Διάλεξη 5 - Σημειώσεις

1 Κοίλες (concave) και κυρτές (convex) συναρτήσεις

Σημείωση: Μόνο για συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε ένα (κυρτό) διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμες τουλάχιστον δύο φορές στο εσωτερικό[1] του A που συμβολίζεται με A^0

1. Αν $f''(x) \leq 0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του A τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι **κοίλη (concave)**
2. Αν $f''(x) < 0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του A τότε η f είναι **γνησίως ή αυστηρώς κοίλη (strictly concave)**
3. Αν $f''(x) \geq 0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του A τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι **κυρτή (convex)**
4. Αν $f''(x) > 0$ $\forall x$ στο εσωτερικό του A τότε η f είναι **γνησίως κυρτή (strictly convex)**

Σημείωση 1: Η γραμμική συνάρτηση θεωρείται **και κοίλη και κυρτή**

Σημείωση 2: Αν f **κοίλη (κυρτή)** τότε $g = -f$ **κυρτή (κοίλη)**

Σημείωση 3: Οι κοίλες και κυρτές συναρτήσεις *σχηματίζουν καμπύλες*. Όταν ένα ευθύγραμμο τμήμα (χορδή) που σχηματίζεται από δύο σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται πάνω από το τόξο (καμπύλη) της συνάρτησης τότε αυτή είναι **κυρτή**. Όταν βρίσκεται κάτω από το τόξο της συνάρτησης τότε αυτή είναι **κοίλη**.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ είναι αυστηρώς κυρτή

$$f'(x) = 2x \ , \ f''(x) = 2 > 0 \ \forall x \text{ στο εσωτερικό του } \mathbb{R}$$

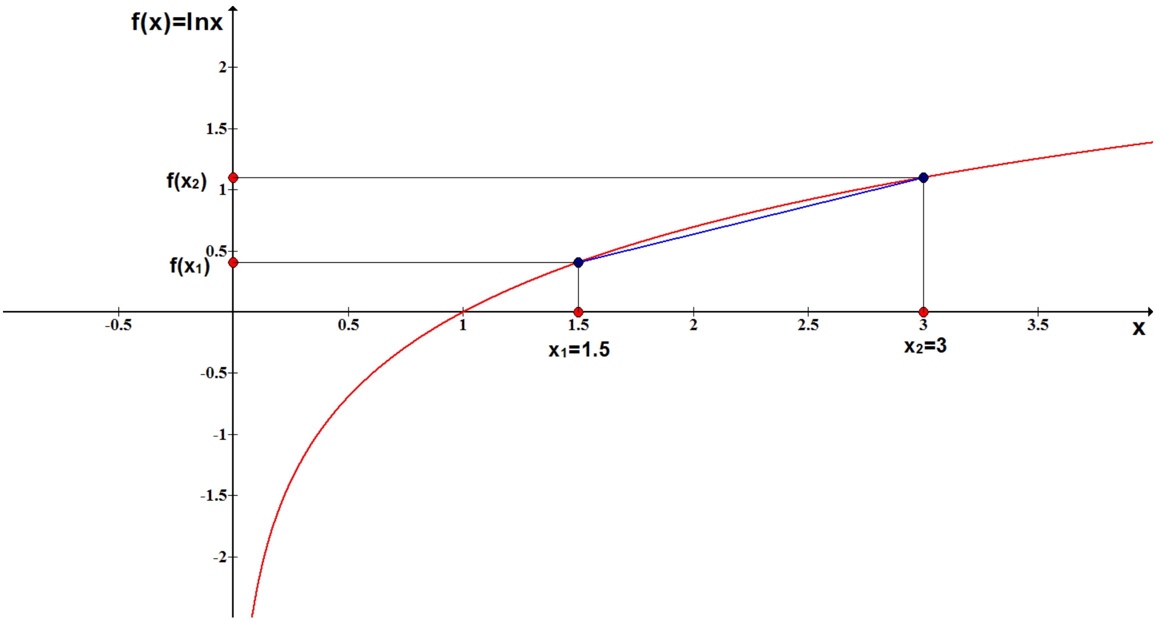
[1] Για παράδειγμα αν $A = [a, \beta]$ τότε το εσωτερικό του A είναι όλα τα $x \in (a, \beta)$. Επίσης θυμηθείτε ότι κυρτά είναι όλα τα συνεχόμενα διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x) = e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ είναι αυστηρώς κυρτή

$$f'(x) = e^x \ , \ f''(x) = e^x > 0 \ \forall x \text{ στο εσωτερικό του } \mathbb{R}$$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρώς κοίλη

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ , \ f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \forall x \text{ στο εσωτερικό του } \mathbb{R}_{++}$$



Η συνάρτηση $f(x) = \ln x : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρώς κοίλη. Ένα οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα (χορδή: εδώ το μπλε ευθύγραμμο τμήμα) βρίσκεται κάτω από την καμπύλη (τόξο) της συνάρτησης.

Σημείωση: Σε ένα λιγότερο αυστηρό πλαίσιο όπου δεν υποθέτουμε αναγκαστικά την ύπαρξη δεύτερης ή ακόμη και πρώτης παραγώγου, μία συνάρτηση $f(x)$ είναι **κοίλη** στο κυρτό διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$ αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ και $\lambda \in [0,1]$ έχουμε

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι **αυστηρώς κοίλη** στο κυρτό διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$ αν για κάθε $x_1 \neq x_2 \in A$ και $\lambda \in (0,1)$ έχουμε

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Αντίστοιχα με $\leq$ και $<$ δίνεται ο γενικότερος ορισμός της **κυρτότητας** και **αυστηρής κυρτότητας**.

