Ομάδα Α.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:..

ΑΜ:..

1. (2 μονάδες) Ποιό από τα παρακάτω είναι σωστό;
   i. Ο πραγματικός αριθμός π είναι υπερβατικός, ο πραγματικός αριθμός e είναι υπερβατικός και οι δύο αριθμοί είναι αλγεβρικοί
   ii. Ο πραγματικός αριθμός e είναι άρρητος, ο πραγματικός αριθμός π είναι υπερβατικός αλλά δεν είναι άρρητος
   iii. Ο πραγματικός αριθμός π είναι υπερβατικός, ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός και οι δύο αριθμοί είναι άρρητοι
   iv. Ο πραγματικός αριθμός $i\sqrt{5}$ είναι υπερβατικός, ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός και οι δύο αριθμοί είναι άρρητοι
   v. Ο αριθμός $e^{i\pi}$ είναι μιγαδικός, ο αριθμός $\sqrt{-1}$ είναι αλγεβρικός και οι δύο αριθμοί είναι άρρητοι
   vi. Τίποτα από τα παραπάνω
   vii. όλα τα παραπάνω

2. (2 μονάδες) Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$
   i. $x_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{2-\sqrt{5}}{2}$
   ii. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$
   iii. $x_1 = 25$, $x_2 = -25$, $x_3 = 0$
   iv. $x_1 = 5$
   v. $x_1 = 5$, $x_2 = -5$
   vi. $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$
   vii. Τίποτα από τα παραπάνω

3. (2 μονάδες) Ο αριθμός $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ είναι
   i. πραγματικός και μιγαδικός αριθμός
   ii. φυσικός αριθμός
   iii. ρητός αριθμός
   iv. πραγματικός αλγεβρικός
   v. πραγματικός μη-αλγεβρικός
   vi. υπερβατικός
   vii. τίποτα από τα παραπάνω
   viii. όλα τα παραπάνω

4. (4 μονάδες) Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B \times C$ όπου $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{0, 1, 2\}$ δίνεται από
    i. $A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,0,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}$
    ii. $A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}$
    iii. $A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}$
    iv. $A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}$
    v. $A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,3), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,1), (1,2,2)\}$
    vi. τίποτα από τα παραπάνω

5. (5 μονάδες) Το Καρτεσιανό γινόμενο $\Gamma \times \Delta$ περιέχει συνολικά 6 στοιχεία. Τρία από αυτά είναι τα $(6, -1)$, $(7, 0)$ και $(8, 0)$. Μπορείτε να βρείτε το καρτεσιανό γινόμενο $\Delta \times \Gamma =$;

Απάντηση:

$$\Delta \times \Gamma = \{(-1, 6), (-1, 7), (-1, 8), (0, 6), (0, 7), (0, 8)\}$$

6. (5 μονάδες) Η ελαστικότητα ζήτησης υπολογίστηκε $\epsilon_D = -1.56$. Οπότε:
    i. Μία αύξηση στην τιμή του αγαθού κατά 1% θα αυξήσει την ζητούμενη ποσότητα κατά 1.56%
    ii. Μία αύξηση στην τιμή του αγαθού κατά 1 μονάδα θα μειώσει την ζητούμενη ποσότητα κατά 1.56 μονάδες
    iii. Μία αύξηση στην τιμή του αγαθού κατά 1% θα μειώσει την ζητούμενη ποσότητα κατά 1.56%
    iv. Μία αύξηση στην ζητούμενη ποσότητα κατά 1 μονάδα θα μειώσει την τιμή του αγαθού κατά 156%
    v. Μία αύξηση στην τιμή του αγαθού κατά 1% θα μειώσει την ζητούμενη ποσότητα κατά 0.156%
    vi. Μία μείωση στην τιμή του αγαθού κατά 1% θα αυξήσει την ζητούμενη ποσότητα κατά 0.156%
    vii. Τίποτα από τα παραπάνω

7. (10 μονάδες) Έστω ότι οι τιμές στον χρόνο κινούνται σύμφωνα με την $p = Ae^{\alpha t}$. Επίσης, έστω ότι η ζήτηση δίνεται από την $Q = Bp^{-\epsilon}$ όπου $A, B, \epsilon > 0$ και $0 < \alpha < 1$. Χρησιμοποιήστε τον **αλυσωτό κανόνα** για να υπολογίσετε τη μεταβολή της ζήτησης στο χρόνο.

