Διάλεξη 8 Σημειώσεις

1 Ολοκλήρωση ως αντιπαραγώγιση

- Ξεκινώντας από την παραγώγιση

  $$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

  (την οποία έχουμε ορίσει) φτάσαμε στο διαφορικό της συνάρτησης $F(x)$ που δίνεται από

  $$\begin{aligned} dF(x) &= F'(x)dx \\ &\text{ή} \\ dF(x) &= f(x)\,dx \end{aligned}$$

  Είναι δυνατόν, γνωρίζοντας μόνο την παράγωγο $F'(x) = f(x)$, να **«επιστρέψουμε»** στη συνάρτηση $F(x)$ (που **παρήγαγε την παράγωγο;**)

- Συχνά στην οικονομική **γνωρίζουμε ή έχουμε «εκτιμήσει»** τη μεταβολή μεγεθών ως προς το χρόνο ή άλλες ερμηνευτικές μεταβλητές

  – π.χ. μεταβολή τιμών στο χρόνο

  $$\frac{d\left[p(t)\right]}{dt} = g \cdot p(t)$$

  ή **ποσοστιαία** μεταβολή των τιμών στο χρόνο (**πληθωρισμός**)

  $$\pi(t) = \frac{d\left[p(t)\right]/dt}{p(t)} = g$$

  – Για παράδειγμα, έστω ότι ο μέσος πληθωρισμός στην Ελλάδα την 4ετία 2016-2019 ήταν 0.61%,

  $$\frac{d\left[p(t)\right]/\,dt}{p(t)} = 0.0061$$

  Τι σημαίνει αυτό για την πορεία των τιμών $p(t)$ στο χρόνο; Μπορούμε να ανακτήσουμε μία συνάρτηση ως προς τον χρόνο $p(t) =;$ η οποία περιγράφει τη χρονική εξέλιξη των τιμών;

– π.χ. μεταβολή κόστους ανά μονάδα παραγωγής (**οριακό κόστος**)

$$\frac{dTC(q)}{dq} = MC\left(q\right)$$

Έστω ότι παρατηρήσαμε πως μία αύξηση της παραγωγής κατά μία μονάδα προϊόντος (μεταβολή στο παραγόμενο προϊόν μεταβάλλει το κόστος) οδηγεί σε αύξηση του κόστους κατά $\frac{1}{2}q$ χρηματικές μονάδες. Δηλαδή $MC\left(q\right) = \frac{1}{2}q$. Ποιά είναι η συνάρτηση κόστους $TC(q)$ που αντιμετωπίζουμε ως επιχείρηση όταν τα σταθερά μας κόστη είναι 10 χρηματικές μονάδες;

Ας χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\int$ για την πράξη της **αντιπαραγώγισης**. Θα δούμε στην πορεία ότι το σύμβολο $\int$ είναι επιμήκυνση του S και προκύπτει από την λατινική Summa (άθροισμα) αφού ο πατέρας του συμβόλου Γερμανός μαθηματικός Gottfried Wilhelm Leibniz είδε την ολοκλήρωση ως το άθροισμα απειροελάχιστων μεταβολών, κάτι το οποίο θα εξηγήσουμε σε επόμενη ενότητα.

Ως αντιπαραγώγιση λοιπόν ορίζουμε την αντιστροφή της παραγώγισης και

$$\frac{dF\left(x\right)}{dx} = F'(x) = f\left(x\right) \Rightarrow$$

$$dF\left(x\right) = f\left(x\right)dx \Rightarrow$$

$$\int dF\left(x\right) = \int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + c$$

όπου c θα συμβολίζει γενικά μία σταθερά[1]. Δηλαδή η παράγωγος $F'(x)$ ή $f\left(x\right)$ μπορεί να παραχθεί από μία οικογένεια συναρτήσεων που διαφοροποιείται από την τιμή της σταθεράς c

$$\frac{d\left[F\left(x\right) + c\right]}{dx} = f\left(x\right)$$

- Ο συμβολισμός $\int f\left(x\right)dx$ θα διαβάζεται «ολοκλήρωμα της $f\left(x\right)$ ως προς x».

[1]Επειδή για σταθερές $dc = 0$ ενώ $d\left(x + y\right) = dx + dy$ έχουμε

$$\int dF(x) = \int d\left[F(x) + c\right] = \int \left[dF(x) + dc\right]$$

- Η αντιπαράγωγος $F(x)$ ονομάζεται και **παράγουσα** συνάρτηση
-
$$\underbrace{\int}_{Summa\ (\text{άθροισμα})} \underbrace{f(x)}_{\text{μεταβολών}} \underbrace{dx}_{\text{ως προς } x} = \underbrace{F(x)+c}_{\text{παράγουσα}}$$
- Για παράδειγμα, η παράγωγος της $(x)' = 1$ άρα
$$\int 1dx = \int dx = x + c$$
- Παρατηρήστε ότι
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+c)' = f(x)$$
άρα
$$\frac{d\left(\int f(x)\,dx\right)}{dx} = f(x) \ \text{ και } d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$
π.χ. το διαφορικό του $\int dx$ δίνεται από
$$d\left(\int dx\right) = dx$$
- Διαφορετικές σταθερές c ορίζουν μία οικογένεια συναρτήσεων
$$\begin{aligned} G_1(x) &= F(x) + c_1 \\ G_2(x) &= F(x) + c_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$
Αν γνωρίζουμε μία συγκεκριμένη τιμή της παράγουσας $F(x)$ ή της $G(x)$ για δεδομένη τιμή της x τότε μπορούμε να εξειδικεύσουμε περισσότερο. Συνήθως όταν $x = t$ και γνωρίζουμε την τιμή $G(0)$ αυτή ονομάζεται **αρχική συνθήκη** ενώ όταν γνωρίζουμε μία **«τελική»** τιμή $G(T)$ αυτή ονομάζεται **συνοριακή συνθήκη**.
- **Για παράδειγμα,** στο ολοκλήρωμα $\int dx = x + c$ έστω ότι $G(0) = -5$. Τότε,
$$\begin{aligned} G(0) &= F(0) + c = -5 \Rightarrow \\ 0 + c &= -5 \Rightarrow \\ c &= -5 \end{aligned}$$

άρα

$$\int dx = x - 5$$

Ενώ αν γνωρίζαμε ότι $G(T) = -5$ τότε

$$\begin{aligned} G(T) &= F(T) + c = -5 \Rightarrow \\ T + c &= -5 \Rightarrow \\ c &= -5 - T \end{aligned}$$

άρα

$$\int dx = x - (T + 5)$$

- **Για παράδειγμα**

$$TC(q) \overset{\text{παραγώγιση}}{\rightarrow} \frac{dTC(q)}{dq} = MC(q) \Rightarrow$$

$$\int MC(q)\, dq = F(q) + c = TC(q)$$

Έστω, ότι το **σταθερό κόστος** είναι 100 ευρώ. Τότε έχουμε μία **αρχική συνθήκη** $TC(0) = 100$ και $c = 100 - F(0)$. Παρατηρούμε ότι αν $F(q)$ είναι μεταβλητό κόστος τότε ισχύει $F(0) = 0$ άρα $c = 100$.