- Οι κοίλες συναρτήσεις, σε πολλές οικονομικές εφαρμογές, παριστούν φθίνουσες οριακές αποδόσεις και μπορούν να εκπροσωπήσουν **συναρτήσεις χρησιμότητας και παραγωγής** που θα τις μάθετε σταδιακά στο πλαίσιο σπουδών σας. Για παράδειγμα, η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

$$Q = f(L) = AL^a \quad , \quad A > 0 \quad , \quad L > 0$$

δίνει οριακή απόδοση εργασίας

$$MP_L = Q' = \frac{dQ}{dL}$$

που ονομάζεται **οριακό προϊόν ή οριακή παραγωγικότητα** της εργασίας L. Έστω ότι $0 < a < 1$. Το οριακό προϊόν MP_L είναι αύξουσα συνάρτηση της εισροής της εργασίας καθώς $MP_L > 0$ αφού

$$Q' = MP_L = \frac{dQ}{dL} = aAL^{a-1} > 0$$

Όμως, με την υπόθεση $0 < a < 1$, η συνάρτηση παραγωγής επίσης παρουσιάζει **φθίνον οριακό προϊόν** MP_L, αφού η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης παραγωγής είναι αρνητική, $Q'' < 0$, για κάθε $L > 0$, ή εναλλακτικά, η πρώτη παράγωγος του οριακού προϊόντος είναι αρνητική, δηλαδή

$$\begin{aligned} Q'' &= \frac{d^2Q}{dL^2} = \frac{dMP_L}{dL} = \\ &= a\,(a-1)\,AL^{a-2} < 0 \end{aligned}$$

Οπότε η συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas

$$Q = AL^a$$

είναι αυστηρώς κοίλη όταν η παράμετρος a είναι περιορισμένη στο $0 < a < 1$ και η κοιλότητα (μεταξύ άλλων) υπονοεί την φθίνουσα οριακή απόδοση της εργασίας.

~~1.1 Αποστροφή κινδύνου (risk aversion): κοιλότητα συνάρτησης χρησιμότητας~~

Θεωρούμε, σε πολλά βασικά οικονομικά υποδείγματα, ότι μπροστά σε έναν κίνδυνο (ρίσκο), δηλαδή σε συνθήκες αβεβαιότητας, τα άτομα της οικονομίας **αποστρέφονται τον κίνδυνο (risk aversion)**.

Η συγκεκριμένη υπόθεση *"βεβαιώνεται"* από την υπόθεση της κοιλότητας της *"συνάρτησης χρησιμότητας*[2]*"*, $u(\cdot)$, μίας συνάρτησης που αποδίδει μετρήσιμους αριθμούς σε (μη-μετρήσιμα) επίπεδα *"χρησιμότητας"*.

~~1.1.1 Παράδειγμα (s.o.s)~~

Έστω ότι W συμβολίζει το αβέβαιο αποτέλεσμα, πληρωμή ή πλούτο(wealth) στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε με πιθανότητα $p = 0.5$ να λάβουμε $w_1 = 10$€ και με πιθανότητα $1 - p = 0.5$ να λάβουμε $w_2 = 20$€ ευρώ, **έναντι** της εναλλακτικής να λάβουμε με **βεβαιότητα** 15 ευρώ.

Δηλαδή είμαστε αντιμέτωποι με μία επιλογή, να λάβουμε **με βεβαιότητα 15 ευρώ** ή μπορούμε να συμμετέχουμε στον συγκεκριμένο "τζόγο" και να λάβουμε **10 ευρώ** με πιθανότητα 50% ή **20 ευρώ** με πιθανότητα 50% (οι πιθανότητες $p_1 = p$ και $p_2 = 1 - p$ είναι ίσες προς αλγεβρική διευκόλυνση της ανάλυσης, μπορούν να διαφέρουν $p_1 \neq p_2$ αρκεί $p_1 + p_2 = 1$).

Η αναμενόμενη ή μέση τιμή του τζόγου ή αβέβαιου αποτελέσματος δίνεται από

$$E(W) = p_1 w_1 + p_2 w_2 = p_1 w_1 + (1 - p_1) w_2$$

ή στο συγκεκριμένο παράδειγμα από

$$E(W) = p w_1 + (1 - p) w_2 = 0.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 20 = 15\text{€}$$

Έστω ότι η συνάρτηση $u(\cdot)$ εκφράζει *"χρησιμότητα"* από την όποια επιλογή μας. Τότε, **η υπόθεση της κοιλότητας της συνάρτησης χρησιμότητας** ($u'(\cdot) > 0$, $u''(\cdot) < 0$ αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) υποννοεί ότι είμαστε **αποστροφείς κινδύνου (risk averse)** αφού

$$\underbrace{u(E(W))}_{\text{χρησιμότητα βέβαιου αποτελέσματος}} \quad \geq \quad \underbrace{E(u(W))}_{\text{χρησιμότητα τζόγου}}$$

δηλαδή (υπόθεση κοιλότητας)

$$u(15) \geq 0.5 \cdot u(10) + 0.5 \cdot u(20)$$

[2] Περισσότερα θα μάθετε στην Μικροοικονομική ...

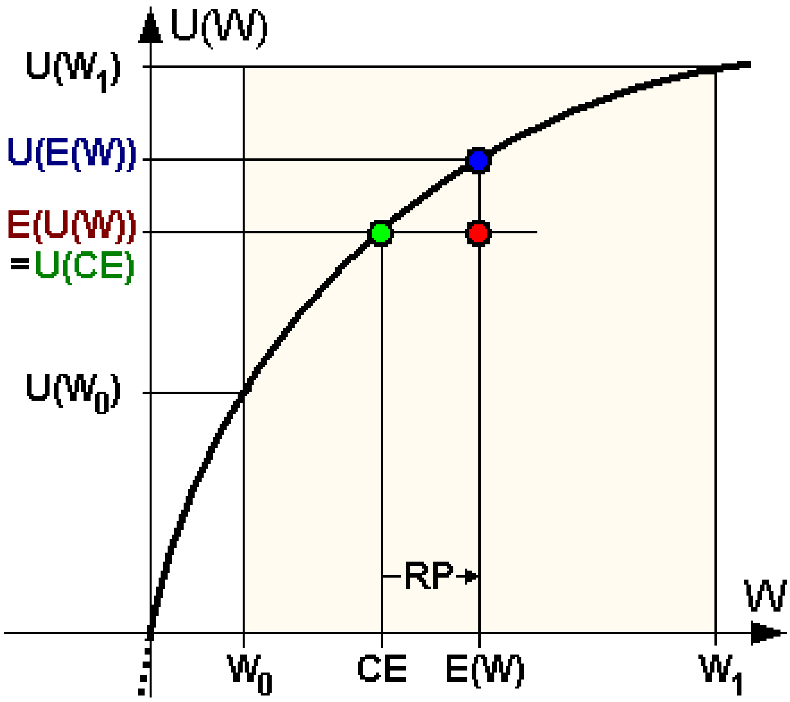
όπου

$$u(15) = u(0.5 \times 10 + 0.5 \times 20)$$

ή γενικότερα

$$u(p \cdot w_1 + (1-p) w_2) \geq p \cdot u(w_1) + (1-p) \cdot u(w_2)$$

γιά κάποια πιθανότητα $p \in [0,1]$.



