Φροντιστήριο 3

1 Άσκηση

Προσεγγίστε το πολυώνυμο 3ης τάξης

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

μέσω Taylor για $x_0 = 1$ χρησιμοποιώντας προσέγγιση: (a)μηδενικής (σταθερά μόνο) (b) πρώτης (γραμμικοποίηση) (c) δεύτερης και (d) τρίτης τάξεως. Τι παρατηρείτε? (προσεγγίστε και μέσω MacLaurin δηλαδή στο σημείο $x_0 = 0$ στο σπίτι). Για ποιές τιμές του x είναι το σφάλμα προσέγγισης στην περίπτωση (c) μικρότερο από 0.10;

Απάντηση

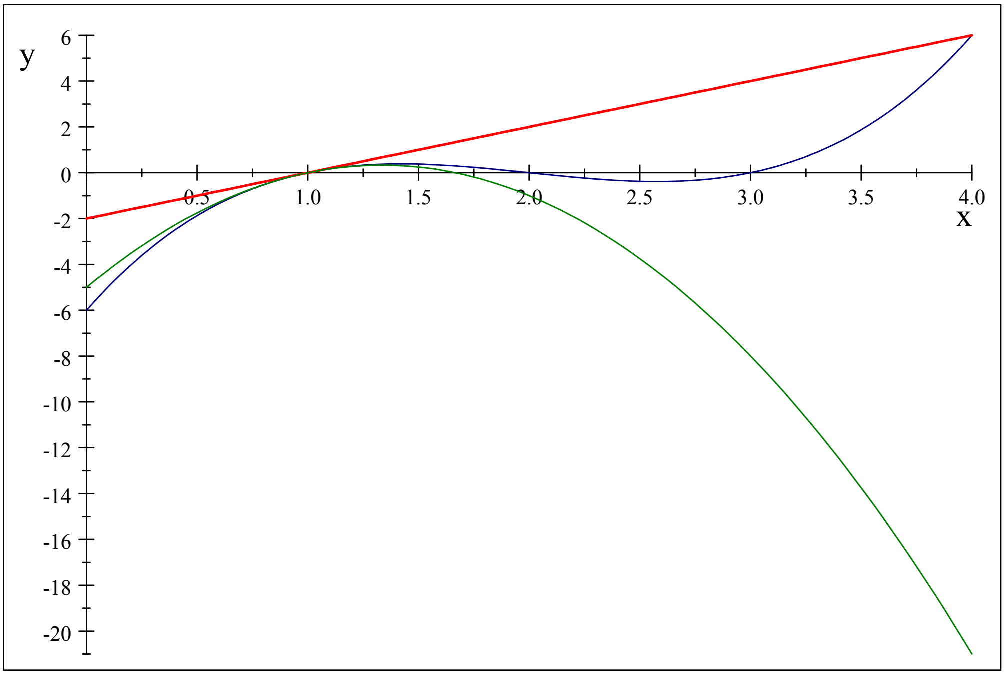
Βοηθητικό γράφημα δείχνει το πολυώνυμο (μαύρη γραμμή), και τις προσεγγίσεις πρώτης (κόκκινη γραμμή) και δεύτερης τάξης (πράσινη γραμμή)

Γράφημα (βοηθητικά, οι ρίζες του πολυωνύμου είναι είναι 1,2,3 αφού

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

άρα και $f(1) = 0$)

$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$



Η προσέγγιση Taylor δίνεται γενικά από το άθροισμα ενός πολυωνύμου $n-$οστής τάξεως $P_n(x)$ και το υπόλοιπο Lagrange $R_n\left(x\right)$

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) &= P_n(x) + R_n\left(x\right) \\
P_n(x) &= \frac{f\left(x_0\right)}{0!} + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2 \\
&\quad + \frac{f'''\left(x_0\right)}{3!}\left(x-x_0\right)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n \\
&= f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2}\left(x-x_0\right)^2 \\
&\quad + \frac{f'''\left(x_0\right)}{6}\left(x-x_0\right)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n \\
R_n\left(x\right) &= \frac{f^{(n+1)}\left(p\right)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Η προσέγγιση MacLaurin θέτει πάντα $x_0 = 0$ γιαυτό δείχνουμε και το $f\left(0\right)$ πάντα στον παρακάτω πίνακα.

Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(0) &= -6 \ , \ f(1) = 0 \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 11 \ , \ f'(1) = 2 \\ f''(x) &= 6x - 12 \ , \ f''(1) = -6 \\ f'''(x) &= 6 \ , \ f'''(1) = 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0, \ldots \end{aligned}$$

Η προσέγγιση Taylor γύρω από το $x_0 = 1$ θα γραφόταν ως

$$\begin{aligned} f(x) &= P_0(x) + R_0(x) \\ f(x) &= P_1(x) + R_1(x) \\ f(x) &= P_2(x) + R_2(x) \\ f(x) &= P_3(x) + R_3(x) \end{aligned}$$

με

$$P_0(x) = f(1) = 0$$

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2(x-1) = -2 + 2x \text{ γραμμική}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = 2(x-1) - \frac{6}{2}(x-1)^2 \\ &= -3x^2 + 8x - 5 \text{ δυωνυμική} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 \\ &= 2(x-1) - \frac{6}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{6}(x-1)^3 \\ &= 2(x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \end{aligned}$$

και για p στο διάστημα $p < |x - x_0|$ ήτοι $p \in (-(x - x_0), (x - x_0))$

$$\begin{aligned}
R_0(x) &= \frac{f'(p)}{1!}(x-1)^1 = \left(3p^2 - 12p + 11\right)(x-1) \\
R_1(x) &= \frac{f''(p)}{2!}(x-1)^2 = \left(\frac{6p-12}{2}\right)(x-1)^2 \\
R_2(x) &= \frac{f'''(p)}{3!}(x-1)^3 = \left(\frac{6}{6}\right)(x-1)^3 = (x-1)^3 \\
R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(p)}{4!}(x-1)^4 = \frac{0}{4!}(x-1)^4 = 0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Σφάλμα προσέγγισης. Προσεγγίσαμε την $f(x)$ στο $x_0 = 1$. Η δυωνυμική προσέγγιση δίνει

$$f(x) = -3x^2 + 8x - 5 + R_2(x)$$

Για ποιές τιμές του x είναι το σφάλμα προσέγγισης είναι μικρότερο από 0.10: Θα πρέπει $|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| < 0.1$.

Έχουμε ότι

$$\begin{gathered}
|R_2(x)| < 0.10 \Rightarrow \\
\left|(x-1)^3\right| < 0.10 \Rightarrow \\
|x-1| < 0.10^{1/3} \Rightarrow \\
|x-1| < 0.46416 \Rightarrow \\
x \in (1 - 0.46416, 1 + 0.46416) \Rightarrow \\
x \in (0.53584, 1.46416)
\end{gathered}$$

2 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$ με $-1 < x \leq 1$.

Δείξτε ότι αν προσεγγίσουμε την $f(x) = \ln(1+x)$ στο $x_0 = 0$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την συνάρτηση ως το άπειρο άθροισμα (θα μιλήσουμε για σειρές αργότερα στις διαλέξεις)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Δηλαδή

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \cdots$$

Δείξτε ότι για μικρές τιμές του x στο διάστημα $(-1, 1]$ η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = \ln(1+x)$ δίνει σφάλμα μικρότερο από $\frac{x^2}{2}$.

Απάντηση

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\
f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2} = -(1+x)^{-2} \\
f'''(x) &= (-2)(-1)(1+x)^{-3} = (2)(1)(1+x)^{-3} \\
f^{(4)}(x) &= (-3)(-2)(-1)(1+x)^{-4} = -(3)(2)(1)(1+x)^{-4} \\
f^{(5)}(x) &= (-4)(-3)(-2)(-1)(1+x)^{-5} = (4)(3)(2)(1)(1+x)^{-5} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Άρα

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n} \ \ , n \geq 1$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n &= (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}(1+x_0)^{-n}(x-x_0)^n \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{(x-x_0)^n}{(1+x_0)^n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \text{ αν } x_0 = 0
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

Το υπόλοιπο δίνει (αν θεωρήσουμε ότι το p είναι μεταξύ του 0 και του 1 για ευκολία)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+p)^n} \\ &= 0 \times \frac{0}{\infty} \\ &= 0 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Άρα Taylor προσέγγιση γύρω από το $x_0 = 0$ δίνει[1]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

αφού $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ και μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις παραγώγους καθώς $n \to \infty$.