- **Τύποι ολοκληρωμάτων που θα μας απασχολήσουν**

Αόριστο	$\int f(x)\, dx$
Ορισμένο ολοκλήρωμα (εμβαδόν, μήκος τόξου κ.α). Το a καλείται «κάτω όριο» και το b «πάνω όριο» του ολοκληρώματος	$\int_a^b f(x)\, dx$
Γενικευμένο ολοκλήρωμα	$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ ή $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ ή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$

- **Άλλα ολοκληρώματα** (δεν θα μας απασχολήσουν σε αυτό το επίπεδο)

Riemann-Stieljes ολοκλήρωμα	$\int f(x)\,dg(x)$
Lebesque ολοκλήρωμα	$\int_A f(x) \underbrace{d\mu}_{\text{γενίκευση μέτρου ή στάθμισης}}$
Όγκος, διπλό ολοκλήρωμα	$\int\int f(x,y)\,dxdy$
Επιφάνεια	...
Πολλά άλλα...	

2 Κανόνες Ολοκλήρωσης

- $$\int k dx = kx + c$$

- $$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

- **Γραμμικότητα**

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

- $n \neq -1$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

- Παράδειγμα

$$\int dx = \tfrac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c \qquad \int x dx = \tfrac{x^{1+1}}{1+1} + c = \tfrac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^{3/2} dx = \tfrac{x^{5/2}}{5/2} + c = \tfrac{2}{5}x^{5/2} + c \qquad \int \sqrt{x} dx = \tfrac{2}{3}x^{3/2} + c$$

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} + c \qquad \int x^{-6} dx = \tfrac{x^{-5}}{-5} + c = -\tfrac{1}{5x^5} + c$$

- **Γενικά**

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

- Παράδειγμα

$$\int (7x-2)^3\,dx = \frac{(7x-2)^4}{7 \cdot 4} + c$$

- $n = -1$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

ή

$$= \ln x + c\ ,\ \ x > 0$$

- Παράδειγμα

$$\int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| + c = \ln\left(x^2\right) + c$$

- **Γενικά**

$$\int \frac{\delta}{ax+b}dx = \frac{\delta}{a}\ln|ax+b|+c$$

- Παράδειγμα

$$\int \frac{5}{2x+1}dx = \frac{5}{2}\ln|2x+1|+c$$

- **Γενικά ρητές του τύπου**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$$

Π.χ.

$$\int \frac{4x}{2x^2+3}dx = \ln\left|2x^2+3\right|+c$$

$$= \ln\left(2x^2+3\right)+c$$

$$\text{αφού } 2x^2+3>0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

- **Εκθετική**

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx}+c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$$

$$\int f'(x)\,e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c$$

- Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
\int e^x dx &= e^x + c \\
\int 2e^{5x} dx &= \frac{2}{5}e^{5x} + c \\
\int e^{-x} dx &= -e^{-x} + c \\
\int e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}e^{-2x} + c \\
\int 2xe^{x^2} dx &= e^{x^2} + c \\
\int 2^x dx &= \frac{2^x}{\ln 2} + c
\end{aligned}
$$

- **Λογάριθμοι** (ενδιαφέρον, θα τους δούμε αναλυτικότερα παρακάτω)

$$\int \ln x dx = ... = x \ln x - x + c = x (\ln x - 1) + c$$

Π.χ.

$$\int \ln \left(x^2\right) dx = \int 2 \ln x dx = 2 \int \ln x dx = 2x (\ln x - 1) + c$$

$$
\begin{aligned}
\int \log_b x dx &= ... = x \log_b x - \frac{x}{\ln b} + c \\
&= x \frac{\ln x}{\ln b} - \frac{x}{\ln b} + c
\end{aligned}
$$

Π.χ.

$$
\begin{aligned}
\int \log x dx &= x \log x - \frac{x}{\ln 10} + c \\
&= x \frac{\ln x}{\ln 10} - \frac{x}{\ln 10} + c
\end{aligned}
$$

- **Τριγωνομετρικές** $\left(\text{ημ}x: \ \sin x \ , \ \text{συν}x: \ \cos x \ , \ \text{εφ}x = \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}: \ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$$\begin{aligned}\int \sin x dx &= -\cos x + c\\ \int \cos x dx &= \sin x + c\\ \int \tan x dx &= -\ln|\cos x| + c\end{aligned}$$

- **Παραδείγματα (γραμμικότητα και απλές συναρτήσεις)**

$$\int \left(x^2 + \ln x\right) dx = \int x^2 dx + \int \ln x dx = \frac{x^3}{3} + x\ln x - x + c$$

$$\begin{aligned}\int \left(6e^{2x} + \frac{7x}{6x^2+5}\right) dx &= 6\int e^{2x}dx + \int \frac{7x}{6x^2+5}dx\\ &= 6\int e^{2x}dx + \frac{7}{12}\int \frac{12x}{6x^2+5}dx\\ &= \frac{6}{2}e^{2x} + \frac{7}{12}\ln\left(6x^2+5\right) + c\end{aligned}$$

- **Παραδείγματα (αρχικές ή συνοριακές τιμές)**

  – Βρείτε την αντιπαράγωγο $F(t)$ με δεδομένη τη **αρχική συνθήκη** $F(0) = 9$ και

$$\int \left(16e^{2t} + 15e^{-3t}\right) dt$$

$$\begin{aligned}\int \left(16e^{2t} + 15e^{-3t}\right) dt &= ... = \frac{16}{2}e^{2t} - \frac{15}{3}e^{-3t} + c\\ \frac{16}{2} - \frac{15}{3} + c &= 9 \Rightarrow c = 6\\ F(t) &= \frac{16}{2}e^{2t} - \frac{15}{3}e^{-3t} + 6\end{aligned}$$

– Βρείτε την αντιπαράγωγο $F(x)$ με δεδομένη τη **συνοριακή συνθήκη** $F(1) = 3$ και

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx &= ... = 4\ln|x| - \frac{5}{x} + c \\
4\ln|1| - \frac{5}{1} + c &= 3 \Rightarrow c = 8 \\
F(x) &= 4\ln|x| - \frac{5}{x} + 8
\end{aligned}$$

2.1 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Έστω

$$\frac{df\left(x\right)}{dx}=f'\left(x\right)$$

και

$$\frac{dg\left(x\right)}{dx}=g'\left(x\right)$$

Η **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**[2] απλοποιεί την εύρεση του ολοκληρώματος

$$\int f'\left(x\right)g\left(x\right)dx$$

όταν η παραγώγιση της $g\left(x\right)$ την «απλοποιεί» σε τέτοιο βαθμό ώστε η εύρεση του ολοκληρώματος

$$\int f\left(x\right)g'\left(x\right)dx$$

είναι ευκολότερη από την εύρεση του αρχικού $\int f'\left(x\right)g\left(x\right)dx$.

