Σύνολο ασκήσεων 8

1 Άσκηση

1. Βρείτε την αντιπαράγωγο $F(t)$ με δεδομένη την **αρχική συνθήκη** $F(0) = 9$ και
$$\int \left(16e^{2t} + 15e^{-3t}\right) dt$$

2. Βρείτε την αντιπαράγωγο $F(x)$ με δεδομένη την **συνοριακή συνθήκη** $F(1) = 3$ και
$$\int \left(\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx$$

2 Άσκηση

1. Βρείτε τα παρακάτω **ολοκληρώματα με αντικατάσταση**
$$\int x \sin\left(x^2\right) dx$$
Θέτουμε $u = x^2$ οπότε $du = 2xdx$ και $\frac{1}{2}du = xdx$.

   Άρα
$$\begin{aligned} \int x \sin\left(x^2\right) dx &= \int \frac{1}{2} \sin(u)\, du \\ &= -\frac{1}{2}\cos(u) \\ &= -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) \end{aligned}$$

2. Υπολογίστε το
$$\int_0^2 x \cos\left(x^2 + 1\right) dx$$
χρησιμοποιώντας την υπόδειξη "*θέτουμε* $u = x^2 + 1$"

3. Υπολογίστε το
$$\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$$
χρησιμοποιώντας την υπόδειξη "*θέτουμε* $u = \sqrt{x}$"

4. Υπολογίστε το
$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$$
χρησιμοποιώντας την υπόδειξη "*θέτουμε* $u = \ln(x)$"

3 Άσκηση

1. Βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**
$$\int x \ln x dx$$
Έχουμε
$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int 30x\sqrt{9+x}dx = ... = 20x(x+9)^{3/2} - 8(x+9)^{5/2} + c$$

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int 24x^2 e^{6x} dx = ... = \frac{2}{9}e^{6x}\left(18x^2 - 6x + 1\right)$$

4 Άσκηση

Βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας **τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων**

1. (μία διπλή ρίζα $+1$)
$$\int \frac{x+5}{x^2-2x+1}dx$$

2. (δύο ρίζες $+4$,-5)
$$\int \frac{x-10}{x^2+x-20}dx$$

3. (μία διπλή ρίζα -2)
$$\int \frac{x+3}{(x^2+4x+4)(x-1)}dx$$

5 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση[1]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ενώ είναι γνωστό[2] ότι

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 0.5 + 0.5 \\
&= 1
\end{aligned}$$

- Δείξτε ότι[3] η αναμενόμενη ή μέση τιμή (ή πρώτη ροπή) $E(X)$ μίας κανονικά κατανεμόμενης τυχαίας μεταβλητής X είναι ίση με την παράμετρο μ, δηλαδή
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \mu$$

Απάντηση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Θέτουμε

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow dy = \frac{1}{\sigma} dx$$

---

[1] Είναι η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της κανονικής κατανομής. Για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ και $x \in A \subset \mathbb{R}$, η πιθανότητα να λάβει μία τιμή στο ανοιχτό (ή κλειστό) διάστημα (α, β) δίνεται από $P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha < X < \beta) = \int_A f(x)\, dx$.

[2] Ο Laplace απέδειξε το 1778 ότι $(\alpha > 0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

[3] Ramanathan p.42 (Statistical Methods in Econometrics)

Επειδή $y=\frac{x-\mu}{\sigma}$ ισχύει ότι $x=\mu+\sigma y$ άρα

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\mu+\sigma y\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\mu\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\mu\cdot 1+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

δίνει

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy &= \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_{\alpha}^{b}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy\\ &= \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ b\to+\infty}} -e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{\alpha}^{b}\\ &= \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(-e^{-\frac{b^2}{2}}+e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\right)\\ &= \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{2}}-e^{-\frac{b^2}{2}}\right)\\ &= 0-0=0\end{aligned}$$

Άρα

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\times 0=\mu$$

5.1 Λίγα παραπάνω εδώ ...

Ένα γενικότερο αποτέλεσμα δίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{όταν το } n \text{ μονός αριθμός, 1,3,5,...} \\ (n-1)\cdot(n-3)\cdot ...\cdot 3\cdot 1\cdot\sqrt{\dfrac{\pi}{2^n a^{n+1}}} & \text{όταν το } n \text{ ζυγός αριθμός, 0,2,4,...} \end{cases}$$

Με βάση τον παραπάνω τύπο μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις ροπές μίας τυποποιημένης κανονικά κατανεμόμενης τυχαίας μεταβλητής $Z \sim N(0,1)$ άρα και όλων των $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ αφού

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Για παράδειγμα, όταν το $\alpha = \frac{1}{2}$ και το n ζυγός ακέραιος έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dz = (n-1)\cdot(n-3)\cdot ...\cdot 3\cdot 1\cdot\sqrt{2\pi}$$

Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη τιμή της τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής δίνεται από

$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$$

ενώ η διακύμανση από

$$\begin{aligned} Var(Z) = E(Z - E(Z))^2 &= \\ E(Z)^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 \end{aligned}$$

Άρα $E(X) = E(\mu + \sigma Z) = \mu$ και $Var(X) = ... = \sigma^2$.