Πηγή: wikipedia

Η χρησιμότητα της βέβαιης επιλογής είναι μεγαλύτερη από τη χρησιμότητα αν αναλάβουμε το στοίχημα (άρα ΔΕΝ αναλαμβάνουμε το στοίχημα). Η αναμενόμενη χρησιμότητα $E(u(W))$ (χρησιμότητα του τζόγου) είναι ίση με τη χρησιμότητα που απολαμβάνουμε από ένα ποσό $\bar{W}$ ή στο παραπάνω γράφημα CE, μικρότερο του $E(W)$.

Το συγκεκριμένο ποσό $\bar{W} : u(\bar{W}) = E(u(W))$ καλείται "ισοδύναμο βεβαιότητας" (certainty equivalent) ενώ η απόσταση $E(W) - \bar{W} = RP$ είναι το *πριμ κινδύνου (risk premium)*.

Παράδειγμα: Έστω ότι αντιμετωπίζετε μία συνάρτηση χρησιμότητας $u(W) = \ln(W) : (1, +\infty] \to \mathbb{R}_{++}$ και το παραπάνω δίκαιο στοίχημα. Τότε σε επίπεδα χρησιμότητας

$$\begin{aligned} u\left(E\left(W\right)\right) &= u\left(15\right) = \ln 15 = 2.7080 : \text{ χρησιμότητα βέβαιου αποτελέσματος} \\ E\left(u\left(W\right)\right) &= 0.5 \ln 10 + 0.5 \ln 20 = 2.6491 : \text{ χρησιμότητα τζόγου} \end{aligned}$$

και

$$u\left(\bar{W}\right) = E\left(u\left(W\right)\right) \Rightarrow \ln \bar{W} = 2.6491 \Rightarrow \bar{W} = 14.1421$$

Άρα το πριμ κινδύνου είναι ίσο με

$$RP = E\left(W\right) - \bar{W} = 15 - 14.1421 = 0.8579$$

Αυτό σημαίνει ότι είστε *"αδιάφοροι" (indifferent)* μεταξύ 14.1421 ευρώ σίγουρη πληρωμή και 15 ευρώ από το συγκεκριμένο τζόγο. Οποιοδήποτε στοίχημα σας δώσει σίγουρη πληρωμή παραπάνω από 14.1421 ευρώ θα προτιμηθεί έναντι του τζόγου.

2 Βελτιστοποίηση

- Εύρεση της τιμής $x^* \in A$ στην οποία η συνάρτηση

$$f\left(x\right) : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$$

έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή

$$\max_x f\left(x\right) \text{ ή } \min_x f\left(x\right)$$

- Χαρακτηρισμός του μέγιστου ή ελάχιστου σημείου $\{x^*, f\left(x^*\right)\}$ ως **τοπικό, ολικό, μοναδικό ολικό.**

- Το μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης μπορεί να χαρακτηρισθεί επιπλέον ως **(α) εσωτερικό** αν το x^* βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης ή **(β) συνοριακό** στην περίπτωση που το x^* βρίσκεται στα άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

2.1 Εσωτερικά σημεία

Έστω ότι $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Έστω ότι x_0 ένα εσωτερικό σημείο του A. π.χ. αν $A = [a, b]$ τότε $x_0 \in (a, b)$.

Υποθέστε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε μία γειτνίαση του x_0 (άρα και στο x_0). Τότε αν

(i). Συνθήκη Πρώτης Τάξης (Σ.Π.Τ) ή αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη **μέγιστου**

$$f'(x_0) = 0$$

και **Συνθήκη Δεύτερης Τάξης (Σ.Δ.Τ)** ή ικανή συνθήκη για ύπαρξη **μέγιστου**

$$f''(x_0) < 0$$

άρα

$f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο x_0

(ii). Συνθήκη πρώτης τάξης (Σ.Π.Τ) ή αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη **ελάχιστου**

$$f'(x_0) = 0$$

και **Συνθήκη Δεύτερης Τάξης (Σ.Δ.Τ)** ή ικανή συνθήκη για ύπαρξη **ελάχιστου**

$$f''(x_0) > 0$$

άρα

$f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο x_0

Θεωρία: Έστω ότι $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Επιπλέον, έστω ότι $x_0 \in A$. Τέλος, έστω ότι το A είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) και κυρτό τότε

(i). αν η f είναι συνεχής και **κοίλη** (concave) και έχει τοπικό μέγιστο στο x_0, τότε η f έχει **ολικό μέγιστο** στο x_0

(ii). αν η f είναι **κυρτή** (convex) και έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0, τότε η f έχει **ολικό ελάχιστο** στο x_0

Θεωρία: Έστω ότι $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Επιπλέον, έστω ότι $x_0 \in A$. Τέλος, έστω ότι το A είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) και κυρτό τότε

(i). αν η f είναι **αυστηρώς κοίλη** (strictly concave) έχει το πολύ ένα ολικό μέγιστο (**μοναδικό ολικό μέγιστο** στο σημείο $f'(x_0) = 0$ αν είναι τουλάχιστον μία φορά παραγωγίσιμη στο x_0)

(ii). αν η f είναι **αυστηρώς κυρτή** (strictly convex) έχει το πολύ ένα ολικό ελάχιστο στο x_0 (**μοναδικό ολικό ελάχιστο** στο σημείο $f'(x_0) = 0$ αν είναι τουλάχιστον μία φορά παραγωγίσιμη στο x_0)

2.1 (Παρένθεση:) Δεξιά και Αριστερή παράγωγος συνάρτησης

Μία συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$ είναι δεξιά παραγωγίσιμη στο a αν υπάρχει και είναι πεπερασμένο (όχι άπειρο) το όριο

$$f'(a^+) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta}$$

Αντίστοιχα είναι αριστερά παραγωγίσιμη στο b αν υπάρχει και είναι πεπερασμένο το όριο

$$f'(b^-) = \lim_{\delta \to 0^-} \frac{f(b+\delta) - f(b)}{\delta}$$

Μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 όταν

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) \quad (= f'(x_0))$$

Η συνέχεια μίας συνάρτησης ΔΕΝ συνεπάγεται και παραγωγισιμότητα ενώ η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται και συνέχεια της συνάρτησης.

