Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι
4ο Σύνολο Ασκήσεων

Κυρτότητα-Κοιλότητα-Σημεία Καμπής-Ασύμπτωτες-Μελέτη Συνάρτησης

Διδάσκων Εργαστηρίου-Επιμέλεια Σετ Ασκήσεων:

Παρασκευή (Εύη) Σαλαμαλίκη-Υποψήφια Διδάκτωρ, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Επιβλέποντες-Υπεύθυνοι Εργαστηρίου:

Ιωάννης Α. Βενέτης, Επίκουρος Καθηγητής, Κωνσταντίνος Κουνετάς, Λέκτορας (υπό διορισμό)

Άσκηση 1.

Χαρακτηρίστε ως προς την κυρτότητα-κοιλότητα και την μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, f(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Λύση: Πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το διάστημα $[0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \; \forall x \in (0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} < 0 \; \forall x \in (0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση είναι γνησίως κοίλη

Άσκηση 2.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -ax^2 - bx - c, \quad a, b, c > 0$. Για ποιες τιμές του x η f είναι αύξουσα, φθίνουσα, κοίλη, κυρτή;

Λύση: Πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το $\mathbb{R}$

$f'(x) = -2ax - b$. Για να είναι αύξουσα θα πρέπει $f'(x) \geq 0 \Rightarrow -2ax - b \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{b}{2a}$

Για να είναι φθίνουσα θα πρέπει $f'(x) \leq 0 \Rightarrow -2ax - b \leq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{b}{2a}$

Άρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^* = -\frac{b}{2a}$: πιθανό ακρότατο

$f''(x) = -2a < 0 \; \forall x \in (-\infty, +\infty)$, άρα x^* : τοπικό μέγιστο, $f(x)$: γνησίως κοίλη, και άρα το x^* ολικό και μοναδικό μέγιστο.

Άσκηση 3.

Έστω ότι η εργασία είναι $L \geq 0$ και η σταθερά $A > 0$. Για ποιές τιμές του $\alpha > 0$ είναι η συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas (δυναμοσυνάρτηση)

$$Q(L) = AL^\alpha$$

κοίλη (αυστηρώς κοίλη;) και για ποιές τιμές του α είναι κυρτή; (ή αυστηρώς κυρτή;)

Λύση: Πεδίο ορισμού της $Q(L)$ είναι το διάστημα $[0, +\infty)$

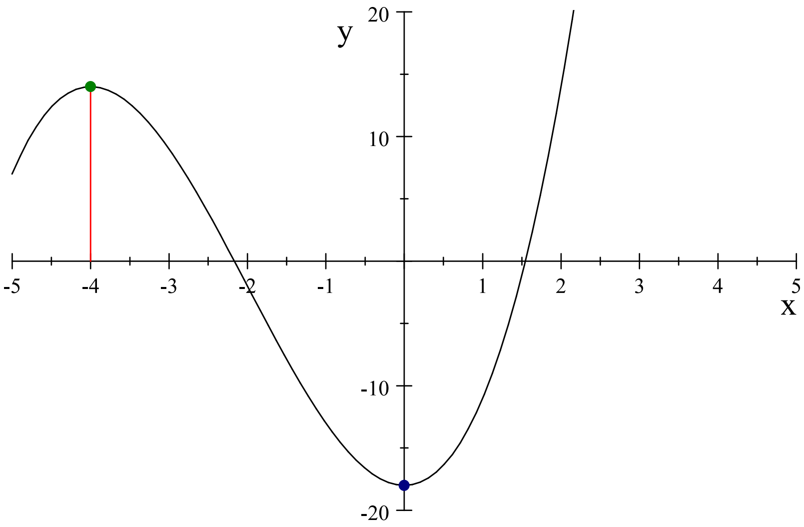
$Q'(L) = AaL^{a-1}$

$$Q''(L) = Aa\,(a-1)\,L^{a-2} \text{ ,όπου } \left\{ \begin{array}{c} 0 < a < 1, \; Q''(L) < 0, \text{ γνησίως κοίλη στο } (0, +\infty) \\ a > 1, Q''(L) > 0, \text{ γνησίως κυρτή στο } (0, +\infty) \end{array} \right\}$$

Άσκηση 4.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x^2 - 18,\ \ x \in \mathbb{R}$. Χαρακτηρίστε ως προς την κυρτότητα-κοιλότητα την συνάρτηση. Να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης και τα ακρότατα αυτής.

