

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

9ο Σύνολο Ασκήσεων

Οικονομικές Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

Διδάσκων Εργαστηρίου-Επιμέλεια Ασκήσεων:

Παρασκευή (Εύη) Σαλαμαλίκη-Υποψήφια Διδάκτωρ, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Επιβλέποντες-Υπεύθυνοι Εργαστηρίου:

Ιωάννης Α. Βενέτης, Επίκουρος Καθηγητής, Κωνσταντίνος Κουνετάς, Λέκτορας (υπό
διορισμό)

Άσκηση 1.

Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν Α. Η συνάρτηση οριακού εσόδου είναι $MR = 20 - 4q$, όπου q η ποσότητα παραγωγής.

(α) Βρείτε τα συνολικά έσοδα παραγωγής της επιχείρησης όταν παράγει $q = 8$ μονάδες προϊόντος.

(β) Βρείτε τη συνάρτηση ζήτησης και υπολογίστε την ελαστικότητά της για $q = 8$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad TR(q) &= \int MR(q) dq = \int (20 - 4q) dq = 20 \int dq - 4 \int q dq = \dots = \\ \dots &= 20q - 2q^2 + c \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $TR(q) = 0$, για $q = 0$

$$\text{Συνεπώς, από την } TR(0) = 20 \times 0 - 2 \times 0^2 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Άρα η συνάρτηση συνολικών εσόδων είναι η $TR(q) = 20q - 2q^2$, και για $q = 8$, $TR(8) = 32\chi\mu$

$$\text{(β)} \quad \text{Γνωρίζουμε ότι } TR(q) = P(q) * q \Rightarrow P(q) = \frac{TR(q)}{q} = \frac{20q - 2q^2}{q} = 20 - 2q \text{ (αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης)}$$

και

$$q = 10 - \frac{1}{2}P : \text{ συνάρτηση ζήτησης}$$

Επίσης, η ελαστικότητα ζήτησης για $(p, q) = (4, 8)$ είναι ίση με:

$$\varepsilon_D = \frac{dq}{dp} \frac{p}{q} = -\frac{1}{2} \frac{4}{8} = -0.25$$

Άσκηση 2.

Η οριακή ροπή για αποταμίευση σε μια οικονομία είναι $MPS = 0.5 - 0.2Y^{-1/2}$, όπου Y το διαθέσιμο εισόδημα. Αν η αποταμίευση είναι μηδενική όταν το εισόδημα είναι $Y = 100\chi\mu.$, να βρείτε τη συνάρτηση αποταμίευσης.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση αποταμίευσης έχει τη μορφή $S = S(Y)$ (η αποταμίευση είναι συνάρτηση του διαθέσιμου εισοδήματος) (Επίσης, $C = C(Y)$, δηλαδή και η κατανάλωση είναι συνάρτηση του διαθέσιμου εισοδήματος)

$$\text{Μας δίνεται ότι } MPS = \frac{dS}{dY} = g(Y) = 0.5 - 0.2Y^{-1/2}.$$

Συνεπώς, για να βρούμε την συνάρτηση αποταμίευσης αρκεί να πάρουμε το

$$S = \int MPS(Y)dY = \int (0.5 - 0.2Y^{-1/2}) dY = 0.5 \int dY - 0.2 \int Y^{-1/2} dY = 0.5Y - 0.4Y^{1/2} + c = 0.5Y - 0.4\sqrt{Y} + c.$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $S(100) = 0$, συνεπώς βρίσκουμε το $c = -46$

Άσκηση 3.

Έστω η συνάρτηση ζήτησης κάποιου αγαθού είναι $Q = 8 - 2\sqrt{P}$.

(α) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί στην τιμή $P = 2$.