Απάντηση:

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{dQ}{dP}\frac{dP}{dt} = \left(-\epsilon Bp^{-\epsilon-1}\right)\left(\alpha Ae^{\alpha t}\right)\\ &= \left(-\epsilon B\left(Ae^{\alpha t}\right)^{-\epsilon-1}\right)\left(\alpha Ae^{\alpha t}\right)\\ &= -\epsilon\alpha BA^{-\epsilon}e^{-\alpha t(1+\epsilon)}e^{\alpha t}\\ &= -\epsilon\alpha BA^{-\epsilon}e^{-\alpha\cdot\epsilon\cdot t}\end{aligned}$$

Αν $A = 1, B = 1$, ο ρυθμός μεγέθυνσης του πληθωρισμού είναι σταθερός στον χρόνο και ίσος με 2.5%, δηλαδή $\alpha = 0.025$, και η ελαστικότητα ζήτησης είναι μοναδιαία, υπολογίστε τον ρυθμό μεγέθυνσης της ζήτησης στο χρόνο και σχολιάστε σύντομα.

Απάντηση:

Ο ρυθμός μεγέθυνσης μίας μεταβλητής $y(t)$ δίνεται από $\dfrac{y'(t)}{y}$. Άρα

$$\frac{dQ/dt}{Q} = \frac{-\alpha e^{-\alpha\cdot t}}{p^{-1}} = \frac{-\alpha e^{-\alpha\cdot t}}{e^{-\alpha\cdot t}} = -\alpha = -0.025$$

Άρα ο ρυθμός μεγέθυνσης της ζήτησης είναι ίσος με τον πληθωρισμό 2.5%

8. (5 μονάδες) Μία μονοπωλιακή επιχείρηση αντιμετωπίζει γραμμική συνάρτηση ζήτησης $Q = \alpha - \beta P$ με παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$. Υπολογίστε την ελαστικότητα των εσόδων της επιχείρησης ως προς την τιμή

Απάντηση:

$$TR = P(\alpha - \beta P) = \alpha P - \beta P^2$$

$$\epsilon_{TR} = \frac{dTR}{dP}\frac{P}{TR} = (\alpha - 2\beta P)\frac{P}{\alpha P - \beta P^2} = \frac{\alpha P - 2\beta P^2}{\alpha P - \beta P^2}$$

ή $\epsilon_{TR} = \frac{\alpha - 2\beta P}{\alpha - \beta P}$

και σχολιάστε την πρόταση ενός συναδέλφου ότι μία ποσοστιαία αύξηση στην τιμή οδηγεί πάντα σε αύξηση των εσόδων

Απάντηση:

$$\epsilon_{TR} > 0 \Rightarrow \frac{\alpha P - 2\beta P^2}{\alpha P - \beta P^2} > 0 \Rightarrow \alpha P - 2\beta P^2 > 0 \Rightarrow P < \frac{\alpha}{2\beta}$$

καθώς και την πρόταση (του συναδέλφου) ότι η ελαστικότητα των εσόδων στη συγκεκριμένη αγορά μπορεί να είναι ελαστική ανάλογα με τις παραμέτρους της γραμμικής ζήτησης.

Απάντηση:

$$\epsilon_{TR} > 1 \Rightarrow \frac{\alpha P - 2\beta P^2}{\alpha P - \beta P^2} > 1 \Rightarrow \alpha P - 2\beta P^2 > \alpha P - \beta P^2 \Rightarrow \beta P^2 < 0$$

Αδύνατον στην γραμμική συνάρτηση ζήτησης $Q = \alpha - \beta P$ να είναι το $\beta < 0$. Άρα, η συνάρτηση εσόδων δεν μπορεί να είναι ελαστική (ελαστικότητα ως προς την τιμή μεγαλύτερη της μονάδας).

