# Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι
# 7ο Σύνολο Ασκήσεων

Ανάπτυγμα ή Προσέγγιση Taylor-Maclaurin

Διδάσκων Εργαστηρίου-Επιμέλεια Ασκήσεων:

Παρασκευή (Εύη) Σαλαμαλίκη-Υποψήφια Διδάκτωρ, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

[redacted]

**Άσκηση 1.**

Προσεγγίστε το πολυώνυμο 3ης τάξης

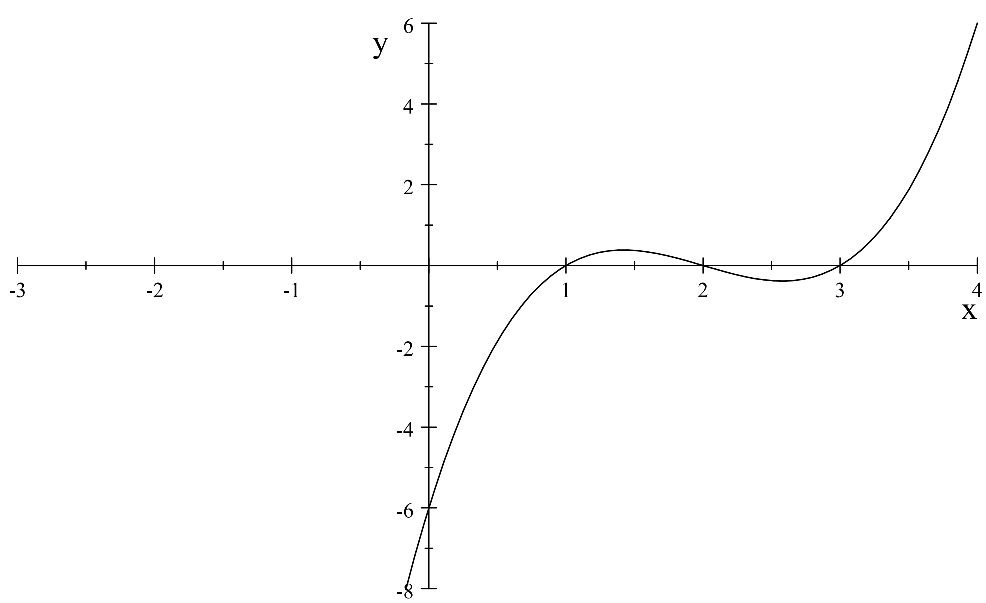
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

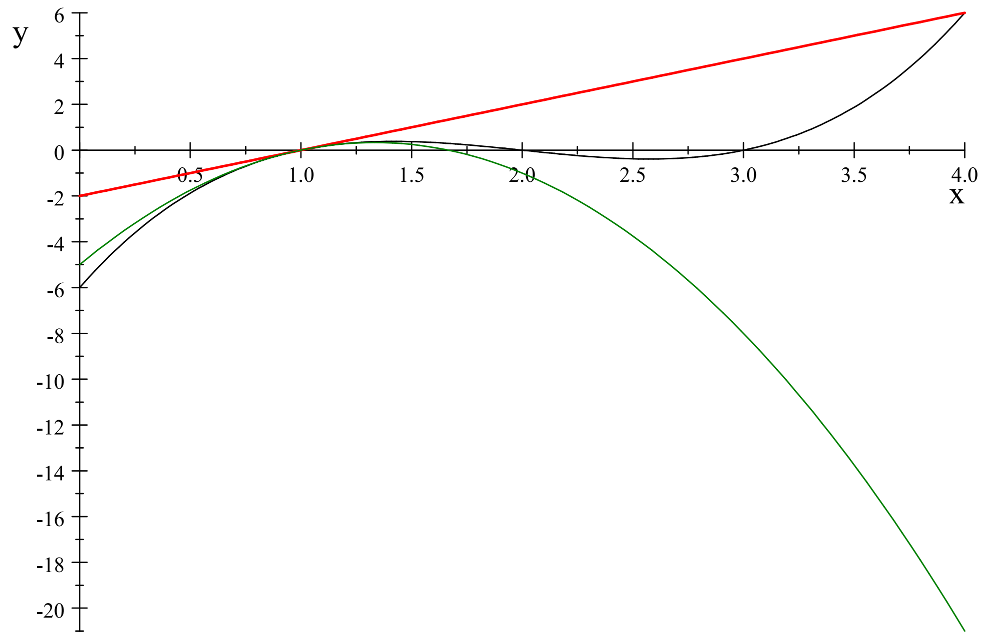
μέσω Taylor για $x_0 = 1$ χρησιμοποιώντας προσέγγιση: (a)μηδενικής (σταθερά μόνο) (b) πρώτης (γραμμικοποίηση) (c) δεύτερης και (d) τρίτης τάξεως. Τι παρατηρείτε? (προσεγγίστε και μέσω MacLaurin δηλαδή στο σημείο $x_0 = 0$ στο σπίτι). Για ποιές τιμές του $x$ είναι το σφάλμα προσέγγισης στην περίπτωση (c) μικρότερο από 0.10;