Σημείωση: Δείτε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

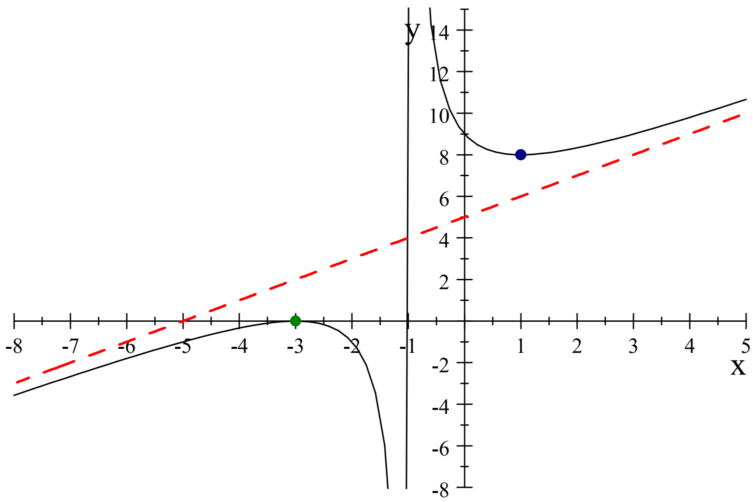


Λύση:

- Πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το $\mathbb{R}$
- $f'(x) = 3x^2 + 12x$
- $f''(x) = 6x + 12$, όπου: $\left\{\begin{matrix} f''(x) > 0, ..., x > -2,\ \text{γν. κυρτή} \\ f''(x) < 0, ...x < -2,\ \text{γν. κοίλη} \end{matrix}\right\}$, άρα στο διάστημα $(-\infty, -2)$ κοίλη και στο διάστημα $(-2, +\infty)$ κυρτή.
- $f''(-2) = 0,\ x = -2$: σημείο καμπής
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = -4$

- $f''(0) = 12 > 0, x = 0$: τοπ. ελάχιστο όπου $f(x) = -18$ (δείτε το γράφημα)
- $f''(-4) = -12 < 0, x = -4$: τοπ. μέγιστο όπου $f(x) = 14$ (δείτε το γράφημα)

Άσκηση 5.
Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x + 5 + \frac{4}{x+1}$
Σημείωση: Δείτε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης



Λύση:

- Πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το $\mathbb{R} - \{-1\}$
- Στο σημείο $x = -1$ η συνάρτηση είναι ασυνεχής
- $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$, και επειδή $(x+1)^2 > 0$, η μονοτονία της $f(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $(x+1)^2 - 4 = (x+3)(x-1)$.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ ή $x = 1$

- Ερευνώντας το πρόσημο της $f'(x)$ θα πρέπει να καταλήξετε στο ότι:

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

- $x = -3, x = 1$: πιθανά ακρότατα

  $f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$, για $x > -1$, $f''(x) > 0$ και για $x < -1$, $f''(x) < 0$. Επίσης η $f''(x)$ δεν έχει ρίζες (δεν μηδενίζεται)

  για $x = -3$, $f''(x) < 0$, άρα τοπικό μέγιστο

  για $x = 1$, $f''(x) > 0$, άρα τοπικό ελάχιστο

- Ασύμπτωτες:

  $\lim\limits_{x \to -1^+}(x + 5 + \frac{4}{x+1}) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -1^-}(x + 5 + \frac{4}{x+1}) = -\infty$, $x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

  $\lim\limits_{x \to +\infty}(\frac{x+5+\frac{4}{x+1}}{x}) = 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty}(x + 5 + \frac{4}{x+1} - x) = 5$, $y = x + 5$ πλάγια ασύμπτωτη

- Συγκεντρωτικά:

x		-3		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$
		max				min	
	κοίλη		κοίλη		κυρτή		κυρτή