Διάλεξη 6 Σημειώσεις

1 Τυπικές συναρτήσεις μικροοικονομικής

1.1 Συνάρτηση χρησιμότητας

Η χρησιμότητα (Utility) αναφέρεται σε ένα αντιληπτό επίπεδο ικανοποίησης που απολαμβάνουμε από την κατανάλωση ενός ή συνδυασμού αγαθών. Συνήθως η συνάρτηση χρησιμότητας, $u(\cdot,\cdot)$ ή $U(\cdot,\cdot)$, δίνεται ως μία διμεταβλητή συνάρτηση η οποία περιλαμβάνει την κατανάλωση δύο αγαθών τα οποία συμβολίζονται με x, y ή x_1, x_2.

Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, μπορείτε να θεωρήσετε το αγαθό x ως το αγαθό *«ενδιαφέροντος»* και ότι y συμβολίζει την κατανάλωση *«όλων των άλλων αγαθών»*. Η συνάρτηση χρησιμότητας λαμβάνει τιμές από το θετικό μέρος του συνόλου των πραγματικών αριθμων (οι μεταβλητές αντιστοιχούν σε κατανάλωση),

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} \\
&\text{ή} \\
u(x,y) &: \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Επίσης σε ένα απλό υπόδειγμα μεγιστοποίησης χρησιμότητας, υποθέτουμε ότι ο καταναλωτής έχει στη διάθεσή του ένα ποσό (εισόδημα) M το οποίο και δαπανά πλήρως στην αγορά των δύο προϊόντων ή του προϊόντος και όλων των υπόλοιπων προϊόντων

$$p_x x + p_y y = M$$

όπου p_x, p_y οι τιμές των αγαθών x, y και $p_x x$, $p_y y$ η αντίστοιχη **δαπάνη** αγοράς των αγαθών.

Στο επόμενο εξάμηνο θα μάθουμε για μεγιστοποίηση συναρτήσεων με περισσότερες από μια ερμηνευτικές μεταβλητές και υπό περιορισμό. Για το μάθημά μας, όταν αντιμετωπίσουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας προβαίνουμε σε αντικατάσταση από τον περιορισμό

$$y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x$$

άρα θέτουμε

$$u(x, y(x))$$

και επιλύουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_x u(x, y(x))$$

Σημειώνουμε ότι η οριακή χρησιμότητα για κάθε αγαθό πρέπει να είναι θετική

$$MU_x = \frac{du(x, \bar{y})}{dx} > 0$$

όπου $\bar{y}$ υποδηλώνει ότι κρατάμε (ή θεωρούμε) την κατανάλωση (ή ζήτηση) του αγαθού y σταθερή και μεταβάλουμε τη ζήτηση του αγαθού x.

1.1.1 Παράδειγμα

Ερώτηση: Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha \ln x + \beta \ln y \\ u(x, y) &: A \subseteq \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

όπου $\alpha, \beta > 0$ εκφράζουν προτιμήσεις του αντιπροσωπευτικού καταναλωτή σχετικά με τα αγαθά x και y. Βρείτε τη συνάρτηση κατανάλωσης (συνάρτηση ζήτησης) του αγαθού ενδιαφέροντος (του x) και μετά τη συνάρτηση κατανάλωσης του y.

Υπολογίστε την ελαστικότητα ζήτησης και την εισοδηματική ελαστικότητα για τη ζήτηση του αγαθού x.

Απάντηση: Αντικαθιστούμε τον περιορισμό

$$p_x x + p_y y = M \Rightarrow y = \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x$$

όπου p_x, p_y οι τιμές των αγαθών x, y αντίστοιχα και M το διαθέσιμο εισόδημα, στη συνάρτηση χρησιμότητας και λαμβάνουμε

$$u\left(x, y\left(x\right)\right) = u\left(x\right) = \alpha \ln x + \beta \ln\left(\frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)$$

Το πρόβλημα προς μεγιστοποίηση παίρνει τη μορφή

$$\max_x u(x)$$

Σ.Π.Τ

$$u'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta \frac{p_x}{p_y}}{\frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x} = 0 \Rightarrow ...x^* = \frac{M}{p_x}\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}$$

Το στάσιμο σημείο είναι το $x^*, u(x^*)$. Στο x^* η κλίση της συνάρτησης χρησιμότητας μηδενίζεται $u'(x^*) = 0$ (αναγκαία συνθήκη για βελτιστοποίηση της συνάρτησης και στην προκειμένη περίπτωση για εύρεση του μέγιστου).

Σ.Δ.Τ

$$u''(x) = -\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2}{\left(\frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^2} < 0 \text{ , } \forall x \in A$$

άρα και για το στάσιμο σημείο $x^* = \frac{M}{p_x}\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}$ ικανοποιείται η ανισότητα

$$u''(x^*) < 0$$

οπότε στο x^* η συνάρτηση χρησιμότητας έχει εσωτερικό ολικό και μοναδικό μέγιστο.

Η συνάρτηση ζήτησης για το αγαθό x^* δίνεται από την

$$x^* = \frac{M}{p_x}\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}$$

ενώ (από την εξίσωση του περιορισμού) **η συνάρτηση ζήτησης για το αγαθό**

y^* δίνεται από

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x^* \\ &= \frac{M}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}\left(\frac{M}{p_x}\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\right) \\ &= \ldots \\ &= \frac{M}{p_y}\frac{\beta}{(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Ελαστικότητα ζήτησης. Αφού

$$\ln x^* = \ln M - \ln p_x + \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

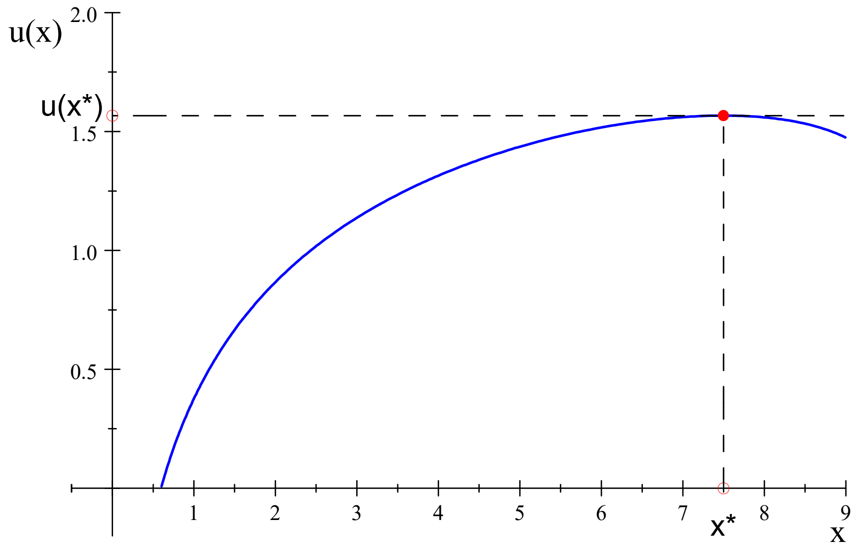
έχουμε

$$\varepsilon_p^{(x)} = \frac{d\ln x^*}{d\ln p_x} = -1$$

Ελαστικότητα εισοδήματος. Παρομοίως

$$\varepsilon_M^{(x)} = \frac{d\ln x^*}{d\ln M} = 1$$

Γράφημα με τιμές παραμέτρων $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.25$, $p_x = 1$, $p_y = 2$, $M = 10$ όπου $x^* = 7.5$ και $u(x^*) = 1.567$



