ΘΕΜΑ 1 (15%)

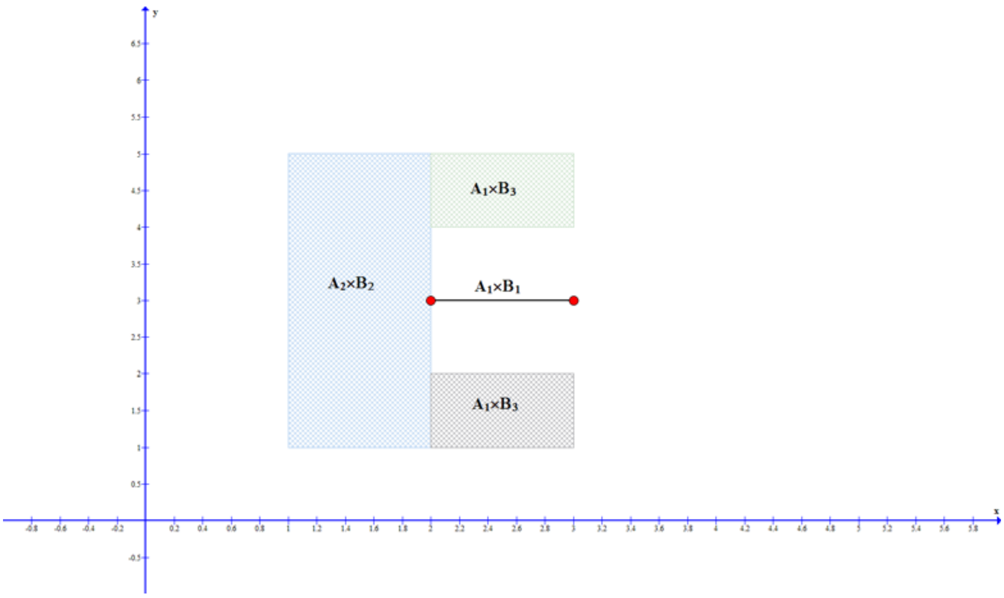
Για τα σύνολα

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x : x \in [2,3]\} \\ A_2 &= \{x : x \in (1,2)\} \\ B_1 &= \{3\} \\ B_2 &= \{y : y \in (1,5)\} \\ B_3 &= \{y : y \in (1,2) \cup (4,5)\} \end{aligned}$$

(i) Υπολογίστε τα Καρτεσιανά γινόμενα $A_1 \times B_1$, $A_2 \times B_2$, $A_1 \times B_3$ και σχεδιάστε τα γινόμενα **σε ένα** γράφημα στο $\mathbb{R}^2$ (σημειώστε με σαφήνεια πάνω στο γράφημα τα επιμέρους καρτεσιανά γινόμενα που το απαρτίζουν).

Απάντηση

$$\begin{aligned} A_1 \times B_1 &= \{(x,y) : x \in [2,3] \wedge y \in \{3\}\} \\ A_2 \times B_2 &= \{(x,y) : x \in (1,2) \wedge y \in (1,5)\} \\ A_1 \times B_3 &= \{(x,y) : x \in [2,3] \wedge y \in (1,2) \cup (4,5)\} \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ 2 (20%)

(i) (10%) Μία νέα εταιρεία τεχνολογίας επιδιώκει να μπει στην αγορά tablet γνωρίζοντας ότι θα αντιμετωπίσει τη συνάρτηση ζήτησης

$$Q = 4000 - 250P^2$$

Υπολογίστε την ελαστικότητα ζήτησης ϵ_d. Για ποιό επίπεδο τιμής είναι η ζήτηση μοναδιαία, ελαστική, ανελαστική; (Εξηγείστε). Μέσω της ϵ_d, υπολογίστε την αύξηση στη ζήτηση από μία μείωση της τιμής κατά 5.5% από τα επίπεδα $P = 2$ ή $P = 2.3094$ ή $P = 3$.