- **Για παράδειγμα (συνέχειας και μη-παραγωγισιμότητας)**, η συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ αφού τα δεξιά και αριστερά όρια της $f(x)$ στο $x_0 = 0$ δεν είναι ίσα. Παρόλαυτα, η συνάρτηση $|x|$ **είναι** δεξιά παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0^+) = 1$ **και** αριστερά παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0^-) = -1$

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{|0+\delta| - |0|}{\delta} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{|\delta|}{\delta} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\delta}{\delta} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{\delta \to 0^-} \frac{|0+\delta| - |0|}{\delta} = \lim_{\delta \to 0^-} \frac{|\delta|}{\delta} = \lim_{\delta \to 0^-} -\frac{\delta}{\delta} = -1 \end{aligned}$$

- Σε ένα άλλο **παράδειγμα (παραγωγισιμότητας)**, έστω η συνάρτηση $y = \ln(x+1)$, $x \in [0, 10]$. Η συνάρτηση είναι **δεξιά παραγωγίσιμη** στο αριστερό άκρο του πεδίου ορισμού της (στο 0). Για παράδειγμα η δεξιά παράγωγος δίνεται από

$$f'(0^+) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\ln(1+\delta) - \ln(1)}{\delta} \overset{l'ho}{=} \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1/(1+\delta)}{1} = 1$$

Στο άλλο άκρο του πεδίου ορισμού της, (στο 10), είναι επίσης **αριστερά παραγωγίσιμη**. Για παράδειγμα η αριστερή παράγωγος δίνεται από

$$f'(10^-) = \lim_{\delta\to 0^-} \frac{\ln(10+\delta) - \ln(10)}{\delta} \overset{l'ho}{=} \lim_{\delta\to 0^-} \frac{1/(10+\delta)}{1} = \frac{1}{10}$$

- Τέλος, σε ένα άλλο **παράδειγμα (παραγωγισιμότητας)**, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ με $x \in [0,1]$. Δείξτε - με χρήση ορίων - ότι η συνάρτηση είναι δεξιά παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0^+) = 0$ και αριστερά παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1^-) = 1$.

~~2.2 Συνοριακά σημεία~~ ΜΟΝΟ ΜΕΛΕΤΗ - ΟΧΙ για εξετάσεις

Έστω $A = [a,b]$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$ και έστω ότι $f : A \to \mathbb{R}$

(i). Αν η f είναι δεξιά-παραγωγίσιμη στο a και $f'(a) < 0$ τότε η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο a

Αν f είναι δύο φορές δεξιά-παραγωγίσιμη στο a και $f'(a) = 0$ με $f''(a) < 0$ τότε η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο a

Επιπλέον, αν $f'(a) \leq 0$ και η f είναι **κοίλη** στο A^0 τότε έχει **ολικό μέγιστο** στο a ενώ αν η f είναι **αυστηρώς κοίλη** στο A^0 τότε έχει **μοναδικό ολικό μέγιστο** στο a

Σημείωση: Σε περίπτωση συνοριακού σημείου στο οποίο η συνάρτηση είναι μη-παραγωγίσιμη, τότε χαρακτηρίζουμε το ακρότατο με βάση την ανισότητα $f(a) \gtreqless f(x)$, $\forall x \in A \backslash \{a\}$. Παρομοίως και για το 'δεξιό' συνοριακό σημείο b

(ii). Αν η f είναι δεξιά-παραγωγίσιμη στο a και $f'(a) > 0$ τότε η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο a

Αν f είναι δύο φορές δεξιά-παραγωγίσιμη στο a και $f'(a) = 0$ με $f''(a) > 0$ τότε η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο a

Επιπλέον αν $f'(a) \geq 0$ και η f είναι **κυρτή** στο A^0 τότε έχει **ολικό ελάχιστο** στο a ενώ αν η f είναι **αυστηρώς κυρτή** στο A^0 τότε έχει **μοναδικό ολικό ελάχιστο** στο a

(iii). Αν η f είναι αριστερά-παραγωγίσιμη στο b και $f'(b) > 0$ τότε η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο b

Αν f είναι δύο φορές αριστερά-παραγωγίσιμη στο b και $f'(b) = 0$ με $f''(b) > 0$ τότε η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο b

Επιπλέον αν $f'(b) \leq 0$ και η f είναι **κυρτή** στο A^0 τότε έχει **ολικό ελάχιστο** στο b ενώ αν η f είναι **αυστηρώς κυρτή** στο A^0 τότε έχει **μοναδικό ολικό ελάχιστο** στο b

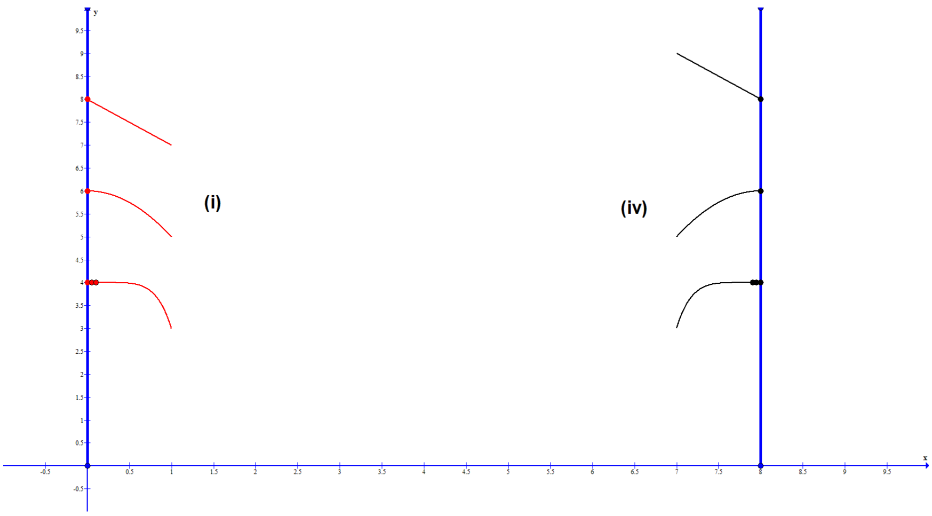
(iv). Αν η f είναι αριστερά-παραγωγίσιμη στο b και $f'(b) < 0$ τότε η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο b