1.2 Συνάρτηση ζήτησης και προσφοράς

Η **συνάρτηση ζήτησης**

$$Q = D(P) : A_1 \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow B_1 \subseteq \mathbb{R}_+$$

θα έχει αρνητική κλίση

$$\frac{dD(P)}{dP} < 0$$

Η **αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης (**η οποί αποδίδει την υψηλότερη τιμή P στην οποία θα ζητηθεί ποσότητα Q**)** ορίζεται από την

$$P = D^{-1}(Q)$$

Σχετικά με την παράγωγο της συνάρτησης ζήτησης D' και την παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης ζήτησης $D^{-1'}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP}\frac{dP}{dQ} &= 1 \Rightarrow D' \cdot D^{-1'} = 1 \Rightarrow \\ D' &= \frac{1}{D^{-1'}} \end{aligned}$$

Η **συνάρτηση προσφοράς**

$$Q = S(P) : A_2 \subseteq \mathbb{R}_+ \to B_2 \subseteq \mathbb{R}_+$$

θα έχει θετική κλίση ως προς την τιμή

$$\frac{dS(P)}{dP} > 0$$

1.3 Συνάρτηση παραγωγής

Η συνάρτηση παραγωγής δίνει το επίπεδο του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση των συντελεστών παραγωγής ή εισροών

$$Q = F(L) \ , \ Q = F(K) \ , \ Q = F(K, L) \ , \ Q = F(\text{εισροές})$$

- Μέση συνάρτηση παραγωγής (παραγόμενο προϊόν ανά μονάδα εισροής)

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{F(L)}{L}$$

- Οριακή συνάρτηση (οριακό προϊόν)

$$MP_L = \frac{dQ}{dL} = F'(L)$$

Φθίνουσες αποδόσεις υποδηλώνουν ότι

$$MP_L > 0 \text{ ή } F'(L) > 0$$

και

$$MP_L' < 0 \text{ ή } F''(L) < 0$$

1.4 Συνάρτηση εσόδων

Η συνάρτηση εσόδων δίνεται από την τιμή αγοράς του προϊόντος P επί την ποσότητα που πωλήθηκε Q.

Η συνάρτηση εσόδων θεωρείται ότι εξαρτάται από το επίπεδο παραγωγής που διατέθηκε στην αγορά και πωλήθηκε.

Όταν η επιχείρηση "αντιμετωπίζει" συνάρτηση ζήτησης $Q = D(P)$ τότε αν θεωρήσουμε τα έσοδα ως συνάρτηση της παραγωγής $TR(Q)$ έχουμε

$$TR(Q) = P \cdot Q = D^{-1}(Q) \cdot Q$$

Οπότε, γενικά, η συνάρτηση εσόδων ως συνάρτηση του προϊόντος δίνεται από

$$TR(Q) = \begin{cases} PQ \\ \text{ή} \\ D^{-1}(Q) \cdot Q \end{cases}$$

- **Μέσο έσοδο** ανά μονάδα προϊόντος

$$ATR = \frac{TR}{Q} = \begin{cases} P \\ \text{ή} \\ D^{-1}(Q) \end{cases}$$

- **Οριακό έσοδο** (έσοδο από μία επιπλέον μονάδα παραγώμενου προϊόντος (που πωλείται)

$$MR(Q) = \frac{dTR}{dQ} = \begin{cases} P \\ \text{ή} \\ D^{-1'} \cdot Q + P \end{cases}$$

- Οριακό έσοδο και ελαστικότητα ζήτησης

$$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = \frac{dD(P)}{dP}\frac{P}{Q}$$

Άρα και

$$\frac{1}{\varepsilon_d} = \frac{1}{\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}} = \frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P} = \frac{dD^{-1}}{dQ}\frac{Q}{P}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} MR(Q) &= \frac{dTR}{dQ} = D^{-1'} \cdot Q + P \\ &= \left[D^{-1'} \cdot \frac{Q}{P} + 1\right] P \\ &= \left[\frac{1}{\varepsilon_d} + 1\right] P \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} MR(Q) &= \left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_d|}\right] P \\ &= \left(\frac{|\varepsilon_d| - 1}{|\varepsilon_d|}\right) P \end{aligned}$$

ή

$$P = \left(\frac{|\varepsilon_d|}{|\varepsilon_d| - 1}\right) MR : \begin{cases} 0 < |\varepsilon_d| < 1 \text{ , ; } P < 0 \\ |\varepsilon_d| = 1 \text{ , ; } P = ; \\ |\varepsilon_d| > 1 \rightarrow \infty \Rightarrow P = MR \end{cases}$$

Στην περίπτωση που θεωρούμε την τιμή δεδομένη, π.χ. $P = \bar{P}$, δηλαδή δεν αντιμετωπίζει η επιχείρηση κάποια συνάρτηση ζήτησης προϊόντος, έχουμε ότι $D^{-1'} = 0$ και $\varepsilon_d = -\infty$ άρα

$$MR(Q) = P$$

1.5 Συνάρτηση Κόστους

$$TC(Q) = VC(Q) + FC \text{ , } \frac{dFC}{dQ} = 0$$

- Μέσο κόστος

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{VC(Q)}{Q} + \frac{FC}{Q} = AVC + AFC$$

Μακροχρόνια (μπορούν να μεταβληθούν οι αποφάσεις σχετικά με όλους τους συντελεστές παραγωγής ή εισροές) συνήθως θέτουμε $FC = 0$

- Οριακό Κόστος
$$MC(Q) = \frac{dTC}{dQ} = \frac{dVC(Q)}{dQ}$$

- Η συνάρτηση κόστους έχει συνήθως σχήμα S με το οριακό κόστος αρχικά να φθίνει μέχρι ένα ελάχιστο και μετά να αυξάνει. Παρομοίως το μέσο κόστος.

- Σχέση MC και AC. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση μέσου κόστους ως προς Q και έχουμε
$$\begin{aligned} \frac{dAC}{dQ} &= \frac{TC' \cdot Q - TC}{Q^2} = \frac{MC \cdot Q - TC}{Q^2} \\ &= \frac{MC - AC}{Q} \end{aligned}$$
  - Άρα όταν $MC = AC \Rightarrow \frac{dAC}{dQ} = 0$ και η συνάρτηση μέσου κόστους έχει μηδενική κλίση
  - Άρα όταν $MC > AC \Rightarrow \frac{dAC}{dQ} > 0$ και η συνάρτηση μέσου κόστους έχει θετική κλίση ενώ το οριακό κόστος είναι μεγαλύτερο του μέσου κόστους
  - Άρα όταν $MC < AC \Rightarrow \frac{dAC}{dQ} < 0$ και η συνάρτηση μέσου κόστους έχει αρνητική κλίση ενώ το οριακό κόστος είναι μικρότερο του μέσου κόστους

