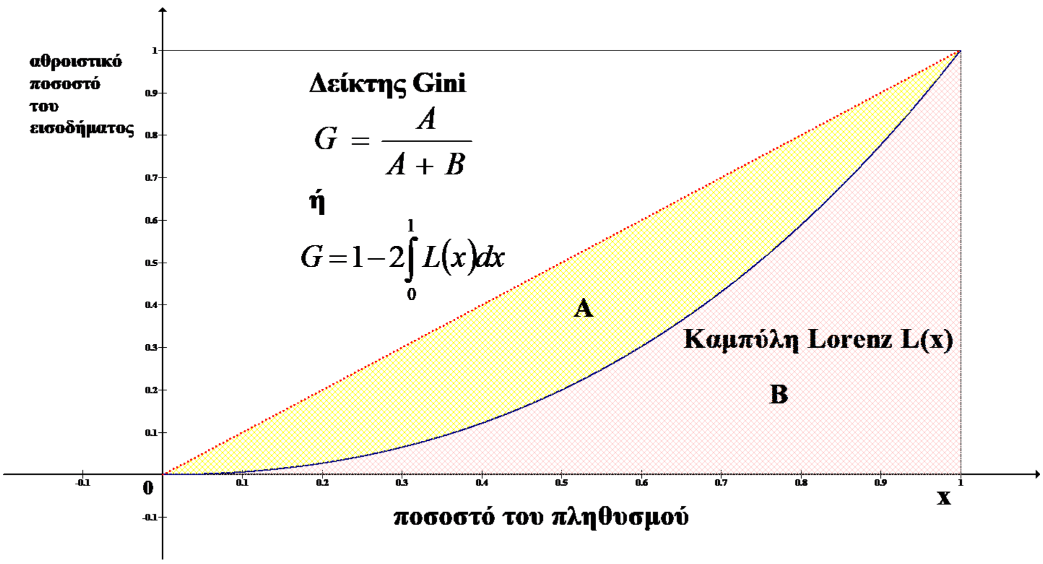
Γράφημα 7. Πλεόνασμα παραγωγού κάτω από την καμπύλη προσφοράς

- ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το ποσοστό του πληθυσμού έστω x με $0 \leq x \leq 1$
- ενώ ο κατακόρυφος άξονας παριστάνει το αθροιστικό ποσοστό του εισοδήματος που κατέχει το αντίστοιχο ποσοστό του πληθυσμού. Το ποσοστό του εισοδήματος προκύπτει μετά από ταξινόμηση των τιμών του εισοδήματος κατά αύξουσα τάξη

Για παράδειγμα, αν ένα σημείο το σημείο της καμπύλης $L(x)$ έχει συντεταγμένες $(x, y) = (0.35, 0.20)$, τότε δείχνει ότι το 35% του πληθυσμού (στο δείγμα) κατέχει το 20% του συνολικού εισοδήματος (του εισοδήματος που προκύπτει από το άθροισμα των δηλωθέντων εισοδημάτων των ατόμων του δείγματος).

Ο δείκτης ανισοκαταναμής Gini αποτελεί ένα μέτρο της ανισοκατανομής (ανομοιότητας) ενός συνόλου δεδομένων που συνήθως αναφέρονται στο εισόδημα ή τον πλούτο χωρίς όμως να αποκλείεται και η επέκταση της χρήσης του μέτρου σε άλλα δεδομένα. Ο δείκτης Gini G δίνεται από το κλάσμα

$$G = \frac{A}{A + B}$$



Γράφημα 8. Δείκτης Gini και καμπύλη Lorenz

όπου A και B είναι το εμβαδόν των περιοχών όπως φαίνονται παραπάνω και βασίζεται στην καμπύλη Lorenz $L(x)$

$$G = \frac{A}{A+B} = \frac{\frac{1}{2} - B}{\frac{1}{2}} = 1 - 2B = 1 - 2\int_0^1 L(x)\,dx$$

αφού είναι εμφανές ότι $A + B = \frac{1}{2}$.

- Όταν ο δείκτης Gini είναι ίσος με το μηδέν, $G = 0$, τότε η καμπύλη Lorenz συμπίπτει με την ευθεία των 45^o και έχουμε **τέλεια ισοκατανομή**, π.χ. για κάθε άτομο $i = 1, .., n$ σε ένα δείγμα n ατόμων, αντιστοιχεί εισόδημα ίσο με $M_i = M$.

- Όταν ο δείκτης Gini είναι ίσος με τη μονάδα, $G = 1$, τότε έχουμε τέλεια ανισοκατανομή όπου ένα άτομο στον πληθυσμό κατέχει όλο το εισόδημα ενώ τα υπόλοιπα $n - 1$ άτομα έχουν μηδενικό εισόδημα.

- Η καμπύλη Lorenz παίρνει τιμές ανάμεσα στο 0 και στο 1 με $L(0) = 0$ και $L(1) = 1$ ενώ είναι **αύξουσα και κυρτή**.

- Κάποιες γενικές συναρτησιακές μορφές για τις καμπύλες Lorenz εισοδήματος

  ▶ $$L(x) = \frac{e^{kx} - 1}{e^k - 1}\ ,\ k > 0$$

- $$L(x) = x\alpha^{x-1} \ , \ \alpha > 0$$

- $$L(x) = xe^{-\beta(1-x)} \ , \ \beta > 0$$

4.1 Παράδειγμα

Ερ. Για τις παρακάτω καμπύλες Lorenz[2]

$$\begin{aligned} L_A(x) &= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ L_B(x) &= \frac{e^{2x}-1}{e^2-1} \end{aligned}$$

του πραγματικού ετήσιου κατά κεφαλήν εισοδήματος σε δύο χώρες, έστω A και B, υπολογίστε τον δείκτη Gini και αποφανθείτε σχετικά με την εισοδηματική ανισότητα (στις δύο χώρες).