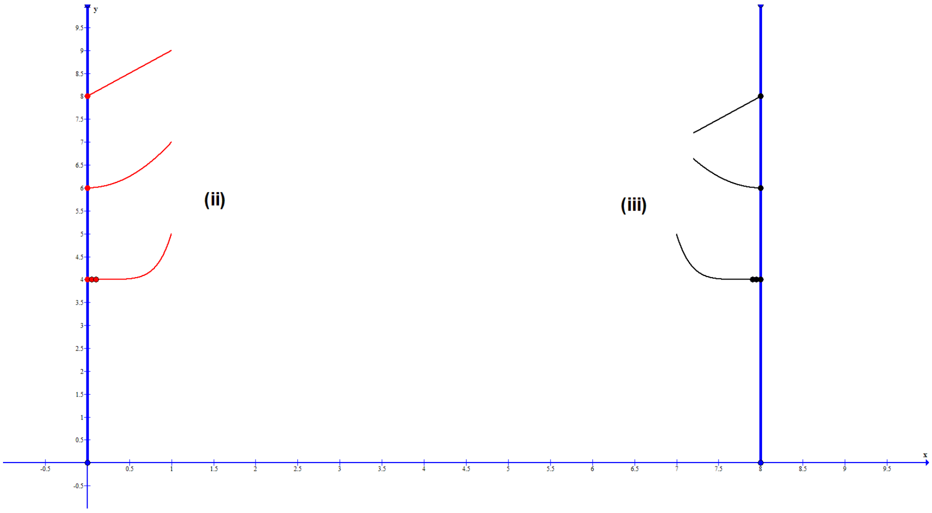
Αν f είναι δύο φορές αριστερά-παραγωγίσιμη στο b και $f'(b) = 0$ με $f''(b) < 0$ τότε η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο b

Επιπλέον αν $f'(b) \geq 0$ και η f είναι **κοίλη** στο A^0 τότε έχει **ολικό μέγιστο** στο b ενώ αν η f είναι **αυστηρώς κοίλη** στο A^0 τότε έχει **μοναδικό ολικό μέγιστο** στο b

~~2.3 Γράφημα συνοριακών ακρότατων~~ ΜΟΝΟ ΜΕΛΕΤΗ - ΟΧΙ για εξετάσεις

Γράφημα που παρουσιάζει όλα τα πιθανά συνοριακά ακρότατα.





2.4 Παρένθεση: κριτήριο ν-οστής παραγώγου

Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη $\nu-$ φορές σε ένα διάστημα A με το x_0 εσωτερικό σημείο του A.

Aν

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(\nu-1)}(x_0) = 0$$

με

$$f^{(\nu)}(x_0) \neq 0$$

και

(i): το ν είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός τότε,

$$f^{(v)}(x_0) > 0 \Rightarrow \text{η } f \text{ έχει τοπικό ελάχιστο στο } x_0$$
$$f^{(v)}(x_0) < 0 \Rightarrow \text{η } f \text{ έχει τοπικό μέγιστο στο } x_0$$

(ii): το ν είναι περιττός αριθμός τότε η f έχει **σημείο καμπής** στο x_0.

Παράδειγμα. Προβείτε σε εύρεση του τοπικού μέγιστου ή ελάχιστου της συνάρτησης

$$f(x) = 1 - x^4$$

Παράδειγμα. Προβείτε σε εύρεση του τοπικού μέγιστου ή ελάχιστου της συνάρτησης

$$f(x) = x^6$$

Παράδειγμα. Προβείτε σε εύρεση του τοπικού μέγιστου ή ελάχιστου της συνάρτησης

$$f(x) = x^3$$

3 Σημεία καμπής

Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα A και το x_0 εσωτερικό σημείο του A. Η συνάρτηση έχει σημείο καμπής στο x_0 αν $f''(x_0) = 0$ και η δεύτερη παράγωγος f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, δηλαδή $f''(x_0 - \varepsilon) f''(x_0 + \varepsilon) < 0$ για $\varepsilon > 0$.

Παράδειγμα. Για την $f(x) = x^3$ με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6x$, λαμβάνουμε $f''(0) = 0$, οπότε πιθανό σημείο καμπής είναι το $x_0 = 0$. Υπολογίζουμε το πρόσημο του γινομένου $f''(x_0 - \varepsilon) f''(x_0 + \varepsilon)$ και βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} f''(x_0 - \varepsilon) \cdot f''(x_0 + \varepsilon) &= \\ 6(x_0 - \varepsilon) \cdot 6(x_0 + \varepsilon) &= \\ 6x_0^2 - 36\varepsilon^2 &= -36\varepsilon^2 < 0 \end{aligned}$$

είναι αρνητικό. Άρα το $x_0 = 0$ είναι σημείο καμπής.