1.6 Συνάρτηση κέρδους

1.6.1 Τέλειος ανταγωνισμός

Υποθέσεις

- Δεδομένες τιμές αγοραστών και πωλητών. Η επιχείρηση δεν μπορεί να θέσει την τιμή του προϊόντος. Άρα αντιμετωπίζει μία επίπεδη συνάρτηση ζήτησης. Η συνάρτηση ζήτησης όμως του κλάδου (ή της συγκεκριμένης αγοράς) έχει αρνητική κλίση,

- ομοιογενές προϊόν,

- ελευθερία εισόδου και εξόδου επιχειρήσεων στην αγορά,
- ανυπαρξία κρατικής παρέμβασης,
- πλήρης κινητικότητα των συντελεστών παραγωγής (ανάμεσα σε επιχειρήσεις, κλάδους, περιοχές),
- οι επιχειρήσεις στόχο έχουν την μεγιστοποίηση του κέρδους

Η συνάρτηση κέρδους (ως συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας Q) δίνεται από

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

ή για συντομία γράφουμε

$$\Pi = TR - TC$$

Προβαίνουμε σε αντικατάσταση της συνάρτησης εσόδων και

$$\Pi(Q) = PQ - TC(Q)$$

όπου η τιμή P είναι **σταθερή (καθορίζεται από την αγορά)**.

Στόχος της επιχείρησης είναι να επιλέξει επίπεδο παραγωγής Q το οποίο μεγιστοποιεί τα κέρδη της. Αυτό δεν σημαίνει ότι η επιχείρηση θα έχει θετικά κέρδη (π.χ. το βέλτιστο επίπεδο παραγωγής μπορεί να αντιστοιχεί σε ελαχιστοποίηση βραχυχρόνιας ζημίας).

Σ.Π.Τ και οριακή συνθήκη μεγιστοποίησης κερδών

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(Q)}{dQ} &= \frac{dTR(Q)}{dQ} - \frac{dTC(Q)}{dQ} \\ &= MR - MC = 0 \Rightarrow \\ MR(Q^*) &= MC(Q^*) \\ &\Rightarrow P = MC(Q^*) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ισότητα οριακού εσόδου και τιμής

$$\frac{dTR}{dQ} = MR = P$$

Σ.Δ.Τ

$$\left.\frac{d^2\Pi}{dQ^2}\right|_{Q=Q^*} = MR\left(Q^*\right)' - MC\left(Q^*\right)' < 0 \Rightarrow MR\left(Q^*\right)' < MC\left(Q^*\right)'$$

Όμως αφού $MR = P$, $\forall Q > 0$ έχουμε $MR' = 0$ και

Σ.Δ.Τ

$$\left.\frac{d^2\Pi}{dQ^2}\right|_{Q=Q^*} = -MC\left(Q^*\right)' < 0 \Rightarrow MC\left(Q^*\right)' > 0$$

δηλαδή το μέγιστο που προκύπτει από την οριακή συνθήκη βεβαιώνεται όταν το οριακό κόστος έχει θετική κλίση στο στάσιμο σημείο ή γενικότερα (και αυστηρότερα) όταν θεωρήσουμε εξ'αρχής ότι το οριακό κόστος είναι μία μονότονη γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Συνάρτηση προσφοράς επιχείρησης στον τέλειο ανταγωνισμό με μονοτονική συνάρτηση οριακού κόστους

Προηγουμένως διαπιστώσαμε ότι Q^* τέτοιο ώστε $P = MC\left(Q^*\right)$ προσδιορίζει τη παραγόμενη και προσφερόμενη ποσότητα όταν η επιχείρηση προβαίνει σε βελτιστοποίηση δηλαδή μεγιστοποίηση του κέρδους της.

Γενικά λοιπόν, για κάθε επίπεδο τιμής P, η προσφερόμενη ποσότητα ικανοποιεί την εξίσωση της **Σ.Π.Τ**

$$P = MC\left(Q\right)$$

άρα η συνάρτηση προσφοράς δίνεται από

$$Q = S(P) = MC^{-1}(P)$$

δηλαδή από την **αντίστροφη συνάρτηση του οριακού κόστους**.

Η συγκεκριμένη αντιστροφή ορίζεται ως συνάρτηση όταν η συνάρτηση $MC(Q)$ είναι μονότονη[1] (για παράδειγμα -αγνοώντας τυχόν σταθερές- αν $TC\left(Q\right) = Q^2$ τότε $MC\left(Q\right) = 2Q$). Αν έχει σχήμα U (π.χ. $TC\left(Q\right) = Q^3$ οπότε το οριακό κόστος $MC\left(Q\right) = 3Q^2$) τότε θα μελετήσουμε τη συνάρτηση προσφοράς με βάση τη συνάρτηση μέσου κόστους $AC\left(Q\right) = \frac{TC(Q)}{Q}$.

[1] Η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ της $y = f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν $f(x)$ είναι μονότονη, δηλαδή αύξουσα ή φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Επιστρέφοντας στην υπόθεση της μονότονης συνάρτησης οριακού κόστους, η συνάρτηση προσφοράς πρέπει να καλύπτει και την οριακή περίπτωση $Q = 0$ όπου η παραγωγή σταματά, δηλαδή πρέπει να μελετήσουμε και το συνοριακό σημείο $Q = 0$.

Το συγκεκριμένο επίπεδο παραγωγής (σταματάει η παραγωγή) αποτελεί ολικό και μοναδικό συνοριακό μέγιστο της συνάρτησης κέρδους όταν

$$\Pi'(0) < 0 \Rightarrow P - MC(0) < 0 \Rightarrow P < MC(0)$$

Άρα, συνολικά, η συνάρτηση προσφοράς της επιχείρησης στον τέλειο ανταγωνισμό - υπό την υπόθεση ότι η συνάρτηση $MC(Q)$ είναι μονότονη και έχει καλά ορισμένη αντίστροφη συνάρτηση $MC^{-1}(\cdot)$ - δίνεται από

$$Q = S(P) = \begin{cases} 0 & , \quad P < MC(0) \\ MC^{-1}(P) & , \quad P \geq MC(0) \end{cases}$$

Άσκηση Έστω η συνάρτηση κόστους

$$C(Q) = Q^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

για μία επιχείρηση που λειτουργεί σε καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού. Η τιμή αγοράς του προϊόντος είναι P.

- Προβείτε σε μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους και βρείτε τη συνάρτηση προσφοράς.
- Υπολογίστε τα κέρδη της επιχείρησης.