(ii) (10%) Αρχικός βραχυχρόνιος στόχος της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση των εσόδων. Προβείτε (και βεβαιώστε) σε μεγιστοποίηση της συνάρτησης εσόδων ως προς την τιμή. Τι παρατηρείτε; Έστω δύο σενάρια για την τιμή που συναντάει η εταιρεία στην αγορά $P = 2$ ή $P = 3$. Πότε συμφέρει να αυξήσουμε την τιμή; (με βάση το βραχυχρόνιο στόχο της βελτιστοποίησης των εσόδων της νεοσύστατης εταιρείας)

Απάντηση

(i)

$$\epsilon_d = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -500P \cdot \frac{P}{4000 - 250P^2} = -\frac{500P^2}{4000 - 250P^2}$$

$$\epsilon_d = -1 \Rightarrow -\frac{500P^2}{4000 - 250P^2} = -1 \Rightarrow 750P^2 = 4000 \Rightarrow \begin{cases} P_1^* = 2.3094 \\ \\ P_2^* = -2.3094 \end{cases}$$

Απορρίπτουμε την αρνητική τιμή P_2^*. Άρα όταν η τιμή είναι $P_1^* = 2.3094$ η ελαστικότητα ζήτησης είναι μοναδιαία, δηλαδή $\epsilon_d = -1$ ή $|\epsilon_d| = 1$.

Άρα όταν η τιμή είναι μικρότερη από $P_1^* = 2.3094$ η αγορά είναι ανελαστική (αύξηση της τιμής κατά 1% οδηγεί σε μικρότερη ποσοστιαία μείωση της ζήτησης) ενώ όταν η τιμή είναι μεγαλύτερη από $P_1^* = 2.3094$ η αγορά είναι ελαστική ("ευαίσθητη") αφού μία αύξηση της τιμής κατά 1% οδηγεί σε μεγαλύτερη του 1% ποσοστιαία μείωση της ζήτησης.

Αυτό σημαίνει ότι για $P = 2$ η ζήτηση είναι ανελαστική

$\epsilon_d\,(2) = -\frac{500(2)^2}{4000-250(2)^2} = -0.66667$ άρα $5.5 \cdot \epsilon_d\,(2) = 5.5 \cdot (-0.66667) = -3.6667\%$ αύξηση της τιμής κατά 5.5% οδηγεί σε μείωση της ζήτησης κατά 3.6667%

για $P = 2.3094$ η ζήτηση παρουσιάζει (όπως βρήκαμε) μοναδιαία ελαστικότητα

$\epsilon_d\,(2.3094) = -\frac{500(2.3094)^2}{4000-250(2.3094)^2} = -1$ άρα $5.5 \cdot \epsilon_d\,(2.3094) = 5.5 \cdot (-1) = -5.5\%$ αύξηση της τιμής κατά 5.5% οδηγεί σε μείωση της ζήτησης κατά 5.5%

ενώ για $P = 3$ η ζήτηση είναι ελαστική

$\epsilon_d\,(3) = -\frac{500(3)^2}{4000-250(3)^2} = -2.5714$ άρα $5.5 \cdot \epsilon_d\,(3) = 5.5 \cdot (-2.5714) = -14.143\%$ αύξηση της τιμής κατά 5.5% οδηγεί σε μείωση της ζήτησης κατά 14.143%

(ii)

$$\max_P TR(P) = P \cdot \left(4000 - 250P^2\right)$$

Σ.Π.Τ

$$\frac{dTR}{dP} = 0 \Rightarrow 4000 - 750P^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_1^* = 2.3094 \\ \\ P_2^* = -2.3094 \end{cases}$$

Σ.Δ.Τ

$$\frac{d^2TR}{dP^2} = -1500P < 0 \text{ γιά } P = P_1^*$$

Άρα τα έσοδα μεγιστοποιούνται όταν η τιμή είναι τέτοια που $\epsilon_d = -1$. Μόνο όταν η τιμή είναι μικρότερη της τιμής που δίνει μοναδιαία ελαστικότητα συμφέρει να αυξήσουμε την τιμή, δηλαδή όταν $P = 2$, αφού τότε τα έσοδα θα αυξηθούν (μικρότερη ποσοστιαία μείωση της ζήτησης).