4 Ασύμπτωτες

Η ευθεία $y = \alpha$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της $f(x)$ όταν

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \text{ ή } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$$

Η ευθεία $x = \alpha$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της $f(x)$ όταν

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = \pm\infty \text{ ή } \lim_{x \to \alpha^-} f(x) = \pm\infty$$

Η ευθεία $y = \alpha + \beta x$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της $f(x)$ όταν

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - \beta x] = \alpha \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα

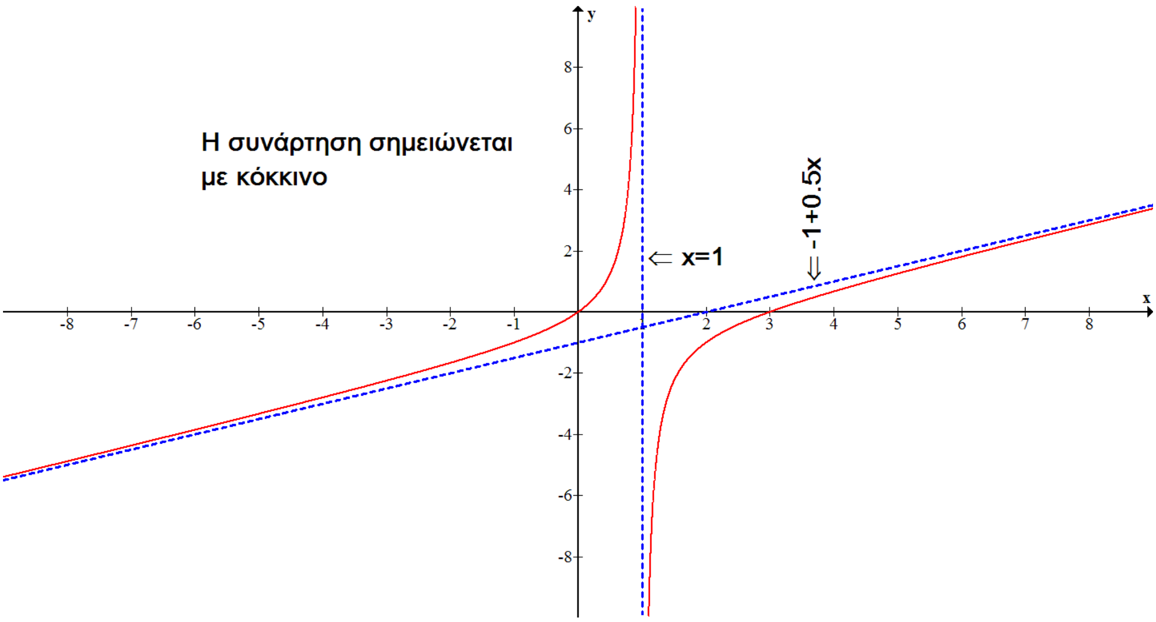
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x - 2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x - 2} = \pm\infty \text{ δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x}{2x - 2} = -\infty \text{ υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-3x}{2x-2}}{x}=\frac{1}{2}\quad,\quad \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-3x}{2x-2}-\frac{1}{2}x\right]=-1$$

υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη $y=-1+\dfrac{x}{2}$



~~5 Μελέτη συνάρτησης (κατασκευή πίνακα μεταβολών)~~

~~5.1 Πλήρης Μελέτη~~ ΜΟΝΟ ΜΕΛΕΤΗ - ΟΧΙ για εξετάσεις

- Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της f
- Εξετάζουμε αν είναι άρτια[3] $f(-x)=f(x)\ \forall x$, περιττή[4] $f(-x)=-f(x)\ \forall x$ ή περιοδική $f(x+k)=f(x)$ με $x+k$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός k ονομάζεται περίοδος της f
- Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της

[3] και επομένως η γραφική παράστασή της έχει άξονα συμμετρίας τον κάθετο άξονα $y'y$.

[4] Η γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

- Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία (σημεία στασιμότητας $x_0 : f'(x_0) = 0$, άκρα πεδίου ορισμού, τυχόν σημεία μη-παραγωγισιμότητας και ασυνέχειας)
- Εξετάζουμε τη μονοτονία με το πρόσημο της f'
- Βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα, ΣΠΤ, ΣΔΤ
- Προσδιορίζουμε την καμπυλότητα με το πρόσημο της f'' και τα σημεία καμπής $f''(\cdot) = 0$
- Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες
- Βρίσκουμε τα σημεία τομής της $f(x)$ με τους άξονες

ΜΟΝΟ ΜΕΛΕΤΗ - ΟΧΙ για εξετάσεις

~~5.2 Βασική Μελέτη (πίνακας μεταβολών)~~

Υποθέτουμε συνάρτηση $f(x)$ (συνεχή και) τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της.

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f (τα άκρα του και πιθανά σημεία ασυνέχειας). Βρίσκουμε τα σημεία στασιμότητας $x_0 : f'(x_0) = 0$
- Εξετάζουμε τη μονοτονία με το πρόσημο της f' γύρω από τα x_0
- Προσδιορίζουμε την καμπυλότητα με το πρόσημο της f'' και τα σημεία καμπής $f''(\cdot) = 0$
- Βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα: Σ.Π.Τ, Σ.Δ.Τ

5.3 Άσκηση 1

Βρείτε τα στάσιμα σημεία $(x : f'(x) = 0)$ της παρακάτω συνάρτησης $y = f(x)$, $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και βεβαιώστε αν πρόκειται για τοπικά μέγιστα, ελάχιστα ή σημεία καμπής