Απάντηση

$$\Pi(Q) = PQ - Q^2$$

Σ.Π.Τ

$$\Pi' = P - 2Q = 0 \Rightarrow Q^* = \frac{P}{2}$$

Σ.Δ.Τ

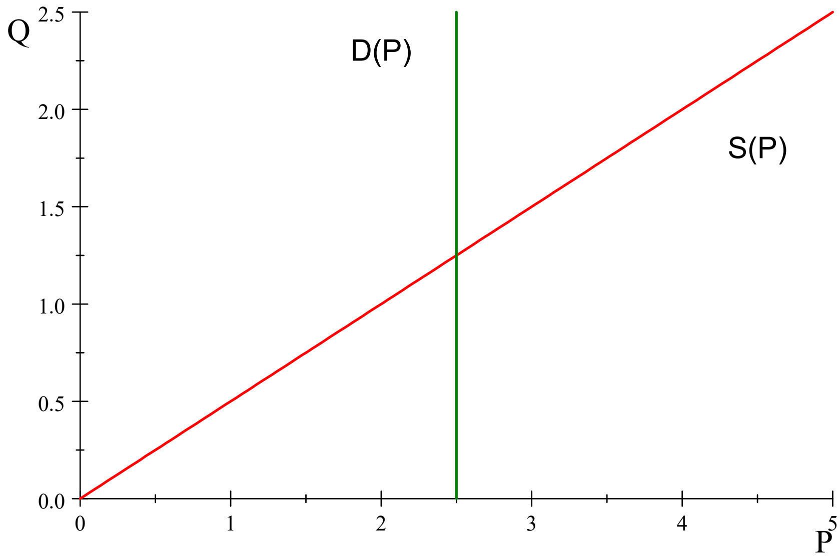
$$\Pi'' = -2 < 0 \ , \ \forall Q \in \mathbb{R}_+$$

Η συνάρτηση προσφοράς δίνεται από

$$Q = S(P) = \begin{cases} 0 & , \quad P < 0 = MC(0) \\ \frac{P}{2} & , \quad P \geq 0 = MC(0) \end{cases}$$

αφού η συνάρτηση οριακού κόστους $MC(Q) = 2Q$ είναι μονότονη.

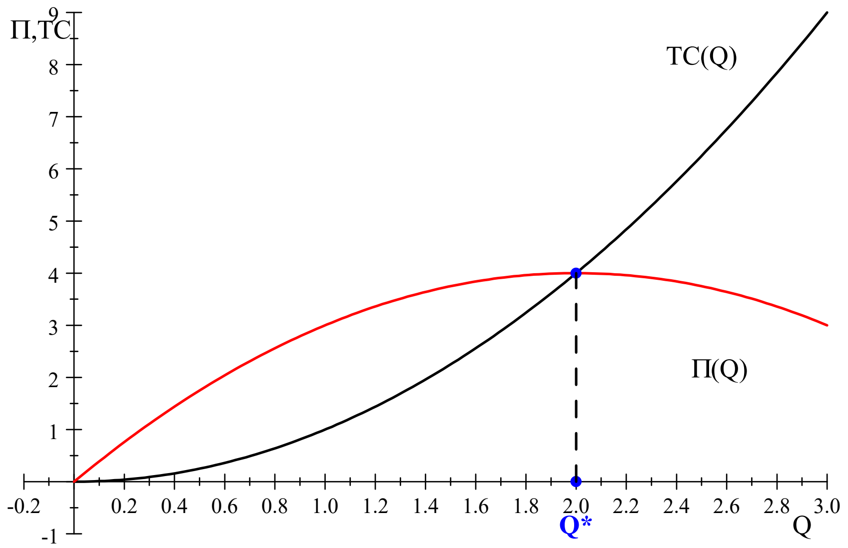
Το παρακάτω γράφημα δείχνει την αγορά (ζήτηση και προσφορά προϊόντος) για τη συγκεκριμένη επιχείρηση όταν $P = 2.5$

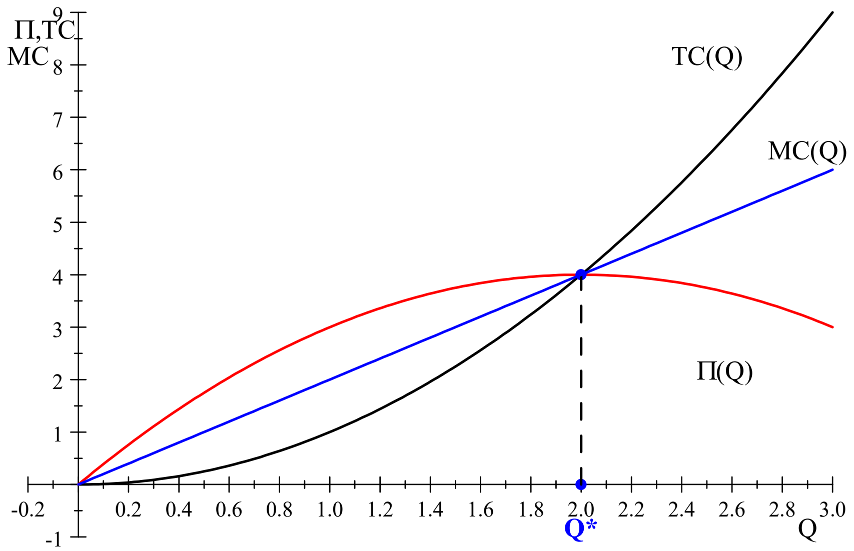


Τα κέρδη της επιχείρησης είναι ίσα με

$$\Pi(Q^*) = PQ^* - Q^{*2} = \frac{P^2}{4}$$

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τις συναρτήσεις $TC(Q), \Pi(Q)$ όταν $P = 4$ για $Q \in [0, 3]$





Κέρδη και ζημίες

Το κατά πόσο η επιχείρηση έχει κέρδη ή ζημίες βεβαιώνεται από τη σύγκριση τιμής και μέσου κόστους . Γιατί;

Από τη συνάρτηση κέρδους έχουμε

$$\begin{aligned}\Pi\left(Q^{*}\right) &= PQ^{*} - TC(Q^{*}) \\ &= Q^{*}\left(P - \frac{TC(Q^{*})}{Q^{*}}\right) \\ &= Q^{*}\left[P - AC(Q^{*})\right]\end{aligned}$$

Έστω ότι $Q^{*} > 0$. Τότε

- $\Pi\left(Q^{*}\right) > 0$ όταν $P > AC(Q^{*})$
- $\Pi\left(Q^{*}\right) = 0$ όταν $P = AC(Q^{*})$ (break even point)
- και $\Pi\left(Q^{*}\right) < 0$ όταν $P < AC(Q^{*})$

Επίσης, όταν η συνάρτηση οριακού κόστους είναι μη-μονοτονική τότε το πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί να μην δίνει ένα (μοναδικό) τοπικό ή ολικό μέγιστο αλλά περισσότερα.

Για μία επιχείρηση που λειτουργεί σε καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού, η βραχυχρόνια καμπύλη προσφοράς δίνεται από το τμήμα της καμπύλης του οριακού κόστους που βρίσκεται πάνω από το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος.

Η **βραχυχρόνια** συνάρτηση προσφοράς της επιχείρησης όταν δεν αντιμετωπίζουμε μονότονη συνάρτηση οριακού κόστους δίνεται από

$$Q = S(P) = \begin{cases} 0 & , \; P < AVC_{\min} \\ \{0, q_m\} & , \; P = AVC_{\min} \\ MC^{-1}(P) & , \; P > AVC_{\min} \end{cases}$$

όπου

$$q_m = \arg\min_{Q} AVC\left(Q\right)$$

και

$$AVC_{\min} = AVC\left(q_m\right)$$

Μακροχρόνια θεωρούμε ότι τα σταθερά κόστη είναι μηδενικά ή ότι $C(0) =$

0 άρα η συνάρτηση προσφοράς γίνεται

$$Q = S(P) = \begin{cases} 0 & , \ P < AC_{\min} \\ \{0, q_m\} & , \ P = AC_{\min} \\ MC^{-1}(P) & , \ P > AC_{\min} \end{cases}$$

1.6.2 Άσκηση[2]

Έστω η συνάρτηση κόστους

$$TC(Q) = 2Q^3 - 18Q^2 + 60Q + 50$$

για μία επιχείρηση που λειτουργεί σε καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού.

