Διάλεξη 4 - Σημειώσεις

1 Απροσδιόριστες μορφές και ο κανόνας l'Hôpital

- Έστω ότι ζητούμε το όριο $\lim_{x \to a} w(x)$ της συνάρτησης

$$w(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

η οποία δίνεται ως το πηλίκο δύο συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$. Τότε,

$$\lim_{x \to a} w(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

- Έστω ότι τόσο η $f(x)$ όσο και $g(x)$ τείνουν στο μηδέν (δηλαδή $f(x) \to 0$ και $g(x) \to 0$) καθώς το x τείνει στο a (δηλαδή $x \to a$). Άρα θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{0}{0}$$

- Η συγκεκριμένη μορφή ορίου, $\frac{0}{0}$, δεν ορίζεται και καλείται **απροσδιόριστη μορφή** τύπου $\frac{0}{0}$ (πρόκειται για μία απροσδιόριστη **μορφή πηλίκου**). Άλλη απροσδιόριστη **μορφή πηλίκου** είναι η $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- Επιπλέον, μπορεί να συναντήσουμε και απροσδιόριστες μορφές όπως τη **μορφή γινομένου** $0 \cdot (\pm\infty)$, τη **μορφή αθροίσματος** $\infty - \infty$ και **μορφές δύναμης** όπως 0^0, $\pm\infty^0$ και 1^∞

- Για να υπολογίσουμε το όριο στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, ακολουθούμε τον **κανόνα l'Hôpital**

1.1 Κανόνας l'Hôpital και μορφές πηλίκου

Κανόνας. *Υποθέστε ότι οι f και g είναι παραγωγίσιμες και $g'(x) \neq 0$ σε ένα ανοιχτό διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχει το a, $(a \in A)$, ή το a είναι το άκρο του διαστήματος. Υποθέστε ότι*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ή ότι

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \text{ και } \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

Τότε

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

με την προϋπόθεση να υπάρχει το όριο $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο $\pm\infty$).

- Σε περίπτωση που μετά την «πρώτη» παραγώγιση καταλήξουμε σε απροσδιόριστη μορφή τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε ξανά τον κανόνα l'Hôpital δηλαδή να υπολογίσουμε το όριο

$$\left(\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =\right) \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του κανόνα (θεωρήματος) για τις συναρτήσεις των πρώτων παραγώγων, δηλαδή αν είναι παραγωγίσιμες και $g''(x) \neq 0$ σε ένα ανοιχτό διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχει το a ή το a είναι το άκρο του διαστήματος.

Παράδειγμα. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)}{\lim_{x \to 0} x^2} = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &\overset{L'Ho}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \overset{L'Ho}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \frac{0}{0}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \overset{L'Ho}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}(a^x \ln a) = \ln a$$

Γενικεύση της άσκησης αποτελεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$$

Παράδειγμα. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x} \overset{L'Ho}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

Η $g(x) = e^x$ αυξάνει γρηγορότερα από την $f(x) = x$.

Άσκηση. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{L'H/QQ[3bf]}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Η $g(x) = x$ αυξάνει γρηγορότερα από την $f(x) = \ln x$.

Παράδειγμα. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Προσοχή. Θα σας δυσκολέψει ο κανόνας l'Hôpital αλγεβρικά αφού

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{L\prime Ho}{=} \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{L\prime Ho}{=} \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} =;$$

Προβείτε σε απλοποιήσεις.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1}}$$
$$\overset{L\prime Ho}{=} \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} 1} = \sqrt{1} = 1$$

Σημείωση 1

Όλες οι υπόλοιπες απροσδιόριστες μορφές μπορούν να μετασχηματιστούν σε **απροσδιόριστες μορφές τύπου πηλίκου** και έτσι να προβούμε σε *άρση της απροσδιοριστίας* του ορίου.

Σημείωση 2

Προσοχή στις αλγεβρικές πράξεις. Μπορεί η απευθείας χρήση του κανόνα σε ορισμένες περιπτώσσεις **να μην μπορεί να δώσει όριο** ενώ απλοποίηση της συνάρτησης να δίνει.

Παράδειγμα. Έστω ότι $f(x) = \frac{x+\sin(x)}{x}$. Τότε

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sin(x)}{x} \overset{L\prime Ho}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} (1+\cos(x)) =;$$

Η συνάρτηση $\cos(x)$ είναι **περιοδική**, «κινείται» μεταξύ του -1 και 1 επ'άπειρον.

Όμως
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin(x)}{x}\right)=1$$
αφού ο αριθμητής $\sin(x)$ είναι παντα πεπερασμένος («κινείται» μεταξύ του -1 και 1) καθώς ο παρονομαστής x απειρίζεται.

