
Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Εξεταστική περίοδος Ιαν-Φεβ 2012 (2-Φεβ-2012) 9:00-11:00
Μάθημα: «Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι» ΟΙΚΟΝ 111
Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Ιωάννης Α. Βενέτης
Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες, Απαντήστε σε ΟΛΑ τα θέματα.
Τμήμα Α
Παρακαλώ παραδώστε τα θέματα μαζί με το γραπτό σας

ΟΝΟΜΑ:

ΕΠΩΝΥΜΟ:

ΑΜ:

Υπογραφή:

ΘΕΜΑ 1 (10%)

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια ($k > 0$)

$$\lim_{t\to1}\left(\tfrac{t}{t-1}-\tfrac{1}{\ln t}\right)$$

Απάντηση

Δύο φορές L'Hospital

$$\begin{aligned}
\frac{t}{t-1}-\frac{1}{\ln t} &= \frac{t\ln t-t+1}{(t-1)\ln t}\\
\frac{(t\ln t-t+1)'}{((t-1)\ln t)'} &= \frac{\ln t+t\frac{1}{t}-1}{\ln t+\frac{t-1}{t}}=\frac{\ln t+1-1}{\frac{t\ln t+t-1}{t}}=\frac{\ln t}{\frac{t\ln t+t-1}{t}}=\frac{t\ln t}{t\ln t+t-1}\\
\frac{(t\ln t)'}{(t\ln t+t-1)'} &= \frac{\ln t+1}{\ln t+1+1}=\frac{\ln t+1}{\ln t+2}\\
\lim_{t\to1}\left(\frac{t}{t-1}-\frac{1}{\ln t}\right) &= ...=\lim_{t\to1}\left(\frac{\ln t+1}{\ln t+2}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2 (10%)

Αν $p(t) =\frac{e^{\beta t}}{t}$ δίνει την κίνηση των τιμών στον χρόνο και $\beta > 0$,

- δώστε τον πληθωρισμό $\pi(t) = \frac{dp(t)/dt}{p(t)}$ ως συνάρτηση του χρόνου.
- Υπολογίστε τη μεταβολή του πληθωρισμού στο χρόνο.

Απάντηση

$$\begin{aligned}
\frac{dp(t)}{dt} &= \frac{\beta e^{\beta t}t-e^{\beta t}}{t^2}=\frac{(\beta t-1)\,e^{\beta t}}{t^2}\\
\pi(t) &= \frac{dp(t)/dt}{p(t)}=\frac{\frac{(\beta t-1)e^{\beta t}}{t^2}}{\frac{e^{\beta t}}{t}}=\frac{(\beta t-1)\,e^{\beta t}t}{t^2e^{\beta t}}=\frac{(\beta t-1)}{t}=\beta-\frac{1}{t}\\
\frac{d\pi(t)}{dt} &= \frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3 (10%)

Υπολογίστε **με τον αλυσωτό κανόνα** τη μεταβολή της ζήτησης του αγαθού A στον χρόνο, $\frac{dQ(t)}{dt}$, όταν γνωρίζετε ότι (α) η ζήτηση του αγαθού A εξαρτάται από την τιμή του, $Q = \alpha - \beta P_A$, (β) η τιμή του αγαθού P_A είναι διασυνδεδεμένη με την τιμή ενός ανταγωνιστικού αγαθού P_B με βάση την $P_A = \gamma + \delta P_B$ ενώ (γ) η τιμή του ανταγωνιστικού αγαθού μεταβάλλεται στο χρόνο σύμφωνα με την $P_B = k + e^{-mt}$. Για τις σταθερές ισχύει ότι $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k, m, > 0$.

Απάντηση

Απλή αντικατάσταση δεν υπολογίζεται ως απάντηση. Είχε ξεκαθαριστεί στις διαλέξεις ότι όταν αναφέρεται ρητά στην άσκηση ο αλυσωτός κανόνας τότε τον εφαρμόζουμε αναλυτικά ώστε να δει ο διδάσκων την κατανόησή του από τον φοιτητή/τρια. Άρα η σωστή απάντηση είναι:

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= \frac{dQ(t)}{dP_A} \times \frac{dP_A}{dP_B} \times \frac{dP_B}{dt} \\ &= (-\beta)\,\delta\left(-me^{-mt}\right) = \beta\delta m e^{-mt}\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4 (15%)

Έστω η συνάρτηση παραγωγής $Q = 8L - L^2$ μίας επιχείρησης σε καθεστώς πλήρους ανταγωνισμού, όπου Q το παραγόμενο προϊόν και L η εργασία.

