

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Σύνολο Ασκήσεων διάλεξης 4

Όρια και κανόνας L'Hôpital, ελαστικότητα, ρυθμός μεγέθυνσης

Τμήμα Α, Ιωάννης Βενέτης, Αναπλ. Καθηγητής

Νοέμβριος 2016

1 Άσκηση $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

1. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

2. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

Σημείωση: $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ όταν $n \in \mathbb{Z}_+$, (διαβάζεται “ n παραγοντικό”, ισχύει $1! = 1$ και $0! = 1$)

3. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \ln(\beta x + \gamma)}{x}$$

όπου α, β, γ θετικές σταθερές.

2 Άσκηση $(0 \cdot \pm\infty)$

1. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

3 Άσκηση $(\infty - \infty)$

1. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

2. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

Προσοχή ... θα σας δυσκολέψει ο κανόνας l'Hôpital μετά την πρώτη εφαρμογή του ... προβείτε σε αλγεβρικές απλοποιήσεις.

4 Άσκηση 0^0

Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{\ln x}$$

5 Άσκηση ∞^0

Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)^{\frac{1}{x}}$$

6 Άσκηση 1^∞

1. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

2. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{x-1}}$$

7 Άσκηση

Για τη γραμμική συνάρτηση κατανάλωσης

$$C = a + bY$$

όπου C κατανάλωση και Y διαθέσιμο εισόδημα, με οριακή ροπή προς κατανάλωση ίση με b και $0 < b < 1$.

1. Τι εκφράζει η παράμετρος a και ποιό το αναμενόμενο πρόσημό της;
2. βρείτε την οριακή συνάρτηση (πρώτη παράγωγο) $\frac{dC}{dY}$
3. βρείτε τη μέση συνάρτηση (δηλαδή $\frac{C}{Y}$) κατανάλωσης ή τη μέση κατανάλωση ανά μονάδα διαθέσιμου εισοδήματος
4. βρείτε την ελαστικότητα της κατανάλωσης ως προς το διαθέσιμο εισόδημα και δείξτε ότι η κατανάλωση είναι ανελαστική για κάθε $Y > 0$

8 Άσκηση

1. Υποθέστε ότι $Y(t) = aX(t)$ όπου a μία σταθερά (ως προς τον χρόνο). Βρείτε το ρυθμό μεγέθυνσης της Y και σχολιάστε. **Σημείωση:** έστω ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της $X(t)$ είναι ίσος με g_x .
2. Υποθέστε ότι $Y(t) = (X(t))^a$ όπου a μία σταθερά (ως προς τον χρόνο). Βρείτε το ρυθμό μεγέθυνσης της Y και σχολιάστε. **Σημείωση:** έστω ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της $X(t)$ είναι ίσος με g_x .
3. Υποθέστε ότι το πραγματικό ΑΕΠ: $Y(t)$ μεγενθύνεται με 4% το έτος και ο πληθυσμός: $POP(t)$ με 1.5%. Ποιός ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν πραγματικού Α.Ε.Π;

4. **(s.o.s)** Έστω ότι το κεφαλαιακό απόθεμα μεγενθύνεται σταθερά στο χρόνο με ετήσιο ρυθμό 5%. Σε πόσα έτη θα διπλασιαστεί το κεφαλαιακό απόθεμα;
Απάντηση: Ο σταθερός ρυθμός μεγέθυνσης υπονοεί την εκθετική συνάρτηση

$$K(t) = K_0 e^{0.05t}$$

ως συνάρτηση κίνησης του κεφαλαιακού αποθέματος στο χρόνο. Έστω ότι “*τώρα*” το κεφαλαιακό απόθεμα είναι ίσο με K_0 . Θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$2K_0 = K_0 e^{0.05t}$$

ως προς τον χρόνο t για να απαντήσουμε την ερώτηση. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} 2K_0 &= K_0 e^{0.05t} \Rightarrow \\ 2 &= e^{0.05t} \Rightarrow \\ \ln 2 &= 0.05t \Rightarrow \\ t^* &= \frac{\ln 2}{0.05} \approx 13.863 \end{aligned}$$

ή περίπου 14 χρόνια.