9. (7 μονάδες) Υπολογίστε την προσέγγιση κατά Taylor τέταρτης τάξης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

Απάντηση:

$f(x) = \frac{1}{1-x}$	$f(0) = 1$
$f'(x) = (1-x)^{-2}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = 2(1-x)^{-3}$	$f''(0) = 2$
$f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$	$f'''(0) = 6$
$f^{(4)}(x) = 24(1-x)^{-5}$	$f^{(4)}(0) = 24$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{24}(x-x_0)^4 \Rightarrow$$

$$f(x) \approx 1 + 1(x-0) + \frac{2}{2}(x-0)^2 + \frac{6}{6}(x-0)^3 + \frac{24}{24}(x-0)^4 \Rightarrow$$

$$f(x) \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

10. (8 μονάδες) Για ποιές τιμές του x, γύρω από το $x_0 = 1$, είναι το σφάλμα προσέγγισης Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 11x - 1$ μικρότερο από 0.1;

Απάντηση:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(p)}{6}(x-x_0)^3$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 11 \quad , \quad f''(x) = -12x + 6 \quad , \quad f'''(x) = -12$$

Άρα το υπόλοιπο Lagrange δίνεται από

$$R_2 = \frac{-12}{6}(x-1)^3 = -2(x-1)^3$$

Θέλουμε

$$\left|-2(x-1)^3\right| < 0.1 \Rightarrow \left|(x-1)^3\right| < 0.05 \Rightarrow$$

$$|x-1| < (0.05)^{1/3} \Rightarrow |x-1| < 0.368403 \Rightarrow x \in (1 - 0.368403, 1 + 0.368403) \Rightarrow$$

$$x \in (0.631597, 1.368403)$$

11. (10 μονάδες) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{0.5}^{1} \dfrac{1}{1-2x}dx$

Απάντηση:

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1} \frac{1}{1-2x}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0.5^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{1-2x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0.5^+}\left(-\frac{\ln|1-2x|}{2}\bigg|_{\varepsilon}^{1}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0.5^+} \frac{1}{2}\left(\ln|1-2\varepsilon| - \ln|-1|\right) = \lim_{\varepsilon\to 0.5^+} \frac{1}{2}\left(\ln|1-2\varepsilon| - 0\right) = -\infty\end{aligned}$$

12. (15 μονάδες) Σας δίνονται οι συναρτήσεις

$$Q = \sqrt{P} \quad , \quad Q = \frac{1}{\sqrt{P}}$$

με πεδία ορισμού τα $P \in [0, +\infty)$ και $P \in (0, 2]$ αντίστοιχα. Υπολογίστε το κοινωνικό πλεόνασμα στην τιμή ισορροπίας.

Απάντηση:

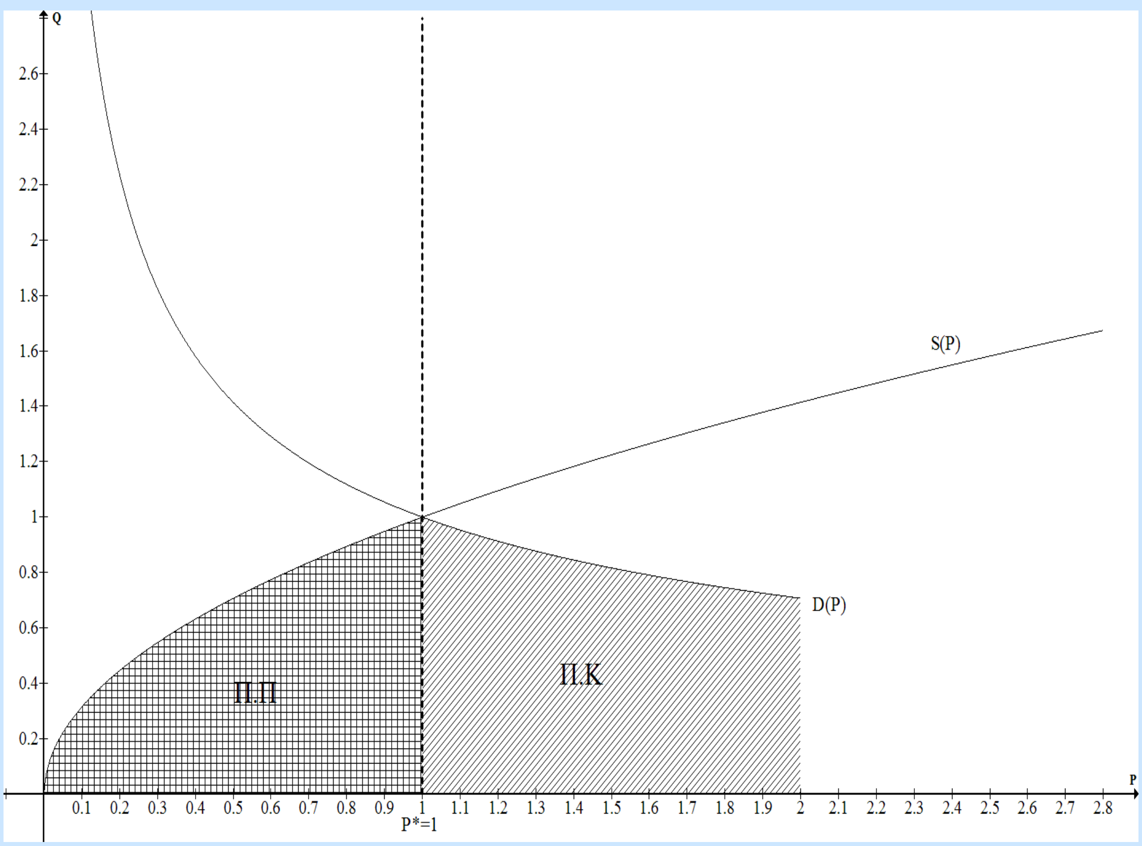
$$\sqrt{P} = \frac{1}{\sqrt{P}} \Rightarrow P^* = 1 \text{ άρα και } Q^* = 1$$