Σημείωση 3

Ένα άλλο παράδειγμα ιδιαίτερης περίπτωσης είναι όταν ο κανόνας l'Hôpital δεν οδηγεί σε «όριο» μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Σε αυτή τη περίπτωση, η **αντικατάσταση μεταβλητής** μπορεί να οδηγήσει σε απάντηση.

Παράδειγμα.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\overset{L\prime Ho}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\overset{L\prime Ho}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=...$$

Θέτουμε $e^x=y$ και το $y\to\infty$ καθώς το $x\to\infty$. Οπότε
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y+y^{-1}}{y-y^{-1}}\overset{L\prime Ho}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{1-y^{-2}}{1+y^{-2}}=\frac{1}{1}=1$$

1.2 Απροσδιόριστα γινόμενα

- Αν $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ τότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή γινομένου $0\cdot\infty$
- Η συγκεκριμένη μορφή **προσδιορίζεται** αφού μετατραπεί σε μορφή τύπου $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$:
$$fg=\frac{f}{1/g}\text{ ή }fg=\frac{g}{1/f}$$

Παράδειγμα. Βρείτε το όριο
$$\lim_{|x|\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

δηλαδή
$$\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Μετασχηματίζουμε σε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} &\overset{L'Ho}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

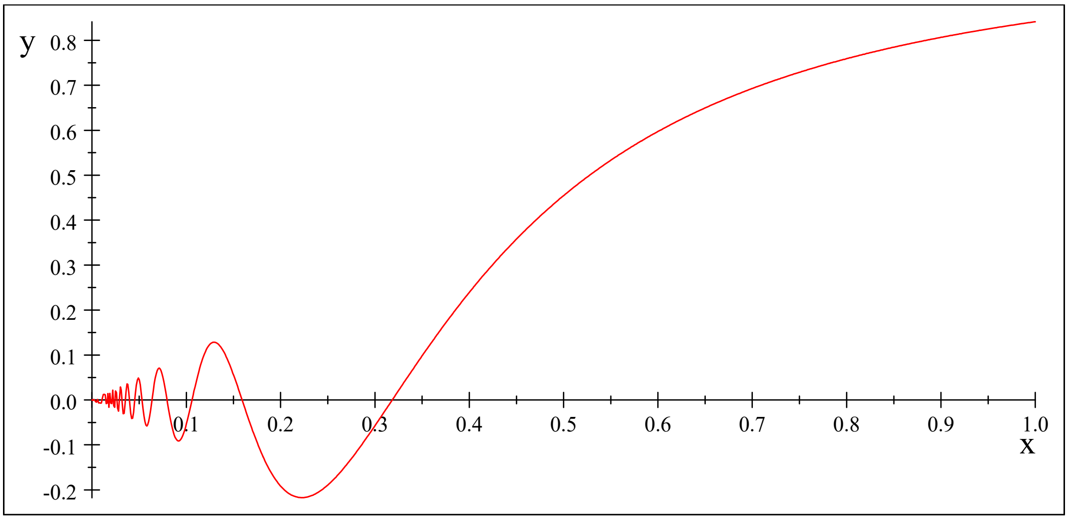
- **Παράδειγμα στο excel με βήμα 0.01**

- **Παρένθεση** σχετικά με τριγωνομετρικές συναρτήσεις **ημιτόνου** ($\eta\mu$ ή sin) και **συνιμητόνου** ($\sigma\upsilon\nu$ ή cos) ...

$$y(t) = \underset{\text{πλάτος}}{\underset{\downarrow}{R}}\ \cos(\ \underset{\text{συχνότητα}}{\underset{\downarrow}{\omega}}\ t + \underset{\text{φάση}}{\underset{\downarrow}{a}}\ )$$

  - Περίοδος (cycles): $\frac{2\pi}{\omega}$
    - $\omega = 1$ συμπληρώνει έναν "κύκλο" κάθε 2π περιόδους
    - $\omega = 2$ συμπληρώνει έναν "κύκλο" κάθε π περιόδους

- Προσοχή. Η $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν είναι περιοδική όμως ... Γράφημα της $y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ για $x \in [0,1]$ (και για $x \in [0,2]$ ή $x \in [0,3]$). Η σύγκλιση της $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ στην τιμή 1 είναι ταχύτατη...)



1.3 Απροσδιόριστες διαφορές

- Άν $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ τότε το όριο

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$$

είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $\infty - \infty$

- Μετατρέπουμε το όριο **από διαφορά σε πηλίκο** με χρήση κοινού παράγοντα έτσι ώστε να καταλήξουμε σε τύπο $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$. Μετά εφαρμόζουμε τον κανόνα.