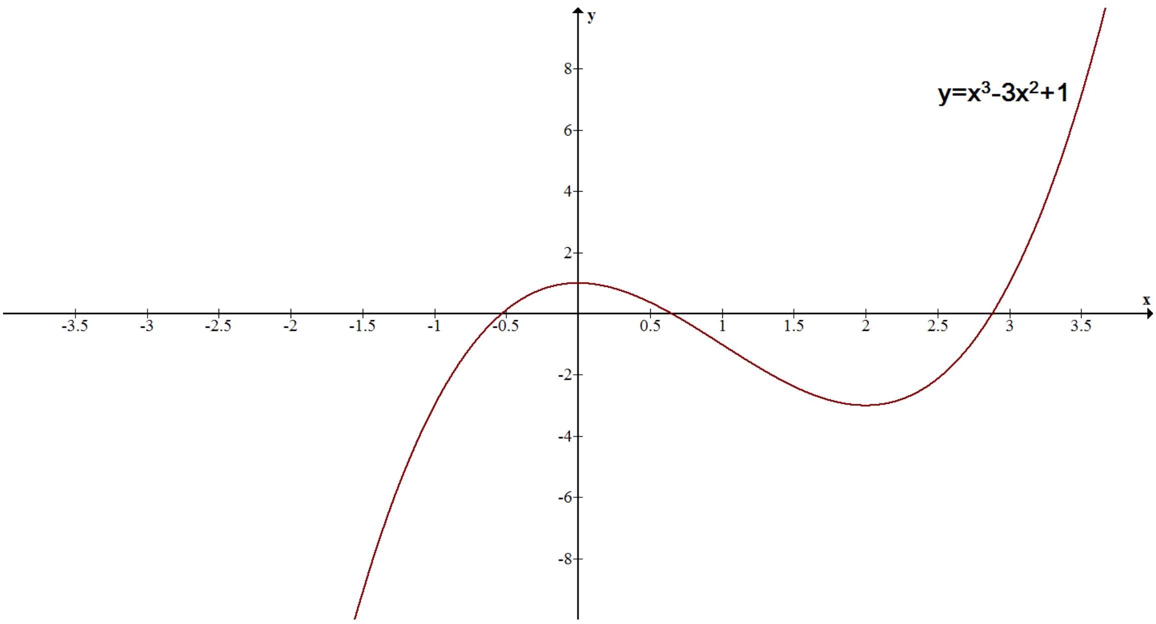
$$y = x^3 - 3x^2 + 1$$

5.4 Άσκηση 2

Βρείτε τα στάσιμα σημεία $(x : f'(x) = 0)$ της παρακάτω συνάρτησης $y = f(x)$, $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και βεβαιώστε αν πρόκειται για τοπικά μέγιστα, ελάχιστα ή σημεία καμπής

$$y = x^4 - 4x^3 + 16x - 2$$

Σημείωση: Το πολυώνυμο $x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$



Η συνάρτηση $y = x^3 - 3x^2 + 1$ για $x \in [-4, 4]$

5.5 Άσκηση

Βρείτε τα στάσιμα σημεία ($x : f'(x) = 0$) της παρακάτω συνάρτησης $y = f(x)$, $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και βεβαιώστε αν πρόκειται για τοπικά μέγιστα, ελάχιστα ή σημεία καμπής

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Σ.Π.Τ

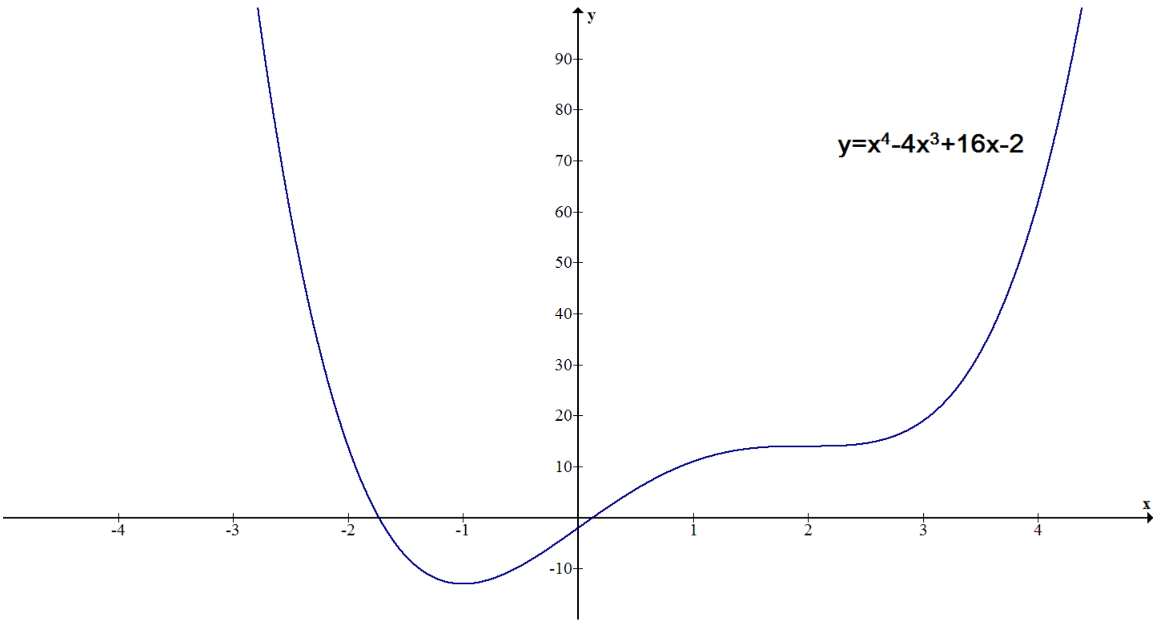
$$f'(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 - 2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow x^* = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

Σ.Δ.Τ

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4x\left(x^2+1\right)^2 - 4x\left(2-2x^2\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} \\ &= \frac{-4x\left(x^2+1\right)^2\left(3-2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4} \end{aligned}$$

$$f''(-1) > 0 \text{ τοπικό ελάχιστο}$$

$$f''(1) < 0 \text{ τοπικό μέγιστο}$$



Η συνάρτηση $y = x^4 - 4x^3 + 16x - 2$ για $x \in [-5, 5]$

5.6 Άσκηση

Προβείτε σε βασική μελέτη της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

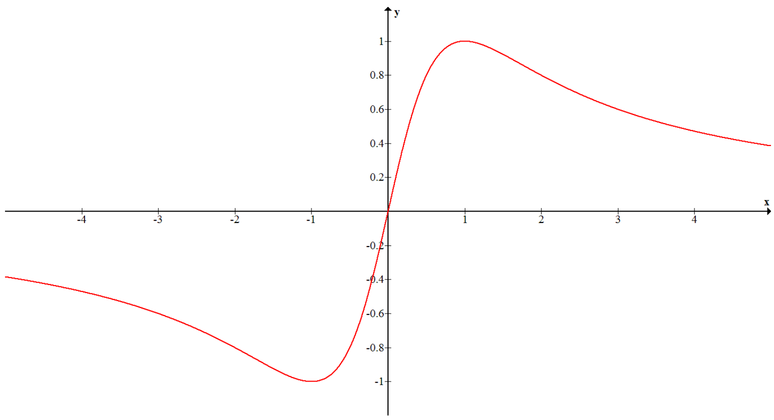
δημιουργώντας τον κατάλληλο πίνακα (φθίνουσα/αύξουσα, τοπικά ακρότατα, σημεία καμπής)