1. Βρείτε τη συνάρτηση οριακού κόστους $MC(Q)$ και τη συνάρτηση μέσου κόστους $AC(Q)$ και μέσου μεταβλητού κόστους $AVC(Q)$

2. Ελαχιστοποιήστε τη συνάρτηση $AVC(Q)$. Ποιό είναι το q_m και ποιό το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος $AVC_{\min}$;

3. Γράψτε τη συνάρτηση κέρδους. Ποιά ποσότητα μεγιστοποιεί τη συνάρτηση κέρδους; Τι περιορισμούς πρέπει να πληροί η τιμή αγοράς P ώστε το πρόβλημα να έχει πραγματικές λύσεις; Ποιούς περιορισμούς πρέπει να πληρεί το επίπεδο παραγωγής ώστε να έχουμε καλά ορισμένο πρόβλημα;

4. Βρείτε τη συνάρτηση προσφοράς της επιχείρησης. Σχεδιάστε τη συνάρτηση προσφοράς στο πρόγραμμα Graph.

5. Ποιά ποσότητα μεγιστοποιεί τη συνάρτηση κέρδους όταν $P = 10$; ποιά τα μέγιστα κέρδη;

6. Ποιά ποσότητα μεγιστοποιεί τη συνάρτηση κέρδους όταν $P = 36$;

7. Σχεδιάστε τη συνάρτηση προσφοράς και τις συναρτήσεις ζήτησης για τα υπο-ερωτήματα 5 και 6 στο πρόγραμμα Graph.

[2] Προσαρμογή άσκησης από άσκηση του Dieter Balkenborg, Departments of Economics, University of Exeter, BEEM103 -- Optimization Techiniques for Economists, Homework Week 2.

8. Σχεδιάστε στο Graph τις συναρτήσεις κέρδους για $P = 10, P = 19.5, P = 36$. Σχεδιάστε τα σημεία παραγωγής και μέγιστου κέρδους σε όλες τις υπο-περιπτώσεις και σχολιάστε.

Απάντηση

1.
$$MC(Q) = \frac{dTC}{dQ} = 6Q^2 - 36Q + 60$$
$$AC(Q) = \frac{TC}{Q} = 2Q^2 - 18Q + 60 + \frac{50}{Q}$$
$$AVC(Q) = \frac{VC}{Q} = 2Q^2 - 18Q + 60$$

2.
$$\min_Q AVC(Q)$$

Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} \frac{d(AVC)}{dQ} &= 0 \Rightarrow 4Q - 18 = 0 \Rightarrow \\ q_m &= 4.5 \end{aligned}$$

Σ.Δ.Τ

$$\frac{d^2(AVC)}{dQ^2} = 4 > 0$$

για κάθε Q άρα και για το q_m. Η συνάρτηση μέσου μεταβλητού κόστους είναι **κυρτή** και το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος είναι ίσο με

$$AVC_{\min} = AVC(q_m) = 2 \cdot (4.5)^2 - 18 \cdot (4.5) + 60 = 19.5$$

3. Η συνάρτηση κέρδους δίνεται από τη διαφορά εσόδων - κόστους άρα

$$\Pi(Q) = PQ - 2Q^3 + 18Q^2 - 60Q - 50$$

Θα μεγιστοποιήσουμε τα κέρδη ως προς το επίπεδο παραγωγής

$$\max_{Q} \Pi\left(Q\right)$$

Σ.Π.Τ

$$\frac{d\Pi\left(Q\right)}{dQ} = 0 \Rightarrow P - 6Q^2 + 36Q - 60 = 0 \Rightarrow$$
$$-6Q^2 + 36Q - (60 - P) = 0 \Rightarrow$$

$$Q_1^* = \frac{18 - \sqrt{6P - 36}}{6}$$
$$Q_2^* = \frac{18 + \sqrt{6P - 36}}{6}$$

Είναι εμφανές ότι το πρόβλημα δίνει πραγματικές λύσεις όταν η τιμή ικανοποιεί τον περιορισμό $P \geq 6$. Επίσης έχουμε δύο στάσιμα σημεία που ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη (συνθήκη πρώτης τάξης : Σ.Π.Τ) για μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους, τουλάχιστον τοπικά.

Σ.Δ.Τ

$$\frac{d^2\Pi\left(Q\right)}{dQ^2} = -12Q + 36$$

όπου

$$\frac{d^2\Pi\left(Q\right)}{dQ^2} < 0 \Rightarrow -12Q + 36 < 0 \Rightarrow Q > 3$$

Άρα η (συνθήκη δεύτερης τάξης) Σ.Δ.Τ για μεγιστοποίηση ικανοποιείται για κάθε $Q > 3$. Ποιό από τα Q_1^*, Q_2^* λοιπόν να επιλέξουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα; Παρατηρείστε ότι

$$Q_1^* = \frac{18 - \sqrt{6P - 36}}{6} = 3 - \frac{\sqrt{6}\sqrt{P - 6}}{6}$$

και

$$Q_2^* = 3 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{P - 6}}{6}$$

άρα

$$Q_1^* \leq 3, \forall P \geq 6$$

και δεν μπορεί να αποτελεί επιλογή για το επίπεδο παραγωγής αφού δεν πληρεί τη Σ.Δ.Τ. Επιλέγουμε λοιπόν το στάσιμο σημείο $Q_2^* = 3 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{P-6}}{6}$ το οποίο ικανοποιεί τη Σ.Δ.Τ

$$\left.\frac{d^2\Pi\left(Q\right)}{dQ^2}\right|_{Q=Q_2^*} < 0$$

4. Σύμφωνα με τη θεωρία όπως δίνεται παραπάνω, επειδή έχουμε σταθερά κόστη διαφορετικά του μηδέν υποθέτουμε ότι λειτουργούμε ως επιχείρηση σε βραχυχρόνιο ορίζοντα άρα η συνάρτηση προσφοράς $Q = S\left(P\right)$ της επιχείρησης δίνεται από

$$Q = S(P) = \begin{cases} 0 & , \quad P < 19.5 \\ \{0, 4.5\} & , \quad P = 19.5 \\ 3 + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{P-6} & , \quad P > 19.5 \end{cases}$$

Δηλαδή, **όταν** $P < 19.5$ η επιχείρηση σταματά την παραγωγή $Q^* = 0$ αφού δεν υπερκαλύπτει το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος της, **όταν** $P = 19.5$ τότε είναι αδιάφορη μεταξύ μη-παραγωγής $Q^* = 0$ και παραγωγής $Q^* = q_m = 4.5$ μονάδων προϊόντος αφού υπερκαλύπτει ακριβώς το $AVC_{\min}$ ενώ **όταν** $P > 19.5$ η επιχείρηση παράγει και προσφέρει στην αγορά

$$Q^* = 3 + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{P-6}$$

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τη συνάρτηση προσφοράς.

5. Όταν η τιμή είναι $P = 10$ η επιχείρηση προτιμά να μην παράγει, άρα $Q^* = 0$ αφού η τιμή δεν υπερκαλύπτει το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος.