**Λύση:**

**Γράφημα (βοηθητικά,** οι ρίζες του πολυωνύμου είναι είναι 1,2,3 αφού

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$






Η προσέγγιση Taylor δίνεται γενικά από το άθροισμα ενός πολυωνύμου $n-$οστής τάξεως $P_n(x)$ και το υπόλοιπο Lagrange $R_n(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + R_n(x) \\
P_n(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\
&\quad + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\
&\quad + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Η προσέγγιση MacLaurin θέτει πάντα $x_0 = 0$ γι'αυτό δείχνουμε και το $f(0)$ πάντα στον παρακάτω πίνακα.

Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ έχουμε

$$\begin{aligned}
f\left(0\right) &= -6 \ \ , \ \ f(1) = 0 \\
f'\left(x\right) &= 3x^2 - 12x + 11 \ \ , \ \ f'(1) = 2 \\
f''\left(x\right) &= 6x - 12 \ \ , \ \ f''(1) = -6 \\
f'''\left(x\right) &= 6 \ \ , \ \ f'''(1) = 6 \\
f^{(4)}\left(x\right) &= 0, ...
\end{aligned}$$

Η προσέγγιση Taylor γύρω από το $x_0 = 1$ θα γραφόταν ως

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= P_0(x) + R_0(x) \\
f\left(x\right) &= P_1(x) + R_1(x) \\
f\left(x\right) &= P_2(x) + R_2(x) \\
f\left(x\right) &= P_3(x) + R_3(x)
\end{aligned}$$

με

$$P_0(x) = f\left(1\right) = 0$$

$$P_1(x) = f\left(1\right) + f'\left(1\right)\left(x-1\right) = 2(x-1) = -2 + 2x \text{ γραμμική}$$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f\left(1\right) + f'\left(1\right)\left(x-1\right) + \frac{f''\left(1\right)}{2}\left(x-1\right)^2 = 2(x-1) - \frac{6}{2}\left(x-1\right)^2 \\
&= -3x^2 + 8x - 5
\end{aligned}$$

[redacted]

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f\left(1\right) + f'\left(1\right)\left(x-1\right) + \frac{f''\left(1\right)}{2}\left(x-1\right)^2 + \frac{f'''\left(1\right)}{6}\left(x-1\right)^3 \\
&= 2(x-1) - \frac{6}{2}\left(x-1\right)^2 + \frac{6}{6}\left(x-1\right)^3 \\
&= 2(x-1) - 3\left(x-1\right)^2 + \left(x-1\right)^3 \\
&= x^3 - 6x^2 + 11x - 6
\end{aligned}$$

και για $p$ μεταξύ του $x$ και $x_0$

$$\begin{aligned}
R_0(x) &= \frac{f'(p)}{1!}(x-1)^1 = \left(3p^2 - 12p + 11\right)(x-1) \\
R_1(x) &= \frac{f''(p)}{2!}(x-1)^2 = \left(\frac{6p-12}{2}\right)(x-1)^2 \\
R_2(x) &= \frac{f'''(p)}{3!}(x-1)^3 = \left(\frac{6}{6}\right)(x-1)^3 = (x-1)^3 \\
R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(p)}{4!}(x-1)^4 = \frac{0}{4!}(x-1)^4 = 0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Δεύτερης τάξης

**Σφάλμα προσέγγισης.** Προσεγγίσαμε την $f(x)$ στο $x_0 = 1$. Η [redacted] προσέγγιση δίνει

$$f(x) = -3x^2 + 8x - 5 + R_2(x)$$

Για ποιές τιμές του $x$ είναι το σφάλμα προσέγγισης είναι μικρότερο από 0.10: Θα πρέπει $|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| < 0.1$.