Από την πρώτη παράγωγο διαπιστώνουμε ότι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται στα σημεία

$$f''(x) = 0 \Rightarrow$$
$$-4x\left(x^2+1\right)^2\left(3-2x^2\right) = 0 \Rightarrow$$
$$x^{**} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, x^{**} = 0$$



Η συνάρτηση $y = \frac{2x}{x^2+1}$ για $x \in [-5, 5]$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		-1		0		1		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	0	$-$	⋮	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	0	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	⋮	$\searrow$	⋮	$\nearrow$	⋮	$\nearrow$		$\searrow$	⋮	$\searrow$	
f''			⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		

5.7 Άσκηση

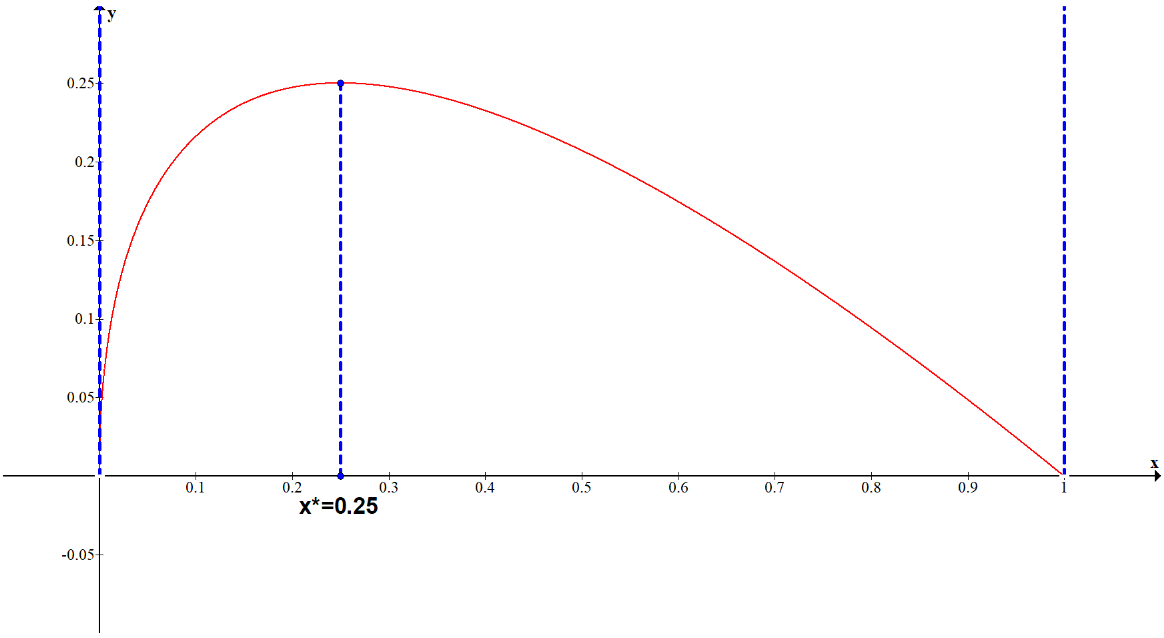
Έστω η συνάρτηση $y = \sqrt{x} - x$ με $x \in [0, 1]$ δηλαδή το πεδίο ορισμού είναι το $A = [0, 1] \in \mathbb{R}$ με εσωτερικό σύνολο το $A^0 = (0, 1)$. Το γράφημα της συνάρτησης φαίνεται παρακάτω.

Ερώτηση 1. Προβείτε στη λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης

$$\max_x \sqrt{x} - x$$

Ερώτηση 2. Χαρακτηρίστε τον τύπο του μέγιστου (**τοπικό, ολικό, ολικό και μοναδικό;**)

~~**Ερώτηση 3.** Επίσης μελετήστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης στα συνοριακά~~ σημεία $x = 0$ και $x = 1$



Η συνάρτηση $y = \sqrt{x} - x$ για $x \in (0, 1]$

Απάντηση 1. Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^{-1/2} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow x^* = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

Σ.Δ.Τ: Επειδή

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2} < 0$$

και έχουμε σίγουρα τοπικό μέγιστο στο στάσιμο σημείο $x^* = \frac{1}{4}$.

Απάντηση 2. Όμως

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} < 0 \ \forall x \text{ στο } A^0$$

Άρα η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ είναι αρνητική για κάθε x στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού, δηλαδή $\forall x \in A^0$ οπότε η $f(x) = \sqrt{x} - x$ είναι **αυστηρώς κοίλη** και το $x^* = \frac{1}{4}$ είναι **ολικό μοναδικό μέγιστο** αφού $f''(x^*) < 0$.

Απάντηση 3. Στο (αριστερό) συνοριακό σημείο $x = 0$ έχουμε

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) \to +\infty$$

και η συνάρτηση **δεν είναι δεξιά παραγωγίσιμη** στο 0. Όμως

$$f(0) = 0 < f(x) = \sqrt{x} - x \ , \ \forall x \in (0,1) \subset (0,1]$$

άρα το $x = 0$ αντιστοιχεί σε **τοπικό ελάχιστο**. Επειδή η ανισότητα ισχύει για κάθε $\forall x \in (0,1)$ το ελάχιστο μπορεί να είναι ολικό ή ολικό και μοναδικό αρκεί να εξετάσουμε τι συμβαίνει και στο άλλο άκρο (σύνορο) του πεδίο ορισμού. Στο συνοριακό σημείο $x = 1$ έχουμε αριστερή παραγωγισιμότητα αφού

$$f'(1) = -\frac{1}{2} < 0$$

Επειδή η $f'(1) < 0$, η συνάρτηση έχει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 1$. Ατυχώς, η συνάρτηση δεν είναι κυρτή ή αυστηρώς κυρτή για να χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη **(iii)** που δόθηκε παραπάνω. Όμως αφού

$$f(1) = 0 < f(x) \ , \ \forall x \in (0,1)$$

το ελάχιστο $f(1) = 0$ είναι ολικό (όχι όμως και μοναδικό) ελάχιστο.

Άρα η συνάρτηση, στο πεδίο ορισμού της, έχει **ένα εσωτερικό ολικό και μοναδικό μέγιστο** στο $x_1^* = \frac{1}{4}$ και **δύο συνοριακά ολικά ελάχιστα** στα $x_2^* = 0$, $x_3^* = 1$.