ΘΕΜΑ 3 (25%)

Ένα πάγιο περιουσιακό στοιχείο έχει συνάρτηση αξίας στον χρόνο

$$A(t) = 1,000,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{t}} \quad \text{(σε €)},\ t : \text{μετρά έτη}$$

Το ασφαλές επιτόκιο που μπορούμε να επενδύσουμε (κόστος διατήρησης του περιουσιακού στοιχείου ή κόστος ευκαιρίας) είναι $r \in (0,1)$ ενώ λειτουργούμε σε αγορές με συνεχή ανατοκισμό. Η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου δίνεται λοιπόν από

$$P_A(t) = A(t)e^{-rt}$$

(i) Βρείτε (και βεβαιώστε) σε πόσα χρόνια μεγιστοποιείται $P_A(t)$ η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου (υπολογίστε τον κατάλληλο χρόνο πώλησης του περιουσιακού στοιχείου). Σε πόσα έτη θα πουλούσατε αν το ασφαλές επιτόκιο ήταν 8.5%; **Υπόδειξη:** γιά $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$, $\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \ln \alpha \cdot \alpha^{f(x)} \cdot f(x)'$

Απάντηση

$$\max_t P_A(t)$$

Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} \frac{dP_A(t)}{dt} &= 0 \Rightarrow A'(t)e^{-rt} - rA(t)e^{-rt} = 0 \\ &\Rightarrow A'(t) = rA(t) \end{aligned}$$

Επειδή

$$A'(t) = 1,000,000 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_A(t)}{dt} &= 0 \Rightarrow \\
1,000,000 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} &= r \cdot 1,000,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{t}} \\
&\Rightarrow \\
\ln\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} &= r \Rightarrow \\
t^* &= \left[\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2r}\right]^2
\end{aligned}
$$

Σ.Δ.Τ (Δεν ήταν αναγκαίο για βαθμολόγηση. Αρκεί η περιγραφή της συνθήκης δεύτερης τάξης)

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2P_A(t)}{dt^2} &= A''(t)e^{-rt} - rA'(t)e^{-rt} - rA'(t)e^{-rt} + r^2A(t)e^{-rt} \\
&= A''(t)e^{-rt} - 2rA'(t)e^{-rt} + r^2A(t)e^{-rt}
\end{aligned}
$$

Τώρα υπάρχουν πολλές εναλλακτικές διαδρομές για να δείξετε εύκολα ότι

$$
\left.\frac{d^2P_A(t)}{dt^2}\right|_{t=t^*} < 0
$$

Αν επιχειρήσετε απευθείας δεύτερη παραγώγιση της $P_A(t)$ θα δυσκολευτείτε (αλγεβρικά) εξαιρετικά.

Καλύτερα να προχωρήσετε ως εξής:

Επειδή

$$
\frac{dP_A(t)}{dt} = A'(t)e^{-rt} - rA(t)e^{-rt} = \frac{A'(t)}{A(t)}P_A(t) - rP_A(t) = P_A(t)\left[\frac{A'(t)}{A(t)} - r\right]
$$

έχουμε

$$
\frac{d^2P_A(t)}{dt^2} = P'_A(t)\left[\frac{A'(t)}{A(t)} - r\right] + P_A(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{A'(t)}{A(t)}\right]
$$

Πρώτον, στο στάσιμο σημείο, το t^*, σύμφωνα με τις Σ.Π.Τ, ικανοποιεί την $P'_A(t^*) = 0$ και δεύτερον

$$
\frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{t}}
$$

οπότε

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{A'(t)}{A(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{t}}\right] = -\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{4}t^{-\frac{3}{2}} < 0 \text{ , } \forall t > 0
$$

Άρα

$$\left.\frac{d^2P_A(t)}{dt^2}\right|_{t=t^*} = \underbrace{P_A(t^*)}_{(+)}\left(-\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{4}t^{*-\frac{3}{2}}\right) < 0$$

ΘΕΜΑ 4 (20%)

Μία πλήρως ανταγωνιστική επιχείρηση έχει οριακό κόστος παραγωγής

$$MC\,(Q) = -\alpha Q + \beta\sqrt{Q} \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

ενώ το κόστος παραγωγής μίας μονάδας είναι γνωστό και ίσο με 500€.