Παρομοίως υπολογίζονται όλες οι υπόλοιπες ροπές της Z όπως η ασυμμετρία $E(Z)^3 = 0$ και η κύρτωση[4] $E(Z)^4 = 3$.

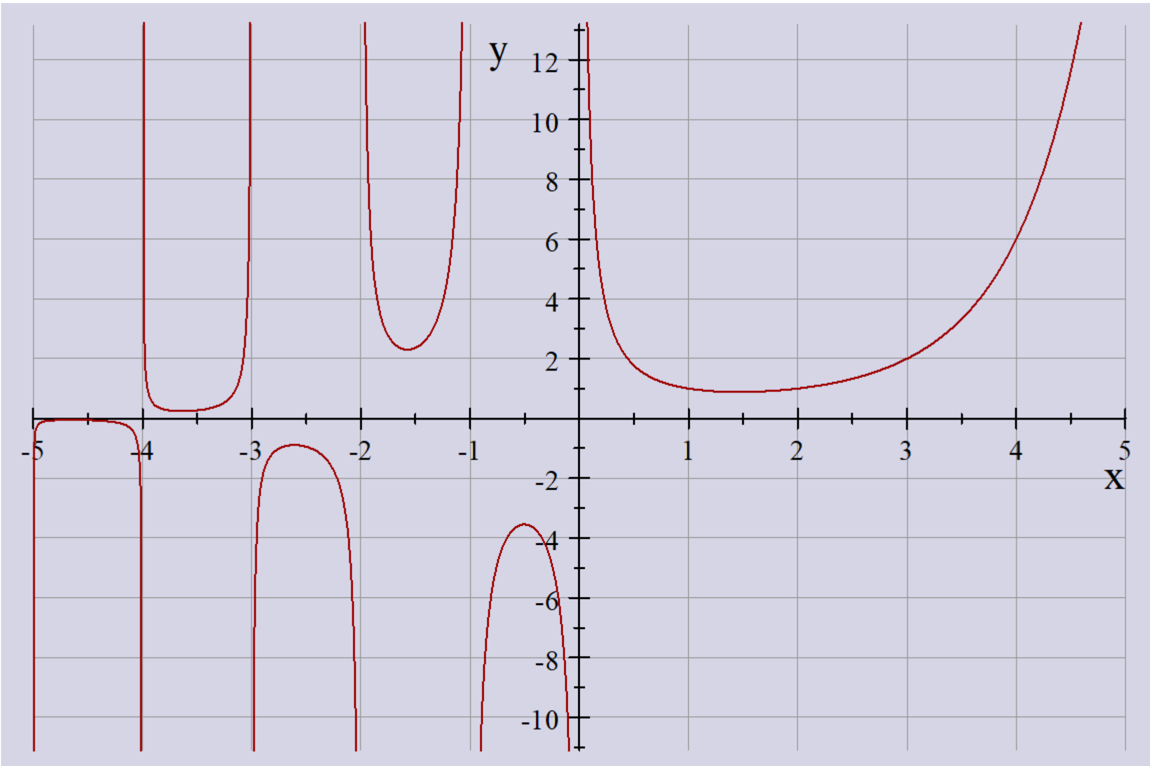
[4]Για μη-τυποποιημένες τυχαίες μεταβλητές, η κύρτωση ορίζεται από $\dfrac{E(X-E(X))^4}{Var(X)^2}$.

6 Άσκηση[5]

Μία ενδιαφέρουσα συνάρτηση είναι η "*συνάρτηση γάμμα*"[6] η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός **εκτός του μηδενός και εκτός των αρνητικών ακέραιων** (δεν ορίζεται η συνάρτηση σε αυτά τα σημεία, $\alpha = 0, -1, -2, ...$). Παρακάτω ένα γράφημα της συνάρτησης $\Gamma(x)$:



[5] Ramanathan p.71 (Statistical Meethods in Econometrics)

[6] Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής t-student δίνεται από την

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

όπου ν οι βαθμοί ελευθερίας.