Απ. Έχουμε ότι ο δείκτης Gini για την χώρα A είναι ίσος με

$$\begin{aligned} G_A &= 1 - 2\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \ldots \\ &= \frac{1}{6} \approx 0.166 \end{aligned}$$

ενώ για την χώρα B είναι ίσος με

$$\begin{aligned} G_B &= 1 - 2\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^2-1} dx \\ &= \ldots \\ &\approx 0.313 \end{aligned}$$

Άρα στη χώρα A υπάρχει **μικρότερη ανισοκατανομή** του εισοδήματος απ΄ότι στη χώρα B αφού

$$G_A < G_B$$

[2] Πρέπει να είναι κυρτές συναρτήσεις στο $x \in (0,1)$

5 Καμπύλη Lorenz με διακριτά δεδομένα

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα δείγμα n ατόμων και κάθε άτομο δήλωσε στοιχεία σχετικά με το πραγματικό του εισόδημα M_i.

- Ταξινομούμε το εισόδημα M_i, $i = 1, ..., n$ των n ατόμων σε αύξουσα τάξη δηλαδή M_i όπου $M_1 \leq M_2 \leq ... \leq M_n$ άρα M_1 δηλώνει το μικρότερο εισόδημα στο δείγμα και M_n το μεγαλύτερο.

- Υπολογίζουμε μία στήλη με το αθροιστικό ποσοστό εισοδήματος

$$L(x_i) = \frac{S_i}{S_n}$$

  όπου $S_i = M_1 + ... + M_i$ ή $S_i = \sum_{j=1}^{i} M_j$ (άρα και $S_n = \sum_{j=1}^{n} M_j$).

- Υπολογίζουμε το αθροιστικό ποσοστό του πληθυσμού $x_i = i/n$ για $i = 1, ..., n$

- Σχεδιάζουμε στον οριζόντιο άξονα την x_i (το αθροιστικό ποσοστό του πληθυσμού) και στον κάθετο την $L(x_i)$ (το αθροιστικό ποσοστό εισοδήματος)

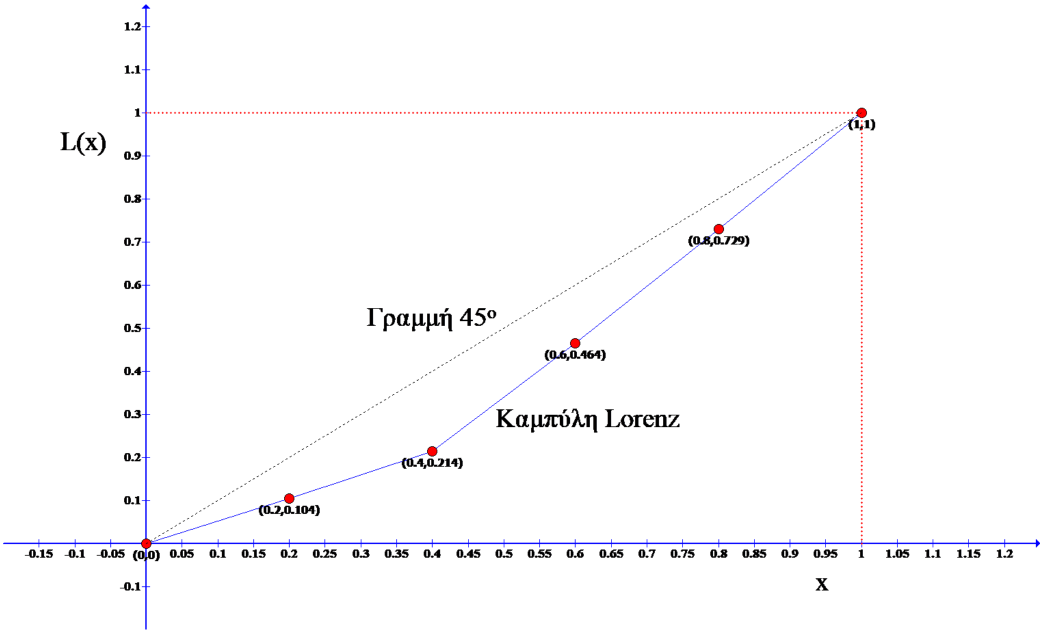
5.1 Παράδειγμα με $n = 5$

Έστω ότι $n = 5$ άτομα μας διέθεσαν το εισόδημά τους

Εισόδημα
18003
43587
44304
17164
40946

Ακολουθώντας την προαναφερθείσα μεθοδολογία

M_i	S_i	S_i/S_n	i/n
17164	17164	0.104	0.2
18003	35167	0.214	0.4
40946	76113	0.464	0.6
43587	119700	0.729	0.8
44304	164004	1	1



Γράφημα 9. μπλα

και οι δύο τελευταίες στήλες του πίνακα απεικονίζονται στο γράφημα (9) ως σημεία.

Ο δείκτης Gini για διακριτά δεδομένα προσεγγίζεται από άθροισμα (στην ουσία το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται αριθμητικά από ένα άθροισμα)

$$G = 1 - \frac{2}{n-1}\left(n - \frac{\sum_{i=1}^{n} iM_i}{S_n}\right)$$

Άρα για το παράδειγμά μας με $n = 5$ έχουμε

$$S_n = 164004$$

και

M_i	iM_i
17164	17164
18003	36006
40946	122838
43587	174348
44304	221520

$$\sum_{i=1}^{n} iM_i = 571876$$

οπότε

$$\begin{aligned} G &= 1 - \frac{2}{4}\left(5 - \frac{571876}{164004}\right) \\ &= 0.243481866 \end{aligned}$$