Σύνολο ασκήσεων 6α

1 Άσκηση

Έστω ότι ένα μονοπώλιο αντιμετωπίζει την κλασσική γραμμική συνάρτηση ζήτησης

$$q = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p$$

με συνάρτηση κόστους

$$TC\left(q\right) = cq + FC$$

δηλαδή το οριακό κόστος είναι ίσο με c.

Έστω ότι το κράτος επιβάλλει φόρο t ευρώ στην επιχείρηση με βάση το επίπεδο παραγωγής της, άρα η συνάρτηση φορολογικών εσόδων του κράτους $T(q)$ δίνεται ως συνάρτηση του επιπέδου παραγωγής q και του φόρου, ως:

$$T = tq$$

Επίσης, θεωρήστε ότι οι παράμετροι στο παραπάνω πρόβλημα ικανοποιούν τις ανισότητες $b, c > 0$ και $a > c$ και οι μεταβλητές $q, p, t > 0$.

1. Προβείτε σε μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους του μονοπωλητή $\Pi(q)$ και υπολογίστε τη βέλτιστη παραγωγή q^* και την τιμή ισορροπίας p^* στην αγορά. Ποιό το ύψος των κερδών της επιχείρηση στο βέλτιστο; Πόσο αυξάνεται η τιμή αν αυξηθεί η φορολογία κατά μία μονάδα;

2. Υπολογίστε τη φορολογία (το ύψος του φόρου t) που μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα του κράτους.

Λύση

(1) Πρώτα λύνουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης του μονοπωλητή ώστε να βρούμε την απόφαση της επιχείρησης σχετικά με την παραγωγή της. Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης λαμβάνει τη μορφή

$$p = a - bq$$

Η συνάρτηση κέρδους δίνεται από

$$
\begin{aligned}
\Pi(q) &= pq - TC - tq \\
&= (a - bq)\, q - cq - FC - tq \\
&= -bq^2 + (a - c - t)q - FC
\end{aligned}
$$

Η Σ.Π.Τ δίνει

$$
\begin{aligned}
\Pi' &= -2bq + (a - c - t) = 0 \Rightarrow \\
q^* &= \frac{a - c - t}{2b}
\end{aligned}
$$

Η Σ.Δ.Τ βεβαιώνει την ύπαρξη μέγιστου στο q^* αφού

$$\Pi'' = -2b < 0$$

Η τιμή ισορροπίας στην αγορά που λειτουργεί ο μονοπωλητής δίνεται μετά από αντικατάσταση στην αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης

$$
\begin{aligned}
p^* &= a - bq^* \\
&= a - b\left(\frac{a - c - t}{2b}\right) \\
&= \frac{a + c + t}{2}
\end{aligned}
$$

Η τιμή p^* είναι μεγαλύτερη από την τιμή χωρίς φορολόγηση $p = \frac{a+c}{2}$ κατά $\frac{t}{2}$ δηλαδή το ήμισυ του φόρου μετακυλίεται στην τιμή.

Πόσο αυξάνεται η τιμή αν αυξηθεί η φορολογία κατά μία μονάδα; (**Συγκριτική στατική ανάλυση**)

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{1}{2} > 0$$

Αυξάνεται 0.5 χρηματικές μονάδες.

(2) Για να επιλέξουμε το ύψος της φορολογίας t θα πρέπει να προβούμε σε μεγιστοποίηση των εσόδων μας ως κράτος. Έχουμε λοιπόν το πρόβλημα

$$\max_t T(t) = tq^* = t\left(\frac{a - c - t}{2b}\right)$$

με Σ.Π.Τ

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{a}{2b} - \frac{c}{2b} - \frac{t}{b} = 0 \Rightarrow t^* = \frac{a-c}{2}$$

και Σ.Δ.Τ

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} = -\frac{1}{b} < 0 \ , \ \forall t > 0 \ , \ \text{οπότε ολικό μοναδικό μέγιστο}$$

Άρα το στάσιμο σημείο $t^* = \frac{a-c}{2}$ μεγιστοποιεί τα φορολογικά έσοδα. Το σημείο του ολικού μέγιστου δίνεται από $t^*, T(t^*)$ όπου τα μέγιστα φορολογικά έσοδα $T(t^*)$ είναι ίσα με: $T(t^*) = \left(\frac{a-c}{2}\right)\left(\frac{a-c-t}{2b}\right)$

