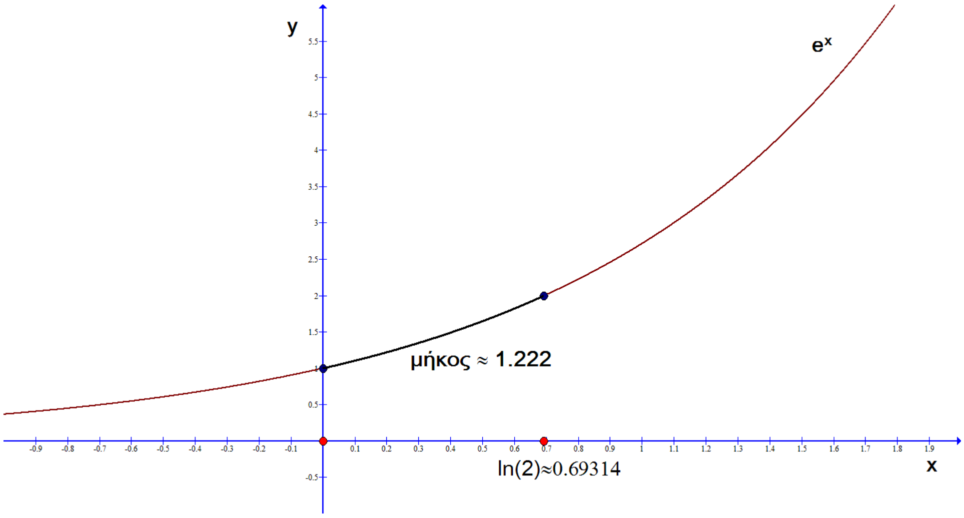
Διάλεξη 9 επιπλέον υλικό

1 Μήκος τόξου καμπύλης - άσκηση

Υπολογίστε το μήκος τόξου καμπύλης για την $f(x) = e^x$ από το 0 μέχρι το $\ln 2$. Το παρακάτω γράφημα επισημαίνει την ζητούμενη ποσότητα (μήκος).



Σύμφωνα με τον τύπο

$$L = \int_a^\beta \sqrt{1 + \left(f(x)'\right)^2} dx$$

το ζητούμενο είναι η επίλυση του ολοκληρώματος

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

Με αντικατάσταση $u^2 = 1 + e^{2x}$ και $u = \sqrt{1 + e^{2x}}$ έχουμε

$$du = \left(1 + e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{2x} dx \Rightarrow$$

$$dx = du \cdot \frac{(1 + e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{e^{2x}} \Rightarrow$$

$$dx = \frac{u}{u^2 - 1} \cdot du$$

ενώ τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται

$$x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{2}$$
$$x = \ln 2 \Rightarrow u = \sqrt{5}$$

Άρα

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+e^{2x}}dx \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} u \cdot \frac{u}{u^2-1}du \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2-1}du \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2-1+1}{u^2-1}du \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 1+\frac{1}{u^2-1}du \\ &= u\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{u^2-1}du \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{2}+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{u^2-1}du \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων, επειδή $u^2-1 = (u-1)(u+1)$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2}$$
$$B = -\frac{1}{2}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{u^2-1}du &= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{u-1}du - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{u+1}du \\ &= \frac{1}{2}\ln(u-1)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\ln(u+1)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \\ &= 0.54665447 - 0.14649271 \\ &= 0.40016176\end{aligned}$$

και

$$L = 2.236068 - 1.4142136 + 0.40016176 = 1.222$$