Για την ακρίβεια, **ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες** έχει ως εξής

$$\int f'\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(x\right)g\left(x\right)-\int f\left(x\right)g'\left(x\right)dx$$

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες βασίζεται στον τύπο του διαφορικού γινομένου συναρτήσεων, $f(x)$, $g(x)$

$$\begin{aligned}
d\left(f\cdot g\right) &= fdg+gdf \Rightarrow\\
\int d\left(f\cdot g\right) &= \int fdg+\int gdf \Rightarrow\\
f\cdot g &= \int fdg+\int gdf \Rightarrow\\
\int fdg &= fg-\int gdf\\
&\quad \text{ή}\\
\int gdf &= fg-\int fdg
\end{aligned}$$

Η ιδέα της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες προτάθηκε το 1715 από τον Taylor. Πρόκειται για μια τεχνική που χρησιμοποιείται στην επίλυση ολοκληρωμάτων που περιέχουν γινόμενα συναρτήσεων. Μετασχηματίζει την ολοκλήρωση

[2] η ολοκλήρωση κατά μέρη ή παραγοντική ολοκλήρωση

του γινομένου των συναρτήσεων σε μία διαφορά ενός γινομένου συναρτήσεων $f \cdot g$ και ενός νέου ολοκληρώματος $\int f(x)\, g'(x)\, dx$ για το οποίο η λύση μπορεί να υπολογιστεί ευκολότερα από το αρχικό ολοκλήρωμα.

Χρησιμοποιείται συνήθως σε ολοκληρώματα γινομένου δύο διαφορετικών τύπων συναρτήσεων όπως λογαριθμικές, αντίστροφες τριγωνομετρικές, αλγεβρικές, εκθετικές συναρτήσεις. **Για παράδειγμα, χρησιμοποιείται αρκετά** στις περιπτώσεις που $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο και $g(x)$ μία απλή σχετικά εκθετική συνάρτηση, π.χ. $e^{\alpha+\beta x}$

- **Παράδειγμα 1.** Έστω

$$\int x\,(x+1)^{1/2}\,dx$$

Αν βρούμε την συνάρτηση που παραγωγίσαμε $()' = (x+1)^{1/2}$ τότε

$$\int x\,(x+1)^{1/2}\,dx = x\,()' - \int ()'\,dx$$

Αφού

$$\left(\frac{2}{3}\,(x+1)^{3/2}\right)' = (x+1)^{1/2}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int x\,(x+1)^{1/2}\,dx &= \frac{2}{3}x\,(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}\,dx\\ &= \frac{2}{3}x\,(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\,(x+1)^{5/2} + c\end{aligned}$$

- **Παράδειγμα 2.** Έξυπνο. Πως βρίσκουμε το ολοκλήρωμα του φυσικού λογαρίθμου;

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int (x)' \ln x dx = x\ln x - \int x\,(\ln x)'\,dx\\ &= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c\end{aligned}$$

- **Παράδειγμα 3.**

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x\,(x-1) + c$$

- **Παράδειγμα 4.**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int x^{-2} \ln x dx \\
&= -x^{-1} \ln x - \int \left(-x^{-1}\right) \frac{1}{x} dx \\
&= -x^{-1} \ln x + \int x^{-2} dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c
\end{aligned}$$

- **Παράδειγμα 5.**

$$\begin{aligned}
\int x \cos(x)\, dx &= x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx \\
&= x \sin(x) - (-\cos(x)) + c \\
&= x \sin(x) + \cos(x) + c
\end{aligned}$$

- **Παράδειγμα 6.** Δύο φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\
&= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x + c \right) \\
&= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + c \\
&= e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + c
\end{aligned}$$

Η σταθερά c δεν χρειάζεται να αλλάξει σύμβολο. Μεταφέρεται ως c αν προστεθεί ή αν πολ/στεί με σταθερά.

- **Παράδειγμα 7.** Ωραίο ... με λίγη άλγεβρα

$$\begin{aligned}
I &= \int e^x \cos(x)\, dx \\
&= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx \\
&= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx \\
&= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - I \Rightarrow \\
2I &= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \Rightarrow \\
I &= \int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2}
\end{aligned}$$

2.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση (αλλαγή μεταβλητής)

Έστω ότι $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$. Θα πρέπει να μελετήσετε το ολοκλήρωμα και να «σκεφτείτε» ότι η παρακάτω αντικατάσταση

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)}\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du$$

απλοποιεί σημαντικά το αρχικό ολοκλήρωμα.

Συνήθως είναι δύσκολο να το «δούμε» εξαρχής οπότε προχωρούμε εμπειρικά.

Παράδειγμα 1. Το ολοκλήρωμα

$$\int 2x\left(x^2+1\right)dx$$

λύνεται γρήγορα με

- **αλγεβρική απλοποίηση** (πολλαπλασιάστε τους όρους μέσα στο ολοκλήρωμα)

$$\int 2x\left(x^2+1\right)dx = \int \left(2x^3+2x\right)dx = \int 2x^3dx + \int 2xdx = \frac{1}{2}x^4+x^2+c$$

- **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**

$$\begin{aligned}\int 2x\left(x^2+1\right)dx &= x^2\left(x^2+1\right) - \int x^2\cdot 2xdx \\ &= x^4+x^2-2\int x^3dx \\ &= x^4+x^2-\frac{x^4}{2}+c \\ &= \frac{1}{2}x^4+x^2+c\end{aligned}$$

- ή αν υιοθετήσουμε **ολοκλήρωση με αντικατάσταση** τότε, αν θέσουμε $u = x^2+1$ που υπονοεί

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int 2x\left(x^2+1\right)dx &= \int udu = \frac{u^2}{2}+c\\ &= \frac{\left(x^2+1\right)^2}{2}+c\\ &= \frac{1}{2}x^4+x^2+\frac{1}{2}+c\\ &= \frac{1}{2}x^4+x^2+c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Έστω

$$\int 6x^2\left(x^3+1\right)^{99}dx$$

Θέτουμε

$$u=x^3+1 \Rightarrow du=3x^2dx \Rightarrow 2du=6x^2dx$$

άρα

$$\begin{aligned}\int 6x^2\left(x^3+1\right)^{99}dx &= 2\int u^{99}du=\frac{2}{100}u^{100}+c\\ &= \frac{2}{100}\left(x^3+2\right)^{100}+c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Έστω

$$\int x\cos\left(x^2+1\right)dx$$

Θέτουμε

$$u=x^2+1 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow \frac{1}{2}du=xdx$$

