ΘΕΜΑ 1 (20%)

Υπολογίστε το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 1

Επειδή

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}=0^0$$

λογαριθμίζουμε και βρίσκουμε το όριο της λογαριθμικής συνάρτησης. Έστω

$$y=\left[\ln(x-2)^{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\right]=\ln\left(\frac{x}{2}\right)\ln(x-2)$$

Τότε

$$\lim_{x\to 2^+}y=0\cdot(-\infty)$$

Άρα μετατρέπω το γινόμενο σε κλάσμα (με τη συνάρτηση που μηδενίζεται οριακά να τοποθετείται στον παρονομαστή)

$$\lim_{x\to 2^+}y=\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{\ln x-\ln 2}}$$

Κανόνας L'hospital (παραγώγιση αριθμητή και παρονομαστή)

$$\frac{\left(\frac{1}{x-2}\right)'}{\left(-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x-\ln 2)^2}\right)'}=\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{x(\ln x-\ln 2)^2}}=-\frac{x(\ln x-\ln 2)^2}{x-2}$$

Επειδή καταλήγουμε πάλι σε απροσδιοριστία

$$\lim_{x\to 2^+}\left(-\frac{x(\ln x-\ln 2)^2}{x-2}\right)=\frac{0}{0}$$

εφαρμόζoyme ξανά τον κανόνα L'hospital

$$\begin{aligned}-\frac{\left(x(\ln x-\ln 2)^2\right)'}{(x-2)'} &= -\frac{(\ln x-\ln 2)^2+2x(\ln x-\ln 2)\frac{1}{x}}{1}\\ &= -(\ln x-\ln 2)^2-2\ln x+2\ln 2\end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2^+} \left(-\left(\ln x - \ln 2\right)^2 - 2\ln x + 2\ln 2\right) = 0$$

Άρα

$$\lim_{x\to 2^+} (x-2)^{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 2^+} e^y = e^0 = 1$$

ΘΕΜΑ 2 (30%)

- Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor τρίτης τάξης της

$$f(x) = \ln x$$

γύρω από το σημείο $x_0 = 1$.

- Δείξτε ότι το σφάλμα προσέγγισης για την τιμή

$$f(1.5) = \ln(1.5)$$

είναι μικρότερο από 0.02

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2

Υπολογίζουμε

$$\begin{array}{cc} f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -x^{-2} & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 2x^{-3} & f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = 6x^{-4} & \end{array}$$

Άρα η τρίτης τάξης προσέγγιση γύρω από το σημείο $x_0 = 1$ δίνεται από

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

δηλαδή

$$0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

και

$$f(x) \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

Το σφάλμα προσέγγισης για την τιμή 1.5 δίνεται από

$$\left| \frac{f^{(4)}(p)}{4!} (1.5-1)^4 \right|$$

όπου $1 < p < 1.5$. Άρα

$$\left| \frac{6p^{-4}}{24} \frac{1}{2^4} \right| = \left| p^{-4} \frac{1}{64} \right| = \left| p^{-4} \right| \cdot \frac{1}{64}$$

Αφού $1 < p < 1.5$ τότε $|p^{-4}| < 1$ άρα το σφάλμα προσέγγισης είναι μικρότερο από $\frac{1}{64} = 0.015625$ δηλαδή μικρότερο από 0.02

ΘΕΜΑ 3 (25%)

Μία επιχείρηση αντιμετωπίζει συνάρτηση ζήτησης της μορφής

$$q = \alpha e^{-\beta p}$$

με παραμέτρους $\alpha, \beta > 0$.

- Να προσδιοριστεί η τιμή που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα TR και να υπολογιστούν τα μέγιστα έσοδα. Βεβαιωθείτε ότι πρόκειται για μέγιστο.
- Υπολογίστε την ελαστικότητα της συνάρτησης ζήτησης. Πόσο μεταβάλλεται η ζήτηση αν μεταβληθεί η τιμή κατά 5% από το επίπεδο μεγιστοποίησης των εσόδων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3