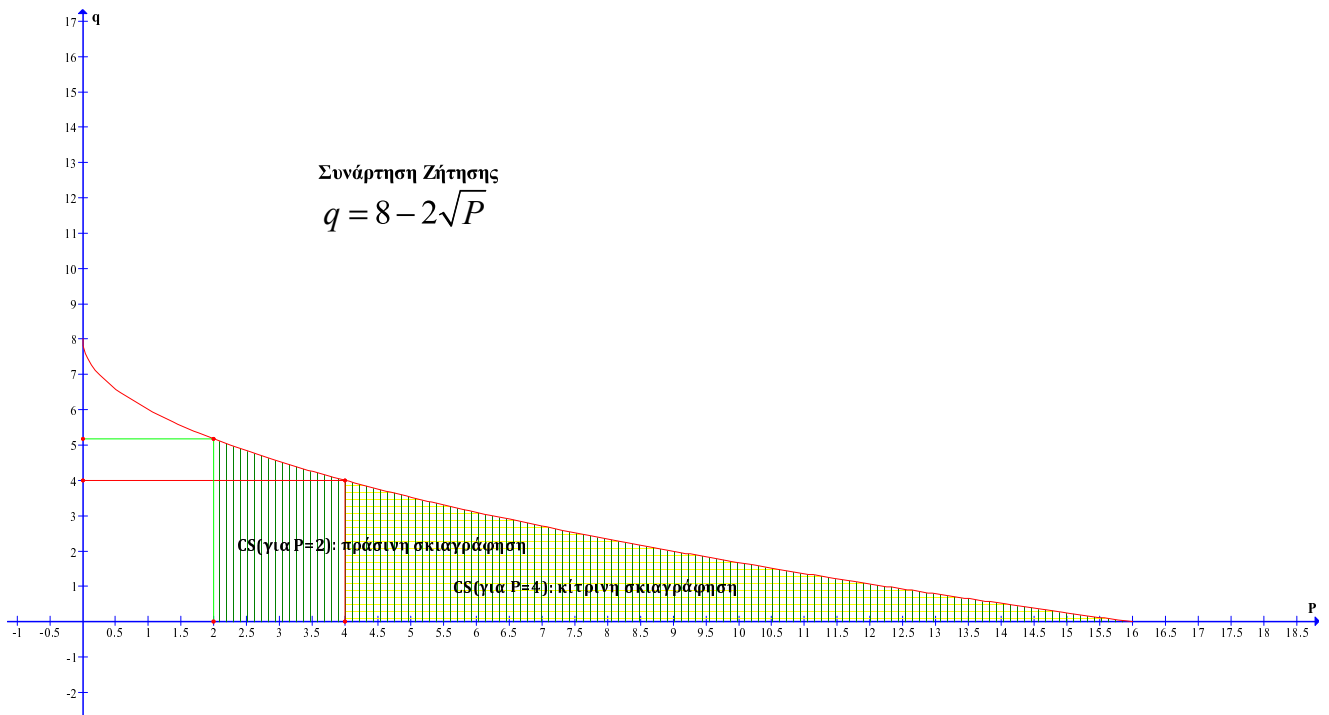
(β) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή που αντιστοιχεί στην τιμή $P = 4$

(γ) Να βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή καθώς η τιμή μειώνεται από $P = 4$ σε $P = 2$.

Λύση:

Α' Τρόπος

Κλασική Συνάρτηση Ζήτησης



Γράφημα 1

Υπολογισμός πλεονάσματος με βάση την κλασική συνάρτηση ζήτησης, $q = D(P)$

(α) Το πλεόνασμα του καταναλωτή για $P = 2$ δίνεται από τη σχέση: ($P = 16$ η $\max P$) (ολοκληρώνουμε ως προς την τιμή) (βλ. σκιαγραφημένο εμβαδόν γραφήματος 1)

$$CS(2) = \int_2^{16} D(P)dP = \int_2^{16} (8 - 2\sqrt{P}) dP = \dots = 8 P \Big|_2^{16} - \frac{4}{3} (\sqrt{P})^3 \Big|_2^{16} =$$

...

$$\simeq 30.4076$$

(β) Το πλεόνασμα του καταναλωτή για $P = 4$ δίνεται από τη σχέση:

$$CS(4) = \int_4^{16} D(P)dP = \int_4^{16} (8 - 2\sqrt{P}) dP = 8 P \Big|_4^{16} - \frac{4}{3} (\sqrt{P})^3 \Big|_4^{16} = \dots \simeq$$