άρα

$$\begin{aligned}\int x\cos\left(x^2+1\right)dx &= \frac{1}{2}\int\cos\left(u\right)du=\frac{1}{2}\sin(u)+c\\ &= \frac{1}{2}\sin(x^2+1)+c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4. Έστω

$$\int\frac{2\ln x}{x}dx=2\int\frac{\ln x}{x}dx$$

Θέτουμε

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

άρα

$$2\int \frac{\ln x}{x}dx = 2\int udu = 2\cdot\frac{u^2}{2} + c = u^2 + c = [\ln(x)]^2 + c$$

Ωραίο ...: Μπορούμε να λύσουμε και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Έ-στω

$$I = 2\int \frac{\ln x}{x}dx$$

Τότε,

$$I = 2\int \frac{1}{x}\ln x dx = 2\left(\ln x \cdot \ln x - \int \ln x \frac{1}{x}dx\right) \Rightarrow$$

$$I = 2\left[\ln(x)\right]^2 - I \Rightarrow I = \left[\ln(x)\right]^2 + c$$

Παράδειγμα 5. Ωραίο ...: Έστω

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

Θέτουμε

$$u = x + 1 \Rightarrow du = dx$$

και επειδή $u - 1 = x$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int u^{1/2}du - \int u^{-1/2}du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + c \\ &= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1} + c\end{aligned}$$

3 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

- Έστω ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι $\beta(P) = p$ και μεγαλύτερος του βαθμού του πολυωνύμου $Q(x)$ έστω $\beta(Q) = q$. Τότε διαιρούμε πολυώνυμα και

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ ή } P(x) = \Pi(x)Q(x) + R(x)$$

όπου ισχύει $\beta(\Pi) < \beta(P)$ και $\beta(R) < \beta(Q)$. Οπότε

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \Pi(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Αν ο όρος $\frac{R(x)}{Q(x)}$ έχει απλοποιηθεί σημαντικά τότε προχωρούμε σε επίλυση. Αν όχι, τότε ακολουθούμε την παρακάτω μεθοδολογία (παρατηρήστε ότι ο βαθμός του $R(x)$ είναι **μικρότερος** από τον βαθμό του $Q(x)$).

- Έστω ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι $\beta(P) = p$ και μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $Q(x)$ έστω $\beta(Q) = q$. Τότε εκφράζουμε το $Q(x)$ ως γινόμενο πολυωνύμων πρώτου βαθμού (μπορούμε αλγεβρικά και μέχρι δεύτερου αλλά το προσπερνάμε...) χρησιμοποιώντας τις ρίζες του. Για παράδειγμα

$$Q(x) = (a_1x_1 + \beta_1)(a_2x_2 + \beta_2)\ldots(a_nx_n + \beta_n)$$

αν έχει n διακριτές ρίζες $x_i^* = -\frac{\beta_i}{a_i}$. Γράφουμε - δηλαδή παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και αναλύουμε το κλάσμα $P(x)/Q(x)$ σε απλά κλάσματα - την έκφραση

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x_1 + \beta_1)} + \ldots + \frac{A_n}{(a_nx_n + \beta_n)}$$

και υπολογίζουμε τους «συντελεστές» $A_1, \ldots, A_n$. Αν μία ρίζα εμφανίζεται πάνω από μία φορά, για παράδειγμα έστω 3 φορές, στο πολυώνυμο τέταρτου βαθμού $Q(x)$ τότε

$$Q(x) = (a_1x_1 + \beta_1)^3(a_2x_2 + \beta_2)$$

και ο λόγος των πολυωνύμων αναλύεται στα κλάσματα

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x_1 + \beta_1)} + \frac{A_2}{(a_1x_1 + \beta_1)^2} + \frac{A_3}{(a_1x_1 + \beta_1)^3} + \frac{A_4}{(a_2x_2 + \beta_2)}$$

- **Παράδειγμα.**

$$\int \frac{5x + 2}{x^2 - 6x + 8}dx$$

Έχουμε ότι

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$$

άρα

$$\begin{aligned}
\frac{5x+2}{x^2-6x+8} &= \frac{A_1}{x-4}+\frac{A_2}{x-2}=\frac{A_1\,(x-2)+A_2\,(x-4)}{(x-4)\,(x-2)} \\
&\Rightarrow \\
5x+2 &= ... = (A_1+A_2)\,x-2A_1-4A_2 \\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} A_1+A_2=5 \\ 2A_1+4A_2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1=11\ ,\ A_2=-6$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x+2}{x^2-6x+8}dx &= \int \frac{11}{x-4}dx-\int \frac{6}{x-2}dx \\
&= 11\ln|x-4|-6\ln|x-2|+c
\end{aligned}$$

- **Παράδειγμα.** Στο παρακάτω ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^2+7x+1}{x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+2}dx$$

το πολυώνυμο στον παρονομαστή έχει μία διπλή ρίζα -2 και μία μονή ρίζα $-1/2$:

$$x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+2=(x+2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Οπότε αναλύουμε σε τρία κλάσματα

$$\frac{x^2+7x+1}{x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+2}=\frac{A_1}{(x+2)}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\ldots$$

$$x^2+7x+1=$$

$$=(2A_1+A_3)\,x^2+(5A_1+2A_2+4A_3)\,x+(2A_1+A_2+4A_3)$$

$$\left.\begin{array}{c} 2A_1+A_3=1 \\ 5A_1+2A_2+4A_3=7 \\ 2A_1+A_2+4A_3=1 \end{array}\right\} A_1=1\ ,\ A_2=3\ ,\ A_3=-1$$

$$\int\frac{x^2+7x+1}{x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+2}dx=$$

$$\int\frac{1}{(x+2)}dx+\int\frac{3}{(x+2)^2}dx-\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}dx$$

$$=\ln|x+2|-\frac{3}{x+2}-\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+c$$

4 Ορισμένο (κατά Riemann) ολοκλήρωμα

Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]\in\mathbb{R}$ και n θετικός ακέραιος. Ορίζουμε μία διαμέριση του $[a,\beta]$ ως

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=\beta$$

Έστω $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,\ldots,n$ δηλαδή

$$\begin{array}{rcl} \Delta x_1 & = & x_1-x_0=x_1-a \\ \Delta x_2 & = & x_2-x_1 \\ & & \vdots \\ \Delta x_n & = & x_n-x_{n-1}=\beta-x_{n-1} \end{array}$$

Παρατηρήστε ότι καθώς αυξάνεται το n η διαμέριση γίνεται «λεπτότερη».

Έστω ότι $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ γιά $i = 1, ..., n$. Τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^\beta f(x)\, dx$$

ορίζεται από το παρακάτω όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_a^\beta f(x)\, dx$$

όπου $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$ ονομάζεται άθροισμα Riemann.