Παράδειγμα. **(s.o.s)** Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \infty - \infty$$

Μετατρέπουμε σε πηλίκο και έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0}$$

απροσδιόρστο. Οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα l'Hôpital και

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} &\overset{L/Ho}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x - (x-1))'}{((x-1)\ln x)'} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\,\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + \frac{(x-1)}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x + (x-1)} \\
&\overset{L/Ho}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x)'}{(x\ln x + (x-1))'} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

1.4 Απροσδιόριστες δυνάμεις (s.o.s)

Έστω ότι

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

με

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ τύπος 0^0
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ τύπος ∞^0
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ τύπος 1^∞

- Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιούμε φυσικό λογάριθμο και μετασχηματίζουμε την $y = [f(x)]^{g(x)}$ σε
$$\ln\, y = g(x) \ln\, f(x)$$
- Για την $\ln y$ ή $g(x) \ln f(x)$ έχουμε απροσδιόριστο τύπο $0 \cdot \infty$. Βρίσκουμε λοιπόν με τον κανόνα l'Hôpital το όριο της $\ln y = g(x) \ln\, f(x)$ και κατόπιν χρησιμοποιούμε την αντίστροφη εκθετική
$$y = e^{\ln y} \Leftrightarrow [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\, \ln\, f(x)}$$
ώστε να βρούμε το όριο
$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to a} \ln y} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\, \ln\, f(x)}$$

Παράδειγμα. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

Έχουμε $f(x) = x$ και $g(x) = x$. Άρα $\ln y = x \ln x$ και

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty)$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{L'Ho}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x)}{(-\frac{1}{x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x^x &= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

Τι θα γίνει αν αντί για $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ προχωρήσουμε με $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$ ...;

Παράδειγμα. (Ενδιαφέρον) Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ... = e$$

Οπότε,

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^k = \left[\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^k = e^k$$

Επίσης, θα παρατηρήσετε ότι

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

Απάντηση. Έχουμε $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)$ και $g(x) = x$. Άρα

$$\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0\cdot\infty$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} \\
&\overset{L'Ho}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{(1/x)'} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = ... = e^1 = e$$

Σημείωση. Συνεχής ανατοκισμός

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = ... = e^r$$

Έστω ότι καταθέτετε ένα ποσό $A = 1000€$ σε τράπεζα. Το ετήσιο επιτόκιο είναι 5% δηλαδή $r = 0.05$ και η τράπεζα διατείνεται ότι ο ανατοκισμός γίνεται μία φορά το έτος. Δηλαδή στο τέλος του έτους θα λάβετε

$$V(1) = A + rA = (1+r)A = 1050€$$

Στην περίπτωση που ο ανατοκισμός είναι **δύο φορές το έτος** τότε στο πρώτο μισό του έτους λαμβάνετε τόκο $\frac{r}{2}$ επί του ποσού και στο τέλος του έτους $\frac{r}{2}$ επί του **ήδη** τοκισμένου ποσού. Αναλυτικά, λαμβάνετε στο πρώτο μισό του έτους

$$A + \frac{r}{2}A = \left(1+\frac{r}{2}\right)A$$

και στη συνέχεια στο τέλος του έτους

$$\begin{aligned} V(2) &= \left[\left(1+\frac{r}{2}\right)A\right]+\frac{r}{2}\left[\left(1+\frac{r}{2}\right)A\right] \\ &= \left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)A \\ &= \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 A \end{aligned}$$

που δίνει

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^2 A = 1050.625€$$

Παρομοίως, αν ο ανατοκισμός ήταν συνεχής (που είναι), δηλαδή τοκίζονται συνεχώς τα χρήματα με ετήσιο επιτόκιο r τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r$$

και το τελικό ποσό στο λογαριασμό σας στο τέλος του έτους είναι ίσο με

$$V(\infty) = Ae^r = 1051.271€$$

2 Διαφορικά

- Έστω ότι η y είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x δηλαδή $y = f(x)$. Η παράγωγος δίνεται από

  $$\frac{dy}{dx} = f(x)'$$

  Ισοδύναμα, η εξίσωση (**διαφορικό πρώτης τάξης**)

  $$dy = f(x)'dx$$

  δίνει το **διαφορικό** της y ως συνάρτηση μίας μεταβολής στην x. Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

  $$df(x) = f(x)'dx$$

- **Για παράδειγμα** αν $y = \ln x$ ή $f(x) = \ln x$ τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

και το διαφορικό της y δίνεται από

$$dy = \frac{1}{x}dx$$

Εναλλακτικά, το διαφορικό της $\ln x$