- Μεγιστοποιείστε (συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης) τη συνάρτηση κέρδους ώστε να υπολογίσετε τη ζήτηση εργασίας. w συμβολίζει μισθό ή κόστος εργασίας και p τη τιμή πώλησης του προϊόντος. Τυχόν ακραία σημεία δεν μας ενδιαφέρουν.

- Συμφωνείτε ότι η εταιρεία δεν προσλαμβάνει αν ο πραγματικός μισθός υπερβαίνει τα 8 ευρώ;

- Υπολογίστε τη σημειακή ελαστικότητα ζήτησης εργασίας ε_{L,w^*} ως προς τον πραγματικό μισθό $w^* = \frac{w}{p}$ και δείξτε ότι εξαρτάται αντιστρόφως ανάλογα από το επίπεδο του πραγματικού μισθού ($\frac{d\varepsilon_{L,w^*}}{dw^*} = \frac{\text{σταθερά}>0}{\text{θετική συνάρτηση του } w^*}$)

- Έστω ότι ο πραγματικός μισθός $w^* = 4$. Πόσο τοις εκατό μειώνεται (ή αυξάνεται;) η ζήτηση εργασίας από μία αύξηση του πραγματικού μισθού κατά 1% ;

Απάντηση

Φτάχνουμε τη συνάρτηση κέρδους ως συνάρτηση της εργασίας, αφού αυτό ζητά η άσκηση.

ΣΠΤ

$$\begin{aligned}
\Pi &= 8pL - pL^2 - wL \\
\Pi' &= 8p - 2pL - w = 0 \Rightarrow \\
L^* &= 4 - \frac{1}{2}\frac{w}{p} = 4 - \frac{1}{2}w^*
\end{aligned}$$

ΣΔΤ

$$\Pi'' = -2p < 0$$

Συμφωνώ αφού

$$L^* > 0 \Rightarrow 4 - \frac{1}{2}w^* > 0 \Rightarrow w^* < 8$$

Ελαστικότητα

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{L,w^*} &= \frac{dL^*}{dw^*}\frac{L^*}{w^*} = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4 - \frac{1}{2}w^*}{w^*} = \frac{1}{4} - \frac{2}{w^*} \\
\frac{d\varepsilon_{L,w^*}}{dw^*} &= \frac{2}{(w^*)^2}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{L,w^*} = -\frac{1}{4} \text{ άρα μειώνεται } 0.25\%$$

ΘΕΜΑ 5 (10%)

Προσεγγίστε μέσω Taylor δεύτερης τάξης τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ στο x_0= 1. Απλοποιήστε κατάλληλα την πολυωνυμική έκφραση. Υπολογίστε και το υπόλοιπο.

Απάντηση

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$
$f(x_0) = e$, $f'(x_0) = e$, $f''(x_0) = e$, $f'''(p) = e^p$
$f(x) = P_2 + R_2$
$P_2 = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 = \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2}$
$R_2 = \frac{e^p}{6}(x-1)^3$ όπου p μεταξύ x και 1.

ΘΕΜΑ 6 (15%)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_1^e \tfrac{\ln(x)}{x} dx \quad , \quad \int x \ln x dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} 5e^{-x} dx$$

Απάντηση

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = ... = \frac{1}{2} \quad \text{όπου } y = \ln(x) \text{ και } dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} 5e^{-x}dx &= \lim_{b\to+\infty}\left[\int_0^{b} 5e^{-x}dx\right] \\
\int_0^{b} 5e^{-x}dx &= -5e^{-x}\Big|_0^b = -5e^{-b}+5 \\
\lim_{b\to+\infty}\left(-5e^{-b}+5\right) &= 5
\end{aligned}$$