- Η συνάρτηση $f(x)$ καλείται **ολοκληρώσιμη** στο διάστημα $[a, \beta]$ αν το παραπάνω όριο **υπάρχει**.

- **Γράφηματα και εμβαδόν.** Η $f(\xi_i)$ προσεγγίζει το ύψος της $f(x)$ καθώς $n \to +\infty$. Στα παρακάτω τρία γραφήματα φαίνεται πως αυξάνοντας το n (λεπτότερη διαμέριση) προσεγγίζουμε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη $f(x) = x \sin x$ και τον άξονα των x

- Αν $f(x) < 0$ $\forall x$ τότε η τιμή του ολοκληρώματος είναι αρνητική $I = \int\limits_a^\beta f(x)\, dx < 0$. Στην περίπτωση αυτή, το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των x στο διάστημα $[a, \beta]$ δίνεται από την απόλυτη τιμή $|I|$. Για παράδειγμα, το παρακάτω γράφημα εμφανίζει το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = x - x^2$ στο διάστημα $[1, 2]$ με τιμή

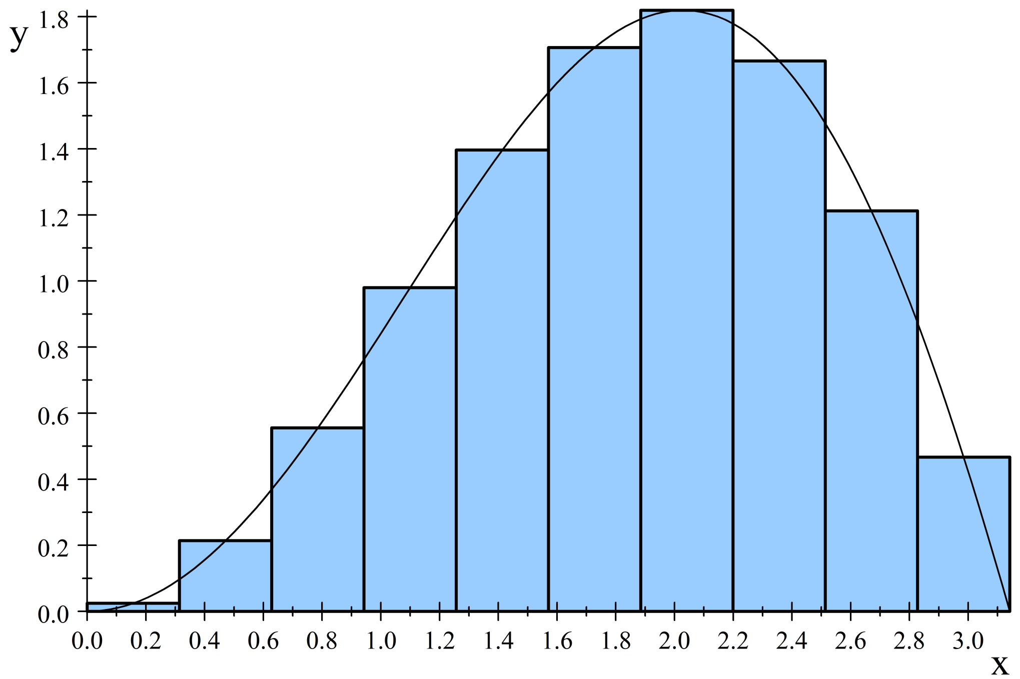
$$\int_1^2 \left(x - x^2\right) dx = -\frac{5}{6}$$

  Άρα το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι ίσο με $|I| = \frac{5}{6}$

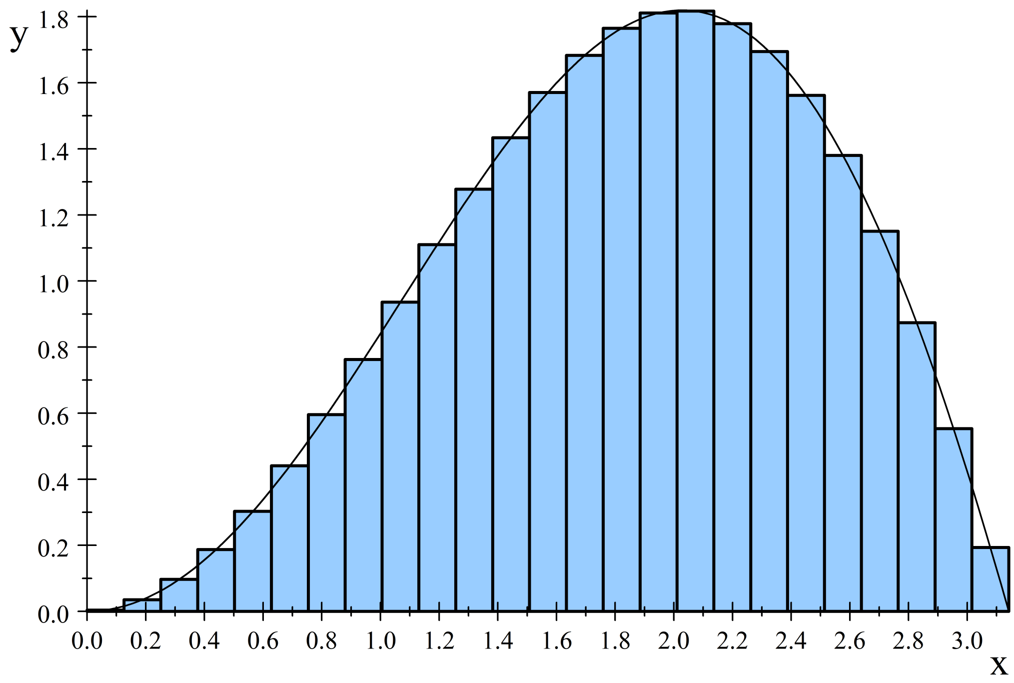
4.1 Θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε υπάρχει κάποιο $\xi \in (a, \beta)$ ώστε

$$\int_a^\beta f(x)\, dx = f(\xi)\,(\beta - a)$$



Γράφημα 1. Διαμέριση με $n = 10$. $x \in [0, \pi]$ ενώ το $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ (μέσο διαστήματος διαμέρισης)