(i) Προβείτε σε ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής $TC(Q)$.

(ii) Για ποιές τιμές των παραμέτρων α, β είναι καλά ορισμένο το πρόβλημα;

Απάντηση

(i)

$$\begin{aligned} TC(Q) &= \int MC\,(Q)\,dQ = \int\left[-\alpha Q + \beta\sqrt{Q}\right]dQ \\ &= -\alpha\int QdQ + \beta\int Q^{\frac{1}{2}}dQ \\ &= -\frac{\alpha}{2}Q^2 + \frac{2\beta}{3}Q^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$TC(1) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2\beta}{3} + C = 500 \Rightarrow C = 500 + \frac{\alpha}{2} - \frac{2\beta}{3}$$

$$\min_Q TC(Q) = \min_Q\left(-\frac{\alpha}{2}Q^2 + \frac{2\beta}{3}Q^{\frac{3}{2}} + C\right)$$

Κ.Π.Π

$$\begin{aligned} TC' &= 0 \Rightarrow -\alpha Q + \beta Q^{\frac{1}{2}} = 0 \\ &\Rightarrow \beta Q^{\frac{1}{2}} = \alpha Q \Rightarrow Q^{\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{\alpha} \\ &\Rightarrow Q^* = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Στάσιμο σημείο το $Q^* = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ (και $TC(Q^*)$. (Άρα το α δεν μπορεί να είναι μηδέν, $\alpha \neq 0$).

Κ.Δ.Π

$$TC'' = -\alpha + \frac{\beta}{2} Q^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} TC(Q^*)'' &= -\alpha + \frac{\beta}{2} Q^{*-\frac{1}{2}} \\ &= -\alpha + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\alpha + \frac{\beta}{2} \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος στο στάσιμο σημείο είναι θετική (ελάχιστο συνολικό κόστος στο Q^*) όταν $\alpha < 0$.

(ii) Επειδή $TC(Q^*)'' > 0$ όταν $\alpha < 0$, το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο μόνο για αρνητικές τιμές του α.

ΘΕΜΑ 5 (20%)

Υπολογίστε το πλεόνασμα του καταναλωτή όταν η συνάρτηση ζήτησης είναι

$$Q = a - \ln P$$

και η (αντίστροφη) συνάρτηση προσφοράς

$$P = e^{\gamma Q}$$

με $a, \gamma > 0$. Μπορείτε να δώσετε ένα (προσεγγιστικό) γράφημα της απάντησής σας;

Απάντηση

$$\ln P = \gamma Q \Rightarrow Q = \frac{1}{\gamma} \ln P$$

$$a - \ln P = \frac{1}{\gamma} \ln P \Rightarrow P^* = e^{\frac{\gamma a}{\gamma+1}}$$

Επίσης

$$0 = a - \ln P \Rightarrow P_U = e^a$$

Άρα το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι

$$\begin{aligned} CS &= \int_{P^*}^{P_u} (a - \ln P)\, dP \\ &= \int_{P^*}^{P_u} a dP - \int_{P^*}^{P_u} \ln P dP \\ &= aP|_{P^*}^{P_U} - (P \ln P - P)|_{P^*}^{P_U} \\ &= aP_U - aP^* - (P_U \ln P_U - P_U - P^* \ln P^* + P^*) \\ &= ... \end{aligned}$$

μέχρι εδώ αρκεί