2 Άσκηση

Ένα μονοπώλιο αντιμετωπίζει συνάρτηση ζήτησης

$$q = D(p)$$

και συνάρτηση κόστους

$$TC(q) = VC(q) + FC \quad \text{με} \quad VC(0) = 0$$

Πως επηρεάζεται (στο βέλτιστο) η προσφερόμενη ποσότητα και η τιμή πώλησης από μία **κρατική επιδότηση** - έστω g - όταν:

1. είναι σταθερή και ανεξάρτητη του επιπέδου παραγωγής, **υπόδειξη:** $TC = VC(q) + FC - g \ , \ g > 0$

2. επιβάλλεται ανά μονάδα προϊόντος, **υπόδειξη:** $TC = VC(q) + FC - gq$, $g > 0$

3. επιβάλλεται ως ποσοστό της τιμής κάθε παραγόμενης μονάδας, **υπόδειξη:** $TC = VC(q) + FC - gp$, $g > 0$

4. επιβάλλεται ως **προοδευτική** ανά μονάδα προϊόντος με τις ιδιότητες
$$G(0) = 0 \quad , \quad G'(q) > 0 \quad , \quad G''(q) < 0$$
όπου η συνθήκη κοιλότητας $G''(q) < 0$ χρειάζεται στην Σ.Δ.Τ. **Υπόδειξη:** $TC = VC(q) + FC - G(q)$

5. Έστω ότι το κράτος θέλει να θέσει την τιμή της μονοπωλιακής αγοράς ίση με την τιμή που θα επικρατούσε αν είχαμε τέλειο ανταγωνισμό. Δείξτε ότι στις περιπτώσεις (2) και (4) θα πρέπει να θέσουμε την επιδότηση ίση με την διαφορά τιμής p_x (τιμή πριν την επιδότηση) και οριακού κόστους $MC(q^*)$ προσαρμοσμένη κατάλληλα ως προς την ελαστικότητα της αγοράς.

Λύση

Χωρίς την επιδότηση η Σ.Π.Τ για μεγιστοποίηση κερδών στο μονοπώλιο δίνει τη συνθήκη:

$$MR\left(q^{*}\right)=MC\left(q^{*}\right)$$

ή αναπτύσσοντας το οριακό έσοδο από τη σχέση

$$MR\left(q\right)=\left(D^{-1}\right)'q+D^{-1}$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$p_x\left(1-\frac{1}{|\varepsilon_d|}\right)=MC\left(q^{*}\right)\Rightarrow p_x=\left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d|-1}\right)MC\left(q^{*}\right)$$

όπου p_x **η τιμή στην αγορά (τιμή πώλησης) πριν την επιβολή επιδότησης**. Γνωρίζουμε ήδη, ότι ο μονοπωλητής θα λειτουργεί πάντα σε περιπτώσεις που η ζήτηση για το προϊόν είναι ελαστική δηλαδή $|\varepsilon_d|>1$ αφού όταν είναι ανελαστική ο λόγος $\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d|-1}$ είναι αρνητικός.

Γενικά λοιπόν θεωρούμε ότι

$$\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d|-1}>1$$

και η τιμή p_x που καθορίζεται στην αγορά είναι **μεγαλύτερη** του οριακού κόστους MC - **Υπόδειξη:** μία αναποτελεσματικότητα του μονοπωλίου αν συγκρίνουμε με την τιμή του **πλήρους ανταγωνισμού** όπου

$$p_{\pi\lambda}=MC\left(q^{*}\right)$$

Έστω ότι $p_{x,\varepsilon\pi}$ η τιμή **μετά την επιβολή επιδότησης**. Μετά την επιβολή επιδότησης, επειδή η συνάρτηση κόστους διαμορφώνεται ως

$$TC+\text{επιδότηση}$$

η συνάρτηση κέρδους γίνεται

$$\begin{aligned}\Pi\left(q\right)&=D^{-1}(q)q-TC\\&=D^{-1}(q)q-VC\left(q\right)-FC+\text{επιδότηση}\end{aligned}$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης μετά την επιβολή της επιδότησης έχουμε