Γράφημα 2. Διαμέριση με $n = 25$

ή

$$\frac{1}{\beta - a}\int_{a}^{\beta} f\left(x\right)dx = f\left(\xi\right)$$

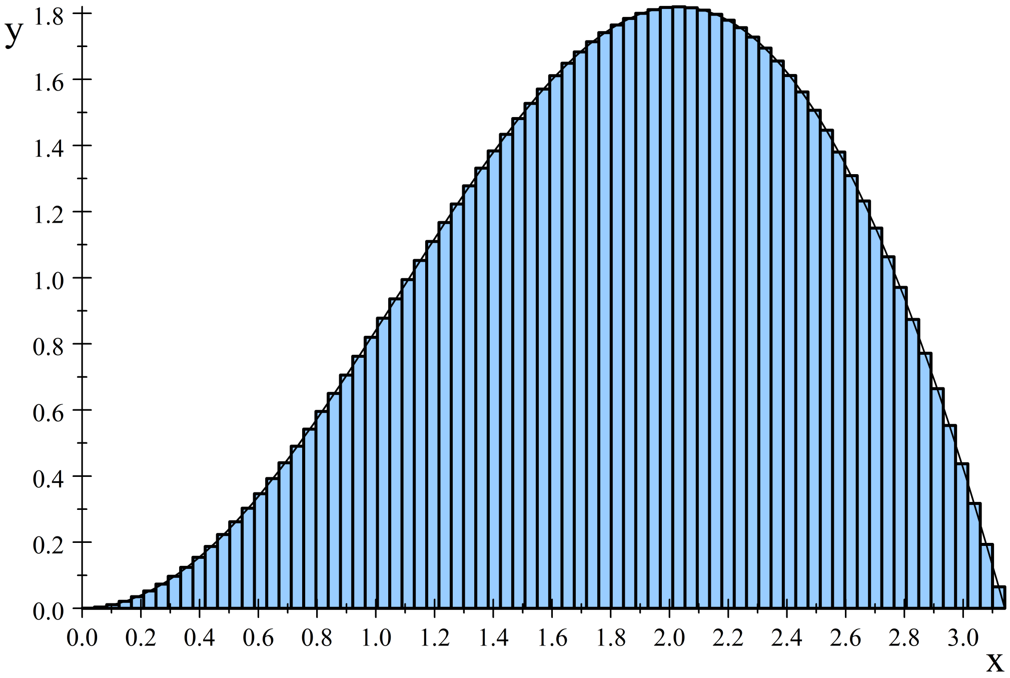
4.2 Πρώτο (θεμελιώδες) θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

Έστω ότι η $f\left(x\right)$ είναι ολοκληρώσιμη και συνεχής στο $[c, d]$. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_{c}^{x} f\left(u\right)du$ υπάρχει $\forall x \in (c, d)$ και η συνάρτηση

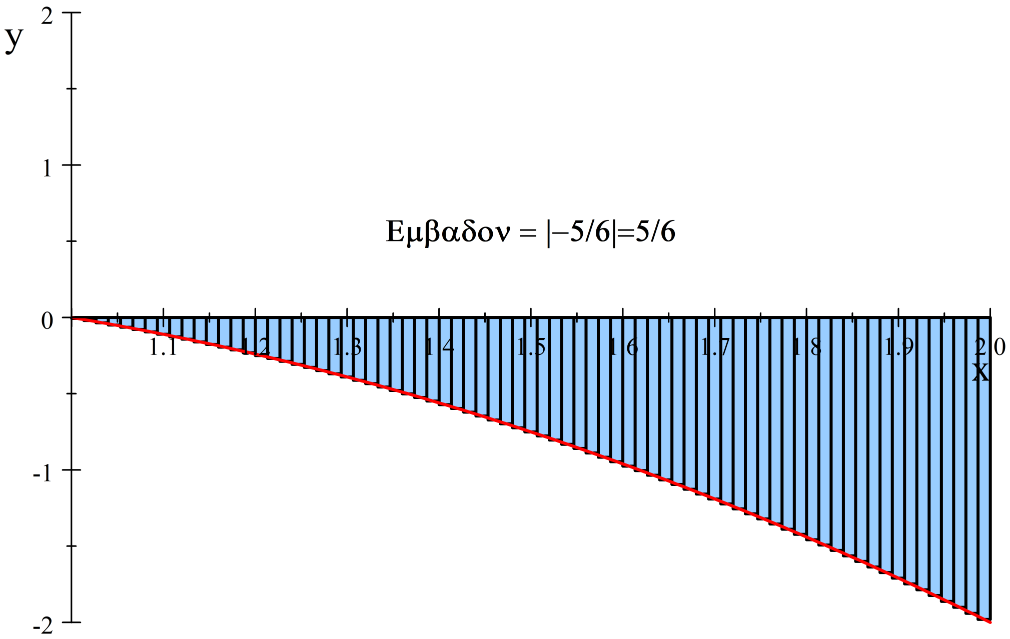
$$F\left(x\right) = \int_{c}^{x} f\left(u\right)du\ ,\ \ \forall x \in (c, d)$$

ικανοποιεί την

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$



Γράφημα 3. Διαμέριση με $n = 75$



Γράφημα 4. το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι ίσο με $|I| = \frac{5}{6}$

4.3 Δεύτερο (θεμελιώδες) θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

Αν $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και συνεχής στο $[a,\beta]$ με $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,\beta]$ τότε

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = F(x)|_a^\beta = F(\beta) - F(a)$$

Γεωμετρική απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος υιοθετώντας το πρώτο.

- **Παράδειγμα.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\int_a^\beta e^{-rx}dx &= \left. -\frac{1}{r}e^{-rx}\right|_a^\beta \\
&= -\frac{1}{r}e^{-r\beta} - \left(-\frac{1}{r}e^{-ra}\right) \\
&= \frac{1}{r}e^{-ar} - \frac{1}{r}e^{-\beta r}
\end{aligned}$$

- **Παράδειγμα.** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x dx &= (x\ln x - x)|_1^e \\
&= (e\ln e - e) - (1\cdot\ln 1 - 1) \\
&= (e\cdot 1 - e) - (1\cdot 0 - 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

4.4 Ιδιότητες

- Αν τα δύο άκρα της ολοκλήρωσης είναι ίσα τότε

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

- Για οποιαδήποτε σταθερά λ ισχύει

$$\int_a^\beta \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^\beta f(x)\,dx$$

- Αν το «κάτω» όριο a είναι μεγαλύτερο από το «άνω» όριο β τότε

$$a > \beta \Rightarrow \int_a^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^a f(x)\,dx$$

- Αν $\gamma \in (a, \beta)$ και $f(x)$ **συνεχής** τότε

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

4.5 Παραδείγματα

-

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \left(\frac{1}{1+x} + 2x\right) dx &= \int_0^4 \frac{1}{1+x} dx + \int_0^4 2x dx \\
&= \ln|1+x|\big|_0^4 + x^2\big|_0^4 \\
&= \ln 5 - \ln 1 + 4^2 - 0^2 \\
&= \ln 5 + 16
\end{aligned}$$

- **Προσοχή στα όρια ολοκλήρωσης όταν προβαίνουμε σε ολοκλήρωση με αντικατάσταση**

$$\int_1^2 6x^2 \left(2x^3 - 1\right)^2 dx$$

Θέτουμε $u = 2x^3 - 1 \Rightarrow du = 6x^2 dx$. Όμως όταν $x = 1$ έχουμε $u = 1$ και όταν $x = 2$ έχουμε $u = 15$ αφού

$$u = 2 \cdot 2^3 - 1 = 2 \cdot 8 - 1 = 15$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\int_1^2 6x^2 \left(2x^3 - 1\right)^2 dx &= \int_1^{15} u^2 du \\
&= \left.\frac{u^3}{3}\right|_1^{15} = \frac{15^3}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{3374}{3}
\end{aligned}$$

5 Γενικευμένο ολοκλήρωμα

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται στις περιπτώσεις που τα άκρα των διαστημάτων ολοκλήρωσης γίνονται άπειρα, καθώς επίσης και στις περιπτώσεις που η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι φραγμένη σε διάστημα με ή χωρίς πεπερασμένα άκρα.

