Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι
8ο Σύνολο Ασκήσεων

Αόριστο Ολοκλήρωμα-Ορισμένο Ολοκλήρωμα-Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Διδάσκων Εργαστηρίου-Επιμέλεια Ασκήσεων:

Παρασκευή (Εύη) Σαλαμαλίκη-Υποψήφια Διδάκτωρ, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Επιβλέποντες-Υπεύθυνοι Εργαστηρίου:

Ιωάννης Α. Βενέτης, Επίκουρος Καθηγητής, Κωνσταντίνος Κουνετάς, Λέκτορας (υπό διορισμό)

Άσκηση 1.

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int \left(5x^4+3x^2+8x-1\right)dx$, (β) $\displaystyle\int 6\sqrt{8+2x}dx$, (γ)$\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}dx$

(δ) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)}dx$, (ε) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$, (στ) $\displaystyle\int (x+4)\ln x dx$

(ζ) $\displaystyle\int 24x^2e^{6x}dx$

Απαντήσεις: (α) $x^5+x^3+4x^2-x+c$, (β) $2\left(8+2x\right)^{3/2}+c$, (γ) $2\sqrt{x^2+8}+c$

(δ) $\ln(\ln(e^x+1))+c$, (ε) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$, (στ) $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+4x(\ln x-1)+c$

(ζ) $4x^2e^{6x}-\dfrac{4}{3}xe^{6x}+\dfrac{2}{9}e^{6x}+c$

Άσκηση 2.

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{b-a},\quad a,b\in\mathbb{R},\quad a<b,\quad x\in[a,b]$$

Να δείξετε ότι:

(α)

$$\int_a^b f(x)dx=1$$

(b)

$$\int_a^b xf(x)dx=\frac{1}{2}(a+b)$$

Σημείωση: Η παραπάνω συνάρτηση, $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, αποτελεί την συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής. Το ορισμένο ολοκλήρωμα

$\int\limits_a^b xf(x)dx$ αντιστοιχεί στην μέση τιμή της κατανομής. Συνεπώς, η μέση τιμή της ομοιόμορφης κατανομής είναι $\mu = \frac{1}{2}(a+b)$.

Λύση:

(α) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b dx = \frac{1}{b-a}\ x\Big|_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1$

(b) $\int\limits_a^b xf(x)dx = \int\limits_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\ \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}(a+b)$

Άσκηση 3.

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

δεν ορίζεται (ή έχει απροσδιόριστη μορφή).

Σημείωση: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ αποτελεί την συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της κατανομής Cauchy (κωσύ). Η μέση τιμή της κατανομής Cauchy, δηλαδή το $\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, δεν ορίζεται.

Λύση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xf(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} xf(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx +$$
$$\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$$

- $\displaystyle \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\ \ln(1+x^2)\Big|_0^b =$
  $\displaystyle = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\ln(1+b^2) - \frac{1}{2\pi}\ln(1+0^2)\right] = +\infty$
- $\displaystyle \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2\pi}\ \ln(1+x^2)\Big|_a^0 =$
  $\displaystyle = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\ln(1+0^2) - \frac{1}{2\pi}\ln(1+a^2)\right] = -\infty$

και τελικά $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = +\infty - \infty$ (δεν ορίζεται)