1. Δείξτε ότι (εύκολο ... γενικευμένο ολοκλήρωμα)
$$\Gamma\left(1\right)=1$$

2. και
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

   Υπόδειξη: με αντικατάσταση $u=\sqrt{2x}$ και χρήση του
$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2}$$

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\Gamma\left(\cdot\right)$ ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση[7] (ολοκλήρωση κατά παράγοντες ...)
$$\Gamma\left(\alpha+1\right)=a\Gamma\left(\alpha\right)$$

   Άρα αν α είναι θετικός ακέραιος τότε μπορούμε να ορίσουμε το παραγοντικό του ως
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\alpha+1\right) &= a\Gamma\left(\alpha\right)=\alpha\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)\\ &= \alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\Gamma\left(\alpha-2\right)\\ &= ...\\ &= \alpha\cdot\left(\alpha-1\right)\cdot\left(\alpha-2\right)\cdot...\cdot\Gamma\left(1\right)\\ &= \alpha\cdot\left(\alpha-1\right)\cdot\left(\alpha-2\right)...\cdot 1\\ &= \alpha!\end{aligned}$$

   οπότε μπορούμε να δείξουμε ότι το παραγοντικό του μηδενός είναι ίσο με 1 αφού
$$0!=\Gamma\left(0+1\right)\quad\left(=\Gamma\left(1\right)=1\right)$$

7 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Cauchy[8],
$$f\left(x\right)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$$
με πεδίο ορισμού $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$.

[7] Functional equation

[8] Διαβάζεται ως κατανομή 'Κωσύ'.

1. Δείξτε ότι η αναμενόμενη ή μέση τιμή (ή πρώτη ροπή) $E(X)$ μίας τυχαίας μεταβλητής X που κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή Cauchy δεν ορίζεται, δηλαδή δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

δεν ορίζεται

Απάντηση

Επειδή η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$$

ορίζεται σε όλο το πεδίο ορισμού της, το $\mathbb{R}$, (π.χ. δεν απειρίζεται στο 0) τότε γράφουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

Από το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)} dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \ln\left(1+x^2\right)\Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \ln\left(1+b^2\right) - \frac{1}{2\pi}\ln(1)\right] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

ενώ από το πρώτο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{0} xf\left(x\right)dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}dx \\ &= \lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{0} \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}dx \\ &= \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{2\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{\alpha}^{0} \\ &= \lim_{\alpha\to-\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\ln\left(1\right)-\frac{1}{2\pi}\ln\left(1+\alpha^2\right)\right] \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Άρα

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}dx = \infty-\infty$$

και **δεν ορίζεται** ο μέσος της κατανομής Cauchy.

- **Γενικά, η αναμενόμενη τιμή ή μέση τιμή** μίας (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X που λαμβάνει τιμές $x\in\mathbb{R}$ και έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f\left(x\right)$ δίνεται από

$$E\left(X\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx$$

και συμβολίζεται από το Ελληνικό γράμμα μ (δηλαδή γράφουμε $E\left(X\right) = \mu$). Η αναμενόμενη τιμή ορίζεται όταν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx$$

συγκλίνει.

- **Όταν**

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)dx$$

αποκλίνει σε $+\infty$ ή $-\infty$ τότε ο μέσος μ **δεν υπάρχει** αν και το πρόσημο του ολοκληρώματος μας δίνει μία ιδέα σχετικά με τη **δειγματική μέση τιμή**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

σε ένα δείγμα που περιέχει π.χ n πραγματοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής X. "*Ανεπίσημα*" θα μπορούσαμε να πούμε ότι "ο μέσος είναι συν άπειρο ή μείον άπειρο".

- **Όταν** το ολοκλήρωμα $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ δώσει απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\infty - \infty$ τότε ο μέσος μ **δεν ορίζεται**. Ανάλογα με το δείγμα πραγματοποίησης της τυχαίας μεταβλητής μπορεί να υπολογιστεί ένας πολύ μεγάλος θετικός ή αρνητικός δειγματικός μέσος $\bar{x}$.

8 Άσκηση

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται ομοιόμορφα $U(\alpha,\beta)$ (γράφουμε $X \sim U(\alpha,\beta)$) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha} \text{ όπου } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha < \beta$$

Η κατανομή χρησιμοποιείται για να περιγράψει τυχαίες μεταβλητές με ισοπίθανα αποτελέσματα.

- Δείξτε ότι $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 1$ δηλαδή όντως η $f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}$ είναι μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
- Βρείτε την αναμενόμενη τιμή $E(X) = \mu$ της τυχαίας μεταβλητής X,

$$E(X) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} xf(x)\,dx$$

- Βρείτε την $n-$οστή ροπή $(n>1)$ της τυχαίας μεταβλητής

$$E(X-\mu)^n = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (x-\mu)^n f(x)\,dx = ... = (\beta-\alpha)^n \frac{2^{-(n+1)}\left[1-(-1)^{n+1}\right]}{n+1}$$

άρα και την διακύμανση $\sigma^2 = E(X-\mu)^2$

- Υπολογίστε την διάμεσο m της ομοιόμορφης κατανομής

$$P\left(X > m\right) = \frac{1}{2}$$

και δείξτε ότι $m = \mu$. **Υπόδειξη:** $\int\limits_{m}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow ...m = \frac{\alpha + \beta}{2}$