Στα **γενικευμένα (ή μη-γνήσια, improper integrals)** ολοκληρώματα, τουλάχιστον μία από τις παρακάτω τρεις υποθέσεις ισχύει

Γ1. Το **διάστημα** ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένο (γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους)

Γ2. η **συνάρτηση** ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένη (γενικευμένα ολοκληρώματα δεύτερου είδους)

Γ3. Το **διάστημα** ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένο και η **συνάρτηση** ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένη (γενικευμένα ολοκληρώματα τρίτου είδους)

Στην πρώτη περίπτωση (Γ1) τουλάχιστον ένα από τα όρια ολοκλήρωσης είναι το άπειρο οπότε

- $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$
- ή $$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx$$
- ή $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα τότε

- αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, +\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)\,dx$$

- αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, \beta]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,dx$$

- αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{0}^{\beta} f(x)\,dx$$

Προσοχή: Το ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

δεν ορίζεται ως το όριο

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B \to \infty} \int\limits_{-B}^{B} f(x)\,dx$$

Πρέπει να "σπάσουμε" το ολοκλήρωμα στα δύο μέρη που εμφανίζονται παραπάνω.

- Όταν τα παραπάνω όρια υπάρχουν, δηλαδή είναι πεπερασμένοι αριθμοί τότε λέμε ότι τα ολοκληρώματα **συγκλίνουν** και το ολοκλήρωμα υπάρχει.

- Όταν τα παραπάνω όρια δώσουν (τείνουν στο) άπειρο τότε τα ολοκληρώματα **αποκλίνουν** και ουσιαστικά το ολοκλήρωμα δεν έχει έννοια αφού είναι ίσο με το άπειρο.

- Σε περίπτωση που καταλήξουμε σε μη-επιλύσιμη απροσδιοριστία π.χ.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \infty - \infty$$

τότε το ολοκλήρωμα **δεν ορίζεται**

- ενώ όταν αδυνατούμε να υπολογίσουμε το όριο (το όριο δεν υπάρχει) τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα **δεν συγκλίνει**, π.χ. το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \cos(x)\, dx = \lim_{a\to\infty} [\sin(a) - \sin(0)] = \lim_{a\to\infty} \sin(a)$$

  δεν υπολογίζεται.

- – **Παράδειγμα.** Έστω ότι $a > 0$. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_a^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\bigg|_a^{\beta} \right] = \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{1}{\beta} + \frac{1}{a} \right] = \frac{1}{a}$$

  συγκλίνει.

  – **Παράδειγμα.** Το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{1} e^x dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^1 e^x dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[e^x\big|_a^1 \right] \\ &= \lim_{a\to-\infty} [e - e^a] \\ &= e \end{aligned}$$

  συγκλίνει.

  – **Παράδειγμα.** Το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} \left[\ln x\big|_1^{\beta} \right] \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} [\ln\beta - \ln 1] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

  αποκλίνει.

– **Παράδειγμα.** Το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{+\infty} x\sin x dx &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_{1}^{\beta} x\sin x dx \\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\left[-x\cos x|_1^\beta + \int_1^\beta \cos x dx\right] \\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\left[-x\cos x|_1^\beta + \sin x|_1^\beta\right] \\
&= \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\beta\cos\beta + \cos 1 + \sin\beta - \sin 1\right] \\
&= \cos 1 - \sin 1 + \lim_{\beta\to+\infty}\left[\sin\beta - \beta\cos\beta\right]
\end{aligned}$$

δεν μπορεί να υπολογιστεί χωρίς αναγκαστικά να τείνει στο άπειρο. Σε αυτή την περίπτωση, **το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει**.

5.1 Ασυνέχειες και γενικευμένο ολοκλήρωμα

Στην δεύτερη περίπτωση (Γ2) γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

- Αν η $f(x)$ έχει σημείο ασυνέχειας ή δεν ορίζεται στο **αριστερό άκρο** a του πραγματικού διαστήματος $[a,\beta]$ τότε

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{\beta} f(x)\,dx$$

ή εναλλακτικά

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \lim_{L\to a^+}\int_{L}^{\beta} f(x)\,dx$$

– **Παράδειγμα.** Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μη-φραγμένη στο $(0,1]$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln x|_\varepsilon^1\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(0-\ln\varepsilon) = -(-\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

αποκλίνει

– ενώ η $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι μη-φραγμένη στο $(0,1]$ και

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2 \end{aligned}$$

συγκλίνει

- Αν η $f(x)$ έχει σημείο ασυνέχειας ή δεν ορίζεται στο **δεξιό άκρο** β του πραγματικού διαστήματος $[a,\beta]$ τότε

$$\int\limits_a^\beta f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_a^{\beta-\varepsilon} f(x)\,dx$$

  – **Παράδειγμα.**

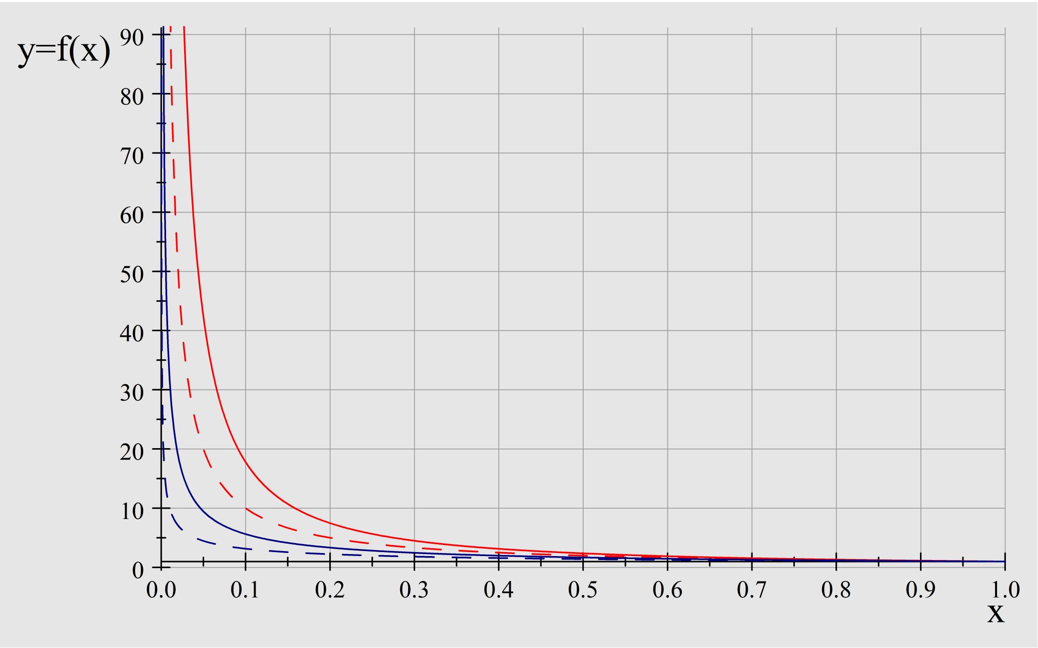
$$\begin{aligned} \int\limits_1^2 \frac{1}{x-2}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_1^{2-\varepsilon} \frac{1}{x-2}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln|x-2| \Big|_1^{2-\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln|-\varepsilon| - \ln|-1|\right] \\ &= -\infty - 0 = -\infty \end{aligned}$$