Η συνάρτηση εσόδων (ως προς την τιμή αφού θα μεγιστοποιήσουμε ως προς την τιμή) δίνεται από

$$TR = pq = p\alpha e^{-\beta p}$$

Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} TR' &= 0 \Rightarrow \alpha e^{-\beta p} - p\alpha\beta e^{-\beta p} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha e^{-\beta p} = p\alpha\beta e^{-\beta p} \Rightarrow p^* = \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Σ.Δ.Τ

$$\begin{aligned} TR'' &= -\beta\alpha e^{-\beta p} - \beta\left(\alpha e^{-\beta p} - p\alpha\beta e^{-\beta p}\right) \\ &= -\beta\alpha e^{-\beta p} - \alpha\beta e^{-\beta p} + p\alpha\beta^2 e^{-\beta p} \\ &= -2\alpha\beta e^{-\beta p} + p\alpha\beta^2 e^{-\beta p} \end{aligned}$$

οπότε

$$TR''\left(\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{2\alpha\beta}{e} + \frac{\alpha\beta}{e} = -\frac{\alpha\beta}{e} < 0$$

το οποίο είναι αρνητικό αφού $\alpha, \beta, e > 0$. Άρα στο στάσιμο σημείο $p^* = \frac{1}{\beta}$ έχουμε **τοπικό μέγιστο** της συνάρτησης εσόδων

Η ελαστικότητα ζήτησης δίνεται από

$$\epsilon\left(p\right) = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = -\alpha\beta e^{-\beta p}\frac{p}{\alpha e^{-\beta p}} = -\beta p$$

Στο επίπεδο μεγιστοποίησης των εσόδων έχουμε $p^* = \frac{1}{\beta}$ άρα η ελασικότητα είναι **μοναδιαία** για τη συγκεκριμένη τιμή $\epsilon\left(\frac{1}{\beta}\right) = -1$. Οπότε μία αύξηση της τιμής κατά 5% μειώνει τη ζήτηση κατά 5%.

ΘΕΜΑ 4 (25%)

Μία επιχείρηση αντιμετωπίζει συνάρτηση συνολικών εσόδων της μορφής

$$TR(q) = 40q - 4q^2$$

ενώ το οριακό κόστος παραγωγής είναι ίσο με $MC(q) = 4q + 4$. Έστω ότι η κυβέρνηση επιβάλλει φόρο αξίας t ευρώ ανά μονάδα προϊόντος που πουλήθηκε στην αγορά.

- Προσδιορίστε (και βεβαιώστε) το ύψος του φόρου που πρέπει να θέσει η κυβέρνηση ώστε να μεγιστοποιήσει τα φορολογικά της έσοδα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4

Η συνάρτηση φορολογίας της κυβέρνησης δίνεται απλώς από $T\left(t\right) = tq^*$ όπου q^* είναι η τελική ποσότητα του προϊόντος που διατέθηκε στην αγορά. Η συγκεκριμένη ποσότητα εναπόκειται στην απόφαση της επιχείρησης, η οποία θα παράγει στο σημείο που μεγιστοποιούνται τα κέρδη της και θα εξαρτάται από το ύψος του φορολογικού συντελεστή δηλαδή $q^* = q^*(t)$.

Προβαίνουμε λοιπόν στη μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους (η συνάρτηση κόστους προκύπτει από την απλή ολοκλήρωση του οριακού κόστους με c την σταθερά της ολοκλήρωσης)

$$\begin{aligned}\Pi &= TR - TC \\ &= \underbrace{40q - 4q^2}_{\text{έσοδα}} - \underbrace{\left(2q^2 + 4q + c\right)}_{\text{κόστος}} - \underbrace{tq}_{\text{επιπλέον κόστος λόγω του φόρου}} \\ &= -6q^2 + (36 - t)q - c\end{aligned}$$

Σ.Π.Τ

$$\Pi' = 0 \Rightarrow -12q + (36 - t) = 0 \Rightarrow q^* = \frac{36 - t}{12}$$

Σ.Δ.Τ

$$\Pi'' = -12 < 0$$

άρα όντως η ποσότητα που μεγιστοποιεί τοπικά τα κέρδη δίνεται από $q^* = \frac{36-t}{12}$.

Οπότε η συνάρτηση φόρου για την κυβέρνηση δίνεται από

$$T(t) = t\left(\frac{36 - t}{12}\right) = \frac{36t}{12} - \frac{t^2}{12}$$

και

Σ.Π.Τ

$$T(t)' = 0 \Rightarrow \frac{36}{12} - \frac{2t}{12} = 0 \Rightarrow t^* = 18$$

Σ.Δ.Τ

$$\Pi'' = -\frac{2}{12} < 0$$

άρα το ύψος του φόρου που μεγιστοποιεί τα έσοδα είναι $t^* = 18$ €.