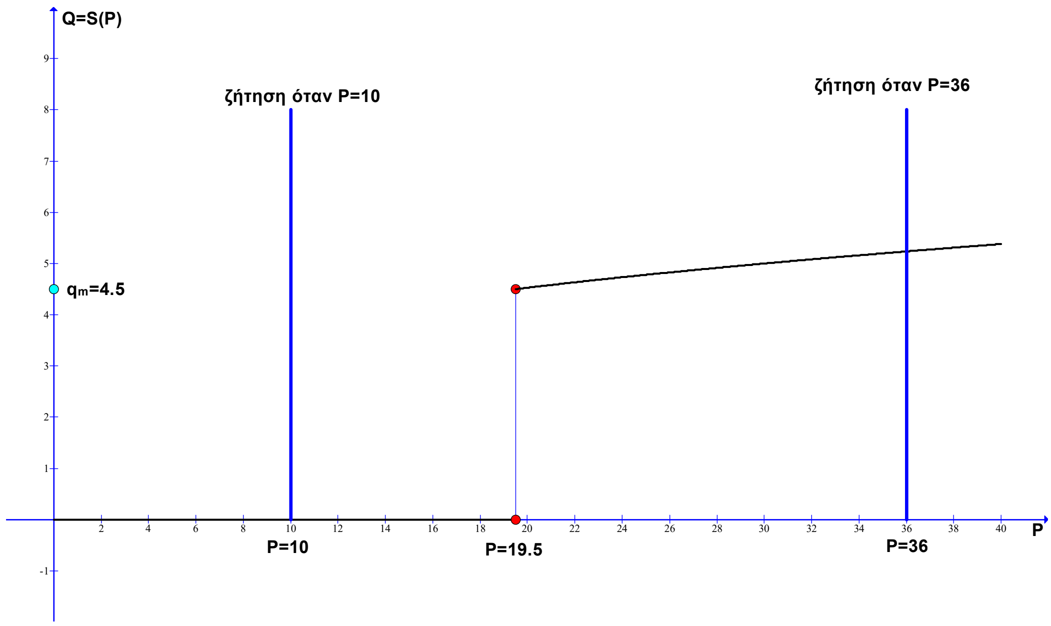
6. Η επιχείρηση θα παράγει

$$\begin{aligned} Q^* &= 3 + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{P-6} \\ &= 3 + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{36-6} \\ &= 5.2361 \end{aligned}$$

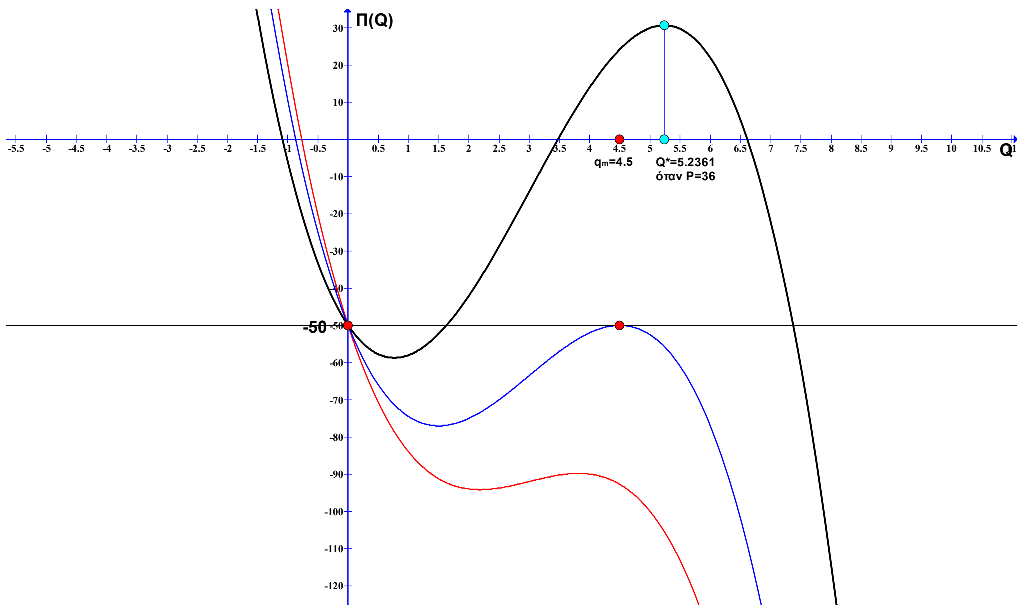
μονάδες προϊόντος και θα έχει κέρδος (μέγιστο) ίσο με

$$\begin{aligned} \Pi\left(Q^*\right) &= (36)(5.2361) - 2(5.2361)^3 + 18(5.2361)^2 - 60(5.2361) - 50 \\ &= 30.721 \end{aligned}$$

7. Το παρακάτω γράφημα δείχνει τη συνάρτηση προσφοράς και ζήτησης για $P = 10$ και $P = 36$.



8. Το ζητούμενο γράφημα φαίνεται παρακάτω



1.6.3 Μονοπώλιο

Υποθέσεις

- μία μοναδική επιχείρηση. Η επιχείρηση είναι ο ίδιος ο “κλάδος”
- δεν υπάρχουν στενά υποκατάστατα του προϊόντος
- η επιχείρηση θέτει τις τιμές καθορίζοντας την ποσότητα παραγωγής και διάθεσης στην αγορά
- σημαντικά εμπόδια εισόδου - εξόδου στην αγορά (φυσικά μονοπώλια, μεγάλα σταθερά κόστη, πατέντες, αδειοδότηση, έλεγχος συντελεστών παραγωγής)

Στο μονοπώλιο, η επιχείρηση αντιμετωπίζει συνάρτηση ζήτησης (τη συνάρτηση ζήτησης της αγοράς ή του προϊόντος). Υπάρχουν πολλοί αγοραστές αλλά ένας μόνο πωλητής. Συνεπώς, στο μονοπώλιο θα έχουμε μία συνάρτηση ζήτησης $Q = D(P)$ και θα αντικαθιστούμε την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης $P = D^{-1}(Q)$ στη συνάρτηση κέρδους. Δεν θα θεωρείται η τιμή P δεδομένη. Έτσι, θα θεωρούμε τη συνάρτηση κέρδους ως συνάρτηση του επιπέδου παραγωγής.

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους του μονοπωλητή λύνεται ως εξής:
Έστω η συνάρτηση κέρδους

$$\Pi\left(Q\right) = PQ - TC(Q) = D^{-1}(Q) \cdot Q - TC(Q)$$

Σ.Π.Τ

$$\frac{d\Pi}{dQ} = MR - MC = 0 \Rightarrow MR\left(Q^{*}\right) = MC\left(Q^{*}\right)$$

- Άρα το μονοπώλιο επιλέγει την ποσότητα εκείνη στην οποία το οριακό έσοδο είναι ίσο με το οριακό κόστος. Ο μονοπωλητής μεταβάλλει την τιμή αγοράς προσαρμόζοντας το επίπεδο του προϊόντος στην αγορά.