αποκλίνει

  – **Παράδειγμα.**

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(x\ln x - x\Big|_{\varepsilon}^{1} \right) \\ &= 1\cdot \ln 1 - 1 - \left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \ln\varepsilon - \varepsilon \right) \\ &= -1 - \left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon \right) = -1 \end{aligned}$$

συγκλίνει (αφού με τον κανόνα l'Hôpital $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\ln\varepsilon = 0$)



Γράφημα 5. Συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^a}$ όταν $a = 0.5$ (μπλέ γραμμή - παύλες), $a = 0.75$ (μπλέ γραμμή), $a = 1$ (κόκκινη γραμμή - παύλες), $a = 1.25$ (κόκκινη γραμμή)

– **Παράδειγμα.**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & , \quad a<1 \\ \infty & , \quad a \geq 1 \end{cases}$$

- Αν η $f(x)$ έχει σημείο ασυνέχειας ή δεν ορίζεται στο $\gamma \in (a, \beta)$ τότε

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{\gamma-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{\gamma+\varepsilon_2}^{\beta} f(x)\,dx$$

Μόνο αν συγκλίνουν και τα δύο ολοκληρώματα, **συγκλίνει** και το $\int_a^\beta f(x)\,dx$. Αν αποκλίνουν κατά τέτοιο τρόπο ώστε το αποτέλεσμα να είναι $\pm\infty$ τότε το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**. Αν φτάσουμε σε **απροσδιόριστη μορφή** $\infty - \infty$ τότε το ολοκλήρωμα **δεν προσδιορίζεται**.

– **Παράδειγμα.**

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x-1}dx &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{1}{x-1}dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{1}{x-1}dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[\ln|x-1| \big|_0^{1-\varepsilon_1}\right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[\ln|x-1| \big|_{1+\varepsilon_2}^{2}\right] \\ &= -\infty - 0 + 0 - (-\infty) \\ &= -\infty + \infty \end{aligned}$$

δεν ορίζεται (απροσδιόριστο).

– **Παράδειγμα.**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}dx &= \lim_{U \to 0^+} \int_{-1}^{U} \frac{1}{x^3}dx + \lim_{L \to 0^+} \int_{L}^{2} \frac{1}{x^3}dx \\ &= \lim_{U \to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\bigg|_{-1}^{U} \right] + \lim_{L \to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\bigg|_{L}^{2} \right] \\ &= -\infty + \infty \end{aligned}$$

και όχι

$$\text{λάθος} \to \int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}\bigg|_{-1}^{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

– **Παράδειγμα.** Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x \ln |x| - x + c \\ &= x (\ln |x| - 1) + c\end{aligned}$$

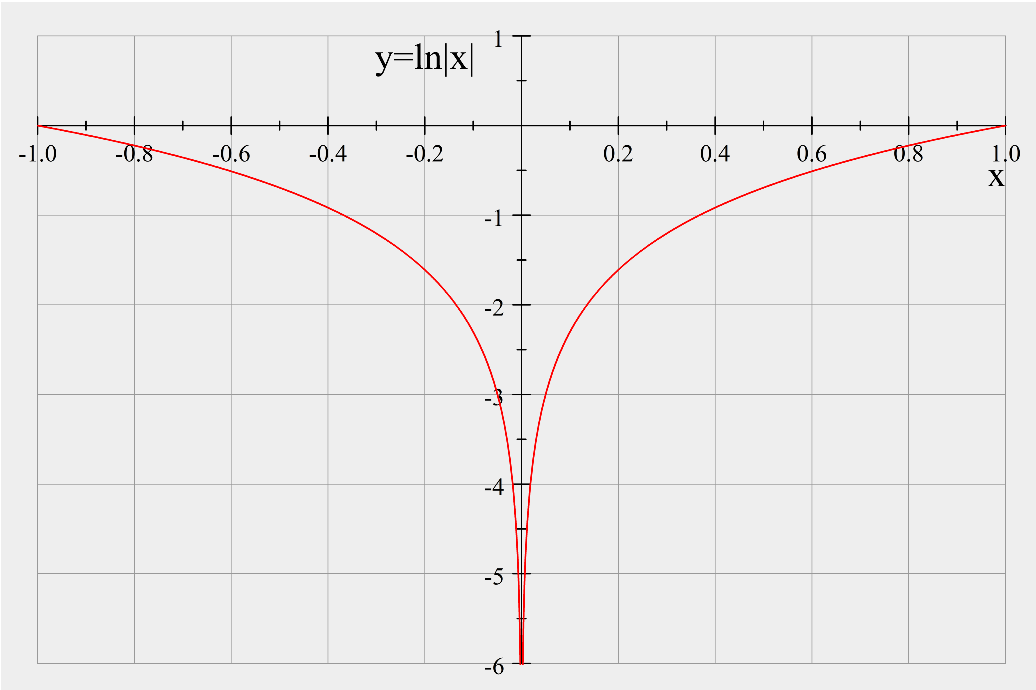
και ότι με χρήση του κανόνα l'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} x \ln |x| &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln |x|}{\left(\frac{1}{x}\right)} \overset{l'h}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \ln |x|\, dx &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1} \ln |x|\, dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int\limits_{0+\varepsilon_2}^{1} \ln x dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[x (\ln |x| - 1)|_{-1}^{0-\varepsilon_1} \right] \\ &\quad + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[x (\ln x - 1)|_{0+\varepsilon_2}^{1} \right] \\ &= ... \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται η συνάρτηση $\ln |x|$ στο διάστημα $[-1, 1]$



Γράφημα 6. Κόκκινη καμπύλη: Συνάρτηση $\ln|x|$ στο διάστημα $[-1, 1]$