Έχουμε ότι

$$\begin{gathered}
|R_2(x)| < 0.10 \Rightarrow \\
\left|(x-1)^3\right| < 0.10 \Rightarrow \\
|x-1| < 0.10^{1/3} \Rightarrow \\
|x-1| < 0.46416 \Rightarrow \\
x \in (+1 - 0.46416, 1 + 0.46416) \Rightarrow \\
x \in (0.53584, 1.46416)
\end{gathered}$$

**Άσκηση 2**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$ με $-1 < x \leq 1$.

Δείξτε ότι αν προσεγγίσουμε την $f(x) = \ln(1+x)$ στο $x_0 = 0$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την συνάρτηση ως το άπειρο άθροισμα

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Δηλαδή

$$f\left(x\right)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\cdots-\cdots$$

Δείξτε ότι για μικρές τιμές του $x$ στο διάστημα $(-1,1]$ η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$ δίνει σφάλμα μικρότερο από $\frac{x^2}{2}$.

**Απάντηση:**

$$\begin{gathered}
f'\left(x\right)=\frac{1}{1+x}=\left(1+x\right)^{-1}\\
f''\left(x\right)=(-1)\left(1+x\right)^{-2}=-\left(1+x\right)^{-2}\\
f'''\left(x\right)=(-2)(-1)\left(1+x\right)^{-3}=(2)(1)\left(1+x\right)^{-3}\\
f^{(4)}\left(x\right)=(-3)(-2)(-1)\left(1+x\right)^{-4}=-(3)(2)(1)\left(1+x\right)^{-4}\\
f^{(5)}\left(x\right)=(-4)(-3)(-2)(-1)\left(1+x\right)^{-5}=(4)(3)(2)(1)\left(1+x\right)^{-5}\\
\vdots
\end{gathered}$$

Άρα

$$f^{(n)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{n+1}\left(n-1\right)!\left(1+x\right)^{-n}\ \ ,\ n\geq 1$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^{n} &= \left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(n-1\right)!}{n!}\left(1+x_0\right)^{-n}\left(x-x_0\right)^{n}\\
&= \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\frac{\left(x-x_0\right)^{n}}{\left(1+x_0\right)^{n}}\\
&= \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}x^{n}\ \text{αν}\ x_0=0
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^{n}=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}x^{n}$$

Το υπόλοιπο δίνει

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad (\text{γενικά})$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+p)^n} \\
&= 0\times\frac{0}{\infty} \quad \left(\text{ή } 0\times\frac{1}{\infty},\ \text{όταν } x=1\right) \\
&= 0\times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Άρα Taylor προσέγγιση γύρω από το $x_0 = 0$ δίνει[1]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

αφού $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ και μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις παραγώγους καθώς $n \to \infty$.

Οπότε

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f(0)}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= \ln(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

**Προσέγγιση.** Για μικρές τιμές του $x$ και σίγουρα μέσα στο διάστημα $(-1, 1)$

[1] Η $f^{(0)}(x_0)$ είναι ταυτοτικά ίση με $f(x_0)$.

μπορούμε να προσεγγίσουμε

$$\ln(1+x) \approx P_1(x) = x$$

Το σφάλμα προσέγγισης είναι μικρότερο από

$$|R_1(x)| = \left| -\frac{x^2}{2(1+p)^2} \right| \leq \frac{x^2}{2(1+|p|)^2} < \frac{x^2}{2}$$

αφού $|p| > 0$, και άρα $(1+|p|) > 1$.

Άρα

$$\ln(1+x) = x + \text{σφάλμα}$$

όπου το σφάλμα είναι μικρότερο του $\frac{x^2}{2}$.

Παράδειγμα. Έστω για τιμές του $x = 0.1$ και $x = 0.5$

| $x$ | $\ln(1+x)$ | $\frac{x^2}{2}$ | $x - \ln(1+x)$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | $\ln(1+0.1)$ | $\frac{0.1^2}{2}$ | $0.1 - \ln(1+0.1)$ |
| 0.1 | 0.09531018 | 0.005 | 0.00469 |
| | | | |
| 0.5 | $\ln(1+0.5)$ | $\frac{0.5^2}{2}$ | $0.5 - \ln(1+0.5)$ |
| 0.5 | 0.40547 | 0.12500 | 0.09453 |