- Δεν ισχύει $MR = P \; \forall Q > 0$ αφού η επιχείρηση αντιμετωπίζει συνάρτηση ζήτησης και είδαμε προηγουμένως ότι

$$MR(Q) = \left[\frac{1}{\varepsilon_d} + 1\right] P$$

άρα στο στάσιμο σημείο

$$MR\left(Q^*\right) = MC\left(Q^*\right) \Rightarrow \left[\frac{1}{\varepsilon_d} + 1\right] P^* = MC\left(Q^*\right)$$

Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\varepsilon_d} + 1\right] P^* = MC\left(Q^*\right) \Rightarrow \\ MC\left(Q^*\right) - P^* = \frac{1}{\varepsilon_d} P^* \Rightarrow \\ \lambda = \frac{P^* - MC\left(Q^*\right)}{P^*} = \frac{1}{|\varepsilon_d|} \end{aligned}$$

Το λ καλείται και δείκτης Lerner και είναι ένας δείκτης μονοπωλιακής δύναμης (market power) ενώ $P^* - MC\left(Q^*\right) > 0$ (τιμολόγηση με προσαύξηση κόστους, mark-up). Μάλιστα

$$0 < \lambda < 1$$

αφού το μονοπώλιο δεν λειτουργεί (δεν παράγει ποσότητες στο ανελαστικό κομμάτι της ζήτησης). Ο μονοπωλητής επιλέγει ένα επίπεδο προϊόντος για το οποίο η ζήτηση είναι ελαστική.

Σ.Δ.Τ

Η συνθήκη δεύτερης τάξης είναι παρόμοια με αυτή της περίπτωσης του τέλειου ανταγωνισμού,

$$\left.\frac{d^2\Pi}{dQ^2}\right|_{Q=Q^*} = MR\left(Q^*\right)' - MC\left(Q^*\right)' < 0 \Rightarrow MR\left(Q^*\right)' < MC\left(Q^*\right)'$$

Σημείωση: Κατά τη διαδικασία της μεγιστοποίησης κέρδους μπορεί να συναντήσετε δύο (ή και περισσότερα) στάσιμα σημεία. Επιλέγετε αυτό που αντιστοιχεί σε θετική ποσότητα παραγωγής. Αν και τα δύο θετικά επιλέγετε αυτό που θα δώσει μεγαλύτερο κέρδος.

2 Ζήτηση εισροών

Αν προχωρήσουμε ακόμα βαθύτερα όλη την προηγούμενη ανάλυση μπορούμε να μελετήσουμε την ζήτηση εισροών, π.χ **την ζήτηση εργασίας** σε ένα δεδομένο περιβάλλον αγοράς.

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε **τέλειο ανταγωνισμό** και η συνάρτηση παραγωγής δίνεται από

Συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση παραγωγής. **Θετικά** οριακά προϊόντα. **Φθίνοντα** οριακά προϊόντα

$$Q = F(L)$$

με

Φθίνουσες αποδόσεις της εργασίας ή του κεφαλαίου (ο νόμος των φθινουσών αποδόσεων)

$$F'(L) > 0 \ , \ F''(L) < 0 \ , \ \forall L > 0$$

δηλαδή η συνάρτηση παραγωγής είναι **αυστηρώς κοίλη** για κάθε $L \geq 0$.

Το κόστος θα δίνεται για ευκολία (και ρεαλισμό) από τη γραμμική συνάρτηση

$$TC(L) = wL$$

όπου w το ωρομίσθιο (κόστος ανά μονάδα εργασίας).

Η ζήτηση εργασίας προσδιορίζεται από τις **Σ.Π.Τ** όταν παραγωγίσουμε ως προς L τη συνάρτηση κέρδους

$$\begin{aligned} \Pi(L) &= pQ - TC \\ &= pF(L) - wL \end{aligned}$$

Έχουμε

Σ.Π.Τ

$$\frac{d\Pi}{dL} = pF' - w = 0 \Rightarrow MP_L = \frac{w}{p}$$

Σ.Δ.Τ

$$\frac{d^2\Pi}{dL^2} = \underbrace{p}_{(+)}\underbrace{F''}_{(-)} < 0$$

Άρα η συνάρτηση ζήτησης εργασίας L^* προσδιορίζεται από την **οριακή συνθήκη**

$$MP_L\left(L^*\right) = \frac{w}{p}$$

όπου το οριακό προϊόν της εργασίας είναι ίσο με το πραγματικό ωρομίσθιο.

3 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = A\sqrt{L}$$

με συνάρτηση κόστους

$$C = wL$$

και ισχύουν

$$L \geq 0 \ \ , \ \ A > 0 \ \ , \ \ w > 0 \ \ , \ \ p > 0$$

όπου p η τιμή του προϊόντος σε μία ανταγωνιστική αγορά.

1. Βρείτε τη ζήτηση εργασίας (Προβείτε σε βελτιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους $\Pi\left(\cdot\right)$ επιλέγοντας τον συντελεστή παραγωγής εργασία (πόσα άτομα πρέπει να προσλάβετε). Αρχικά βρίσκουμε το στάσιμο σημείο. Χρησιμοποιούμε τη Σ.Π.Τ)

2. Προβείτε σε χαρακτηρισμό του μέγιστου ή ελάχιστου (αν υπάρχουν) και

~~3.~~ σχολιάστε (χαρακτηρίστε) την επιλογή $L = 0$ (εμφανώς πρόκειται για το αριστερό άκρο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης κέρδους)

~~4.~~ Πως θα άλλαζε η ανάλυσή σας αν υπήρχε ο περιορισμός $L \leq c$, δηλαδή $L \in \left[0, c\right]$, όπου το c βρίσκεται α. δεξιά του σημείου $\frac{A^2}{4}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2}$, δηλαδή $c > \frac{A^2}{4}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2}$ και

β. αριστερά του $\frac{A^2}{4}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2}$, δηλαδή $c < \frac{A^2}{4}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2}$

Απάντηση

1. Η συνάρτηση κέρδους (ως συνάρτηση της εργασίας) δίνεται από

$$\begin{aligned} \Pi(L) &= pQ - TC = pF(L) - wL \\ &= pA\sqrt{L} - wL \end{aligned}$$

Το στάσιμο σημείο προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης των Σ.Π.Τ
Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dL} &= \frac{pA}{2}L^{-1/2} - w = 0 \Rightarrow \frac{pA}{2\sqrt{L}} - w = 0 \Rightarrow \\ L^* &= \frac{A^2p^2}{4w^2} > 0 \\ & \text{ή} \\ L^* &= L^*\left(\frac{w}{p}\right) = \frac{A^2}{4}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2} \end{aligned}$$

2. **Σ.Δ.Τ**

$$\frac{d^2\Pi}{dL^2} = -\underbrace{\frac{pA}{4}}_{(+)}\underbrace{L^{-3/2}}_{(+)} < 0 \ , \forall L > 0$$

Επειδή $\left.\frac{d^2\Pi}{dL^2}\right|_{L=L^*} < 0$ (τοπικό μέγιστο) και ισχύει για $\forall L > 0$ (για κάθε L εκτός του αριστερού ακραίου σημείου $L = 0$) το μέγιστο είναι **ολικό και μοναδικό**.

3. Επίσης, στο συνοριακό σημείο $L = 0$ έχουμε

$$\lim_{L\to 0^+} \frac{d\Pi}{dL} \to +\infty$$

και η συνάρτηση $\Pi(L)$ **δεν είναι δεξιά παραγωγίσιμη** στο 0.