21, 333

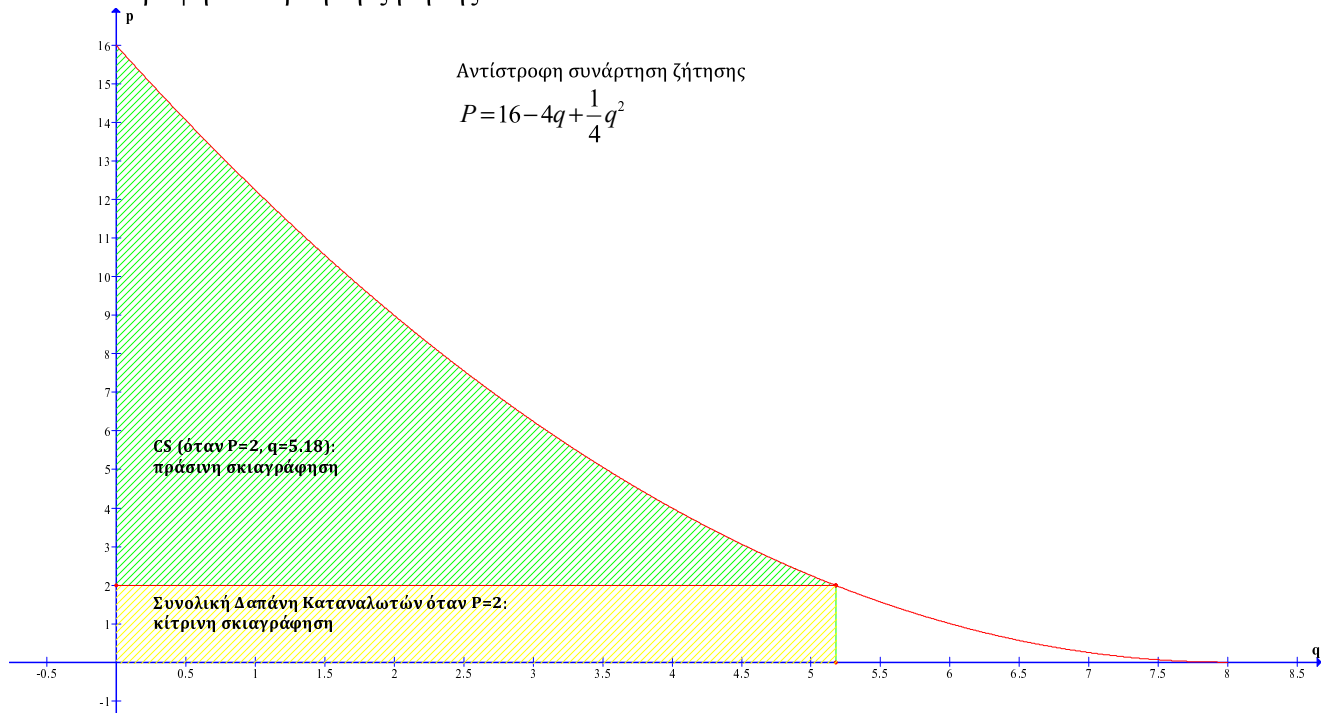
(γ) η διαφορά δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\Delta CS = - \int_4^2 (8 - 2\sqrt{P}) dP = \int_2^4 (8 - 2\sqrt{P}) dP = 8 P \Big|_2^4 - \frac{4}{3} (\sqrt{P})^3 \Big|_2^4 =$$

... $\simeq 9.07$

Β' Τρόπος

Αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης



Γράφημα 2

Υπολογισμός πλεονάσματος με βάση την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης,
 $P = D^{-1}(q)$

(α) Το πλεόνασμα του καταναλωτή για $P = 2$ δίνεται από τη σχέση: (ολοκληρώνουμε ως προς την ποσότητα) (βλ. σκιαγραφημένο εμβαδόν γραφήματος 2)

$CS(2) = \int_0^{q^*} D^{-1}(q) dq - (P^* \times q^*)$, όπου q^* η ποσότητα που αντιστοιχεί στην τιμή $P^* = 2$, (για $P^* = 2, q^* = 5.18$)

άρα,

$$CS(2) = \underbrace{\int_0^{5.18} (16 - 4q + \frac{1}{4}q^2) dq}_{40.798} - \underbrace{(2 \times 5.18)}_{10.36} \simeq 30.4076$$

Παρατηρείστε ότι $CS = \int_0^{q^*} D^{-1}(q) dq - (P^* \times q^*) = CS = \int_P^{P_{\max}} D(P) dP$

(β) Ανάλογη διαδικασία με το (α)