1.

$$\begin{aligned}
\Pi\left(q\right) &= D^{-1}(q)q - VC\left(q\right) - FC + g \\
\Sigma\Pi T &: MR\left(q^{*}\right) - MC\left(q^{*}\right) = 0 \Rightarrow \\
p_{x,\varepsilon\pi}\left(1 - \frac{1}{\left|\varepsilon_{d}\right|}\right) &= MC\left(q^{*}\right) \Rightarrow p_{x,\varepsilon\pi} = \left(\frac{\left|\varepsilon_{d}\right|}{\left|\varepsilon_{d}\right| - 1}\right) MC\left(q^{*}\right) = p_{x}
\end{aligned}$$

Άρα δεν έχουμε **κανένα αποτέλεσμα στην τιμή** από την συγκεκριμένη επιδότηση παρά μόνο αύξηση του κέρδους του μονοπωλητή αφού

$$\Pi_{\varepsilon\pi}\left(q^{*}\right) = \Pi\left(q^{*}\right) + g$$

2.

$$\Pi\left(q\right) = D^{-1}(q)q - VC\left(q\right) - FC + gq$$

$$\Sigma\Pi T : MR\left(q^{*}\right) - MC\left(q^{*}\right) + g = 0 \Rightarrow$$

$$p_{x,\varepsilon\pi}\left(1 - \frac{1}{\left|\varepsilon_{d}\right|}\right) = MC\left(q^{*}\right) - g \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
p_{x,\varepsilon\pi} = \left(\frac{\left|\varepsilon_{d}\right|}{\left|\varepsilon_{d}\right| - 1}\right) MC\left(q^{*}\right) - \left(\frac{\left|\varepsilon_{d}\right|}{\left|\varepsilon_{d}\right| - 1}\right) g \\
= p_{x} - \left(\frac{\left|\varepsilon_{d}\right|}{\left|\varepsilon_{d}\right| - 1}\right) g
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε μείωση στην τιμή του προϊόντος η οποία είναι μεγαλύτερη της επιδότησης g κατά $\left(\frac{\left|\varepsilon_{d}\right|}{\left|\varepsilon_{d}\right|-1}\right)$

3.

$$\begin{aligned}\Pi\left(q\right) &= D^{-1}(q)q - VC\left(q\right) - FC + gp \\ &= D^{-1}(q)q - VC\left(q\right) - FC + gD^{-1}\left(q\right)\end{aligned}$$

$$\Sigma\Pi T : MR\left(q^{*}\right) - MC\left(q^{*}\right) + g\frac{dp}{dq} = 0 \Rightarrow$$

$$p_{x,\varepsilon\pi}\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_d|}\right) = MC\left(q^{*}\right) - g\frac{dp}{dq} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}p_{x,\varepsilon\pi} &= \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) MC\left(q^{*}\right) - \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) g\frac{dp}{dq} \\ &= p_x - \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) g\frac{dp}{dq}\end{aligned}$$

Όχι πολύ καλή ιδέα η επιδότηση στην τιμή. Στην ουσία αυξάνεται η αγοραία τιμή αφού $\frac{dp}{dq} < 0$.

4.

$$\Pi\left(q\right) = D^{-1}(q)q - VC\left(q\right) - FC + G(q)$$

$$\Sigma\Pi T : MR\left(q^{*}\right) - MC\left(q^{*}\right) + G'(q) = 0 \Rightarrow$$

$$p_{x,\varepsilon\pi}\left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_d|}\right) = MC\left(q^{*}\right) - G'(q) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}p_{x,\varepsilon\pi} &= \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) MC\left(q^{*}\right) - \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) G'(q) \\ &= p_x - \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) G'(q)\end{aligned}$$

Άρα έχουμε μείωση στην τιμή του προϊόντος κατά $\left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d|-1}\right) G'(q)$.

5. Στην περίπτωση 2 έχουμε

$$\begin{aligned} p_x - \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) g &= MC \Rightarrow \\ g &= \frac{p_x - MC}{\left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d|-1}\right)} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση (4) έχουμε

$$\begin{aligned} p_x - \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) G'(q) &= MC \Rightarrow \\ G'(q) &= \frac{p_x - MC}{\left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d|-1}\right)} \end{aligned}$$