Όμως, στο συνοριακό σημείο $L = 0$ έχουμε

$$\Pi(0) < \Pi(L) \ , \forall L \in (0, L_R]$$

όπου $L_R = A^2 \left(\frac{w}{p}\right)^{-2} = 4L^*$ επειδή

$$\begin{aligned} \Pi(0) &< \Pi(L) \Rightarrow 0 < \Pi(L) \Rightarrow 0 < pA\sqrt{L} - wL \Rightarrow \\ wL &< pA\sqrt{L} \Rightarrow \sqrt{L} < \frac{pA}{w} \Rightarrow L < A^2 \left(\frac{w}{p}\right)^{-2} = L_R \end{aligned}$$

άρα και $\Pi(0) = 0 < \Pi(L) \ , \forall L \in (0, L^*]$ αφού

$$L^* = \frac{A^2}{4} \left(\frac{w}{p}\right)^{-2} < A^2 \left(\frac{w}{p}\right)^{-2} = L_R$$

Οπότε το $L = 0$ αποτελεί (τουλάχιστον[3]) **τοπικό ελάχιστο** ενώ το στάσιμο σημείο

$$L^* = \frac{A^2}{4} \left(\frac{w}{p}\right)^{-2}$$

αποτελεί **ολικό μοναδικό μέγιστο**.

4. Έστω ότι υπάρχει ο περιορισμός στις προσλήψεις

$$L \in [0, c]$$

Η ανάλυσή μας επηρεάζεται ανάλογα με το αν ο περιορισμός (δεξιό άκρο) c είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος του μη-περιορισμένου βέλτιστου L^*. Στο δεξιό άκρο του πεδίου ορισμού έχουμε ότι

$$\Pi'(c) = \frac{pA}{2} \frac{1}{\sqrt{c}} - w \Rightarrow$$

[3]Θα έπρεπε να γνωρίζουμε την τιμή c ενός ανώτερου ορίου για το L στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης κέρδους για να αποφανθούμε αν το ελάχιστο είναι ολικό ή ολικό και μοναδικό. Όπως δίνεται στην εκφώνηση $L \geq 0$, έχουμε τοπικό ελάχιστο αφού για συγκεκριμένες "μεγάλες" τιμές του $L \geq A^2 \left(\frac{w}{p}\right)^{-2}$, η συνάρτηση κέρδους μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές.

α.

$$\Pi'(c) < 0 \Rightarrow c > \frac{A^2}{4}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2} = L^*$$

και η τυχόν επιλογή $L^* = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο

δηλαδή εξακολουθούμε να επιλέγουμε L^* αφού το ανώτατο όριο c είναι μεγαλύτερο της βέλτιστης επιλογής αριθμού εργαζομένων

β.

$$\Pi'(c) > 0 \Rightarrow c < \frac{A^2}{4}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2} = L^*$$

και η τυχόν επιλογή $L^* = 0$ είναι ολικό μέγιστο

δηλαδή αν περιορίσουμε (π.χ. μας επιβληθεί) τον πιθανό αριθμό προσλήψεων στις $c < L^*$ τότε το βέλτιστο είναι να προσλάβουμε $L^* = c$.

4 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = \ln(L + 1)$$

και έστω ότι η τιμή του προϊόντος $p > 0$ θεωρείται σταθερή και προκαθορισμένη από την "αγορά".

Επίσης, η τιμή της εισροής της εργασίας $w > 0$ θεωρείται εξωγενώς καθορισμένη (μισθός).

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης παραγωγής είναι το $L \geq 0$ όπου $L = 0$ ισοδυναμεί με την απόφαση να μην παράγει η επιχείρηση (δηλαδή $Q = 0$).

Η συνάρτηση κόστους δίνεται από την

$$TC = wQ^2 + FC$$

όπου FC αντιστοιχεί στο σταθερό κόστος παραγωγής.

Η συνάρτηση κέρδους (ως συνάρτηση της εργασίας) δίνεται από την

$$\Pi = p\ln(L+1) - w\left[\ln(L+1)\right]^2 - FC$$

- Βρείτε τα στάσιμα σημεία L^* της συνάρτησης κέρδους.
- Βρείτε το θετικό στάσιμο σημείο που βεβαιώνει τοπικό μέγιστο.
- ~~Δείξτε ότι το συνοριακό ακρότατο σημείο~~ $\cancel{L=0}$ ~~είναι τοπικό ελάχιστο άρα αν θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την παραγωγή θα πρέπει να παράγουμε θετική ποσότητα.~~
- Το στάσιμο σημείο $L^* > 0$ σηματοδοτεί τη συνάρτηση ζήτησης εργασίας. Δείξτε ότι η ελαστικότητα της ζήτησης εργασίας ως προς τον πραγματικό μισθό

  $$\varepsilon_{L^*,w/p}$$

  είναι (α) αρνητική και (β) αντιστρόφως ανάλογη του πραγματικού μισθού καθώς $L^* \to \infty$. **Υπόδειξη:**

  $$L^* = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1}} - 1$$

  $$\frac{dL^*}{d\left(w/p\right)}\frac{w/p}{L^*} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w/p}\right)\frac{L^*+1}{L^*}$$

Απάντηση

Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dL} &= \frac{p}{L+1} - \frac{2w\ln(L+1)}{L+1} = 0 \Rightarrow \\ L^* &= e^{\frac{p}{2w}} - 1 = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1}} - 1 \end{aligned}$$

Σ.Δ.Τ

$$\frac{d^2\Pi}{dL^2} = -\frac{p}{(L+1)^2} - \frac{2w\left[1-\ln(L+1)\right]}{(L+1)^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\text{υπονοεί ότι γιά } \left.\frac{d^2\Pi}{dL^2}\right|_{L=L^*} < 0 \text{ πρέπει}$$

$$1 - \ln(L^*+1) > 0 \Rightarrow$$

$$L^* < e - 1$$

Άρα θα πρέπει

$$e^{\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1}} - 1 < e - 1 \Rightarrow$$

$$e^{\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1}} > e \Rightarrow \qquad \text{Προσοχή. Μικρότερο <}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1} > 1 \Rightarrow \qquad \text{Προσοχή. Μικρότερο <}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{w}{p} \Rightarrow \qquad \text{Προσοχή. Μικρότερο <}$$

ώστε να βεβαιώσουμε ότι η ζήτηση εργασίας

$$L^* = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1}} - 1$$

αντιστοιχεί σε μέγιστο κέρδος.

Ελαστικότητα ζήτησης εργασίας ως προς το πραγματικό ωρομίσθιο

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{L^*,w/p} &= \frac{dL^*}{d\left(w/p\right)}\frac{w/p}{L^*} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1}}\frac{w/p}{L^*} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-2}\left(L^*+1\right)\frac{w/p}{L^*} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1}\frac{\left(L^*+1\right)}{L^*}
\end{aligned}$$

Άρα το όριο της ελαστικότητας ζήτησης εργασίας καθώς η εργασία L^* τείνει στο άπειρο ή για υψηλά επίπεδα εργασίας L^* δίνεται από

$$\lim_{L^* \to \infty} \varepsilon_{L^*, w/p} = -\frac{1}{2}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1}$$