Οπότε

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{f(0)}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \ln(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\end{aligned}$$

Προσέγγιση. Για μικρές τιμές του x και σίγουρα μέσα στο διάστημα $(-1, 1]$ μπορούμε να προσεγγίσουμε

$$\ln(1+x) \approx P_1(x) = x$$

[1] Η $f^{(0)}(x_0)$ είναι ταυτοτικά ίση με $f(x_0)$.

Το σφάλμα προσέγγισης είναι μικρότερο από

$$\left|R_1\left(x\right)\right| < \left|-\frac{x^2}{2\left(1+p\right)^2}\right| = \frac{x^2}{2\left(1+p\right)^2} < \frac{x^2}{2}$$

αφού $1+p>1$ αν θέσουμε το p να είναι μεταξύ του 0 και του 1 για ευκολία. Άρα $\ln\left(1+x\right) = x +$σφάλμα , όπου σφάλμα μικρότερο του $\frac{x^2}{2}$.

Παράδειγμα. Έστω για τιμές του $x = 0.1$ και $x = 0.5$

0.1	$\ln\left(1+0.1\right)$	$\frac{0.1^2}{2}$	$0.1 - \ln\left(1+0.1\right)$
0.1	0.09531018	0.005	0.00469
0.5	$\ln\left(1+0.5\right)$	$\frac{0.5^2}{2}$	$0.5 - \ln\left(1+0.5\right)$
0.5	0.40547	0.12500	0.09453

3 Άσκηση

Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα Maclaurin (άρα $x_0 = 0$) για να δείξετε ότι

Maclaurin ανάπτυγμα	$x \in$ στο διάστημα
$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$	$(-1, 1)$
$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$	$(-\infty, \infty)$
$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$	$(-\infty, \infty)$
$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$	$(-\infty, \infty)$

4 Άσκηση

- Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης για να προσεγγίσετε την τιμή $\left(4.2\right)^{3/2}$

- Υπολογίστε την τιμή της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$ στο σημείο $x = 1.1$ και συγκρίνετέ την με την τιμή που δίνει μία τρίτης τάξης Taylor προσέγγιση της $f(x)$ στο $x = 1$. Πόσο είναι το σφάλμα προσέγγισης;

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = xe^x$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$. (α) Γράψτε το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor στο $x_0 = 0$ (β) Δώστε μία έκφραση για το υπόλοιπο σε μία προσέγγιση $n-$οστής τάξης της $f(x)$ στο $x_0 = 0$

- Βρείτε την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης των παρακάτω $f(x)$ στο σημείο $x_0 = 1$. Επίσης δώστε μία έκφραση για το υπόλοιπο (α) $f(x) = xe^{x^2}$, (β) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$, (γ) $f(x) = x^2 - \ln(x)$, (δ) $f(x) = 1/x$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1/x$, στο διάστημα $(0, 2)$. (α) Βρείτε την προσέγγιση Taylor τρίτης τάξης στο $x_0 = 1$. (β) Υπολογίστε το υπόλοιπο $R_n(x)$ για την $n-$οστής τάξης προσέγγιση στο σημείο $x_0 = 1$ και υπολογίστε το άνω φράγμα της $|R_n(x)|$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x\ln(x)$. (α) Βρείτε την προσέγγιση Taylor τρίτης τάξης στο $x_0 = 1$. (β) Υπολογίστε το υπόλοιπο $R_n(x)$ για την $n-$οστής τάξης προσέγγιση στο σημείο $x_0 = 1$

- Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$, ποιά τιμή του n δίνει υπόλοιπο με τιμή $< |0.0001|$ στην $n-$οστή τάξης προσέγγιση Taylor όταν προσεγγίζουμε τις συναρτήσεις γύρω από το σημείο $x_0 = 0$ και $x \in (0, 1)$;
(α) $f(x) = e^{2x}$, (β) $f(x) = e^x$, (γ) $f(x) = x^2 - \ln(x + 1)$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + x^3$. Ποιά γραμμική εξίσωση $y = ax + b$ δίνει την εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $x_0 = 0$;

- Ποιά τιμή του n δίνει υπόλοιπο με τιμή $< \left|\frac{e}{24}\right|$ στην $n-$οστή τάξης προσέγγιση Taylor όταν προσεγγίζουμε την $f(x) = e^x$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$ και $x \in (-1, 1)$;