$$\Pi.K = \int_{P^*}^{P_U} D(P)dP = \int_{P^*}^{P_U} P^{-\frac{1}{2}}dP = \int_{1}^{2} P^{-\frac{1}{2}}dP = 2P^{\frac{1}{2}}\Big|_1^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\Pi.\Pi = \int_{0}^{P^*} S(P)dP = \int_{0}^{P^*} \sqrt{P}dP = \int_{0}^{1} \sqrt{P}dP = \frac{2}{3}P^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$K.\Pi = \Pi.K + \Pi.\Pi = 2\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{2}{3} \simeq 1.495$$

Το παρακάτω γράφημα ΔΕΝ ήταν απαραίτητο να γίνει



13. (25 μονάδες) Μία επιχείρηση, σε καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού, έχει συνάρτηση κόστους

$$TC(Q) = e^{\gamma Q}$$

με $\gamma > 0$ και $P > \gamma$. Προβείτε σε βελτιστοποίηση της συνάρτηση κέρδους ως προς την ποσότητα παραγωγής. Χαρακτηρίστε το βέλτιστο σημείο. Δώστε τη συνάρτηση προσφοράς της επιχείρησης

Πρόβλημα προς επίλυση

Απάντηση:

$$\max_{Q} \Pi = TR - TC = P \cdot Q - e^{\gamma Q}$$

Συνθήκη Πρώτης Τάξης

Απάντηση:

$$\Pi' = 0 \Rightarrow P - \gamma e^{\gamma Q} = 0 \Rightarrow Q^* = \frac{\ln(P/\gamma)}{\gamma}$$

Συνθήκη Δεύτερης Τάξης και χαρακτηρισμός

Απάντηση:

$$\Pi''|_{Q=Q^*} = -\gamma^2 e^{\gamma Q^*} < 0 \ \ , \ \ \forall Q \geq 0$$

Άρα έχουμε ολικό και μοναδικό μέγιστο για τη συνάρτηση κέρδους με την επιλογή παραγωγής $Q^* = \frac{\ln(P/\gamma)}{\gamma}$

Συνάρτηση προσφοράς

Απάντηση:

Επειδή η συνάρτηση οριακού κόστους είναι μονότονη (γνησίως αύξουσα αφού $MC' > 0$ και $MC'' > 0$ $\forall Q > 0$) έχουμε

$$S(P) = \begin{cases} 0 & , \quad P < MC(0) \\ MC^{-1}(P) & , \quad P \geq MC(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$S(P) = \begin{cases} 0 & , \quad P < \gamma \\ \frac{\ln(P/\gamma)}{\gamma} & , \quad P \geq \gamma \end{cases}$$