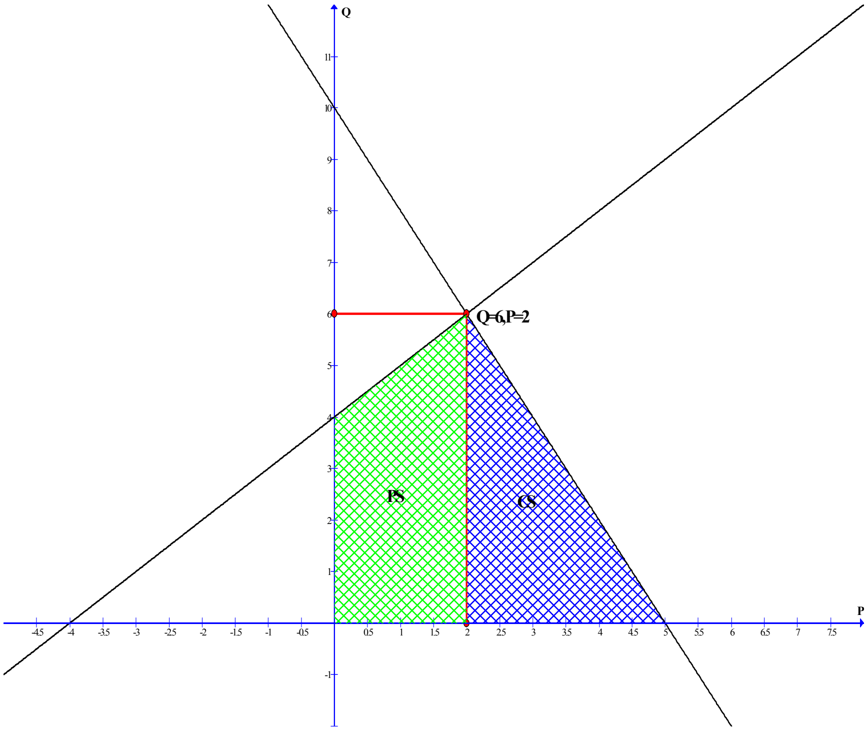
ΘΕΜΑ 7 (15%)

Έστω ότι σας δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς

$$Q = 10 - 2P \quad , \quad Q = 4 + P$$

Βρείτε το πλεόνασμα του καταναλωτή, CS, και το πλεόνασμα του παραγωγού, PS. Δώστε και διαγραμματική απεικόνιση της λύσης σας.

Απάντηση (είτε)
$P^* = 2$, $Q^* = 6$

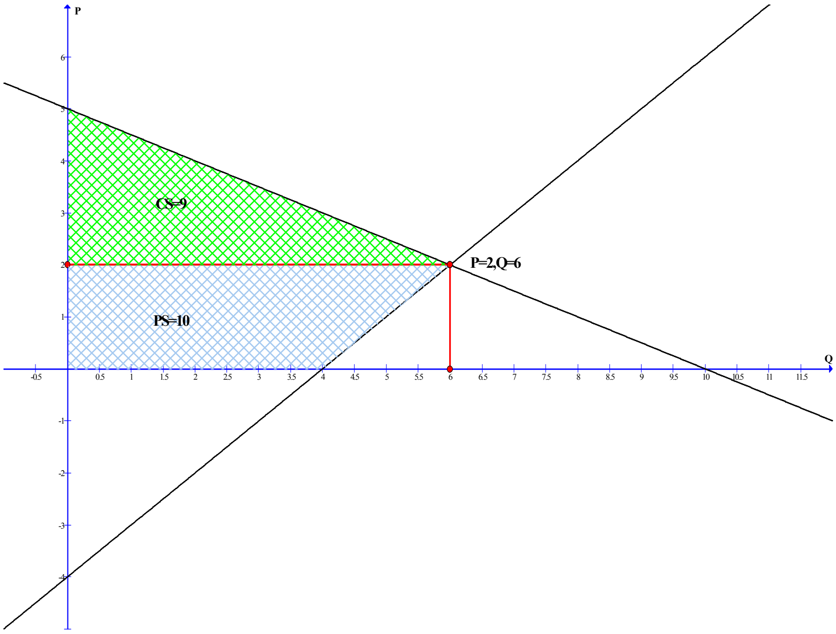


$$10 - 2P = 4 + P \Rightarrow P^* = 2 \text{ και } Q^* = 6$$

$$CS = \int_2^5 (10 - 2P)\, dP = 9$$

$$PS = \int_0^2 (4 + P)\, dP = 10$$

(είτε όπως παρακάτω)



$$CS = \int_0^6 \left(5 - \tfrac{1}{2}Q\right) dQ - (6)(2) = 21 - 12 = 9$$

$$PS = (6)(2) - \int_4^6 (-4 + Q)\, dQ = 12 - 2 = 10$$

ΘΕΜΑ 8 (15%)

Βρείτε αν συγκλίνουν οι παρακάτω δύο σειρές ($\varepsilon > 0$)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!} \quad , \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$$

Απάντηση

Λόγω παραγοντικού χρησιμοποιούμε τον έλεγχο λογου

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^n}{n^n}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| = e > 1 \quad \textbf{δεν συγκλίνει} \end{aligned}$$

Αρμονική σειρά ($\varepsilon > 0$). Χρησιμοποιούμε έλεγχο ολοκληρώματος

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} dx &= \int_1^{+\infty} x^{-(1+\varepsilon)} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} x^{-(1+\varepsilon)} dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{x^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \Bigg|_1^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{\varepsilon b^{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} < +\infty \quad \forall\, \varepsilon > 0
\end{aligned}
$$

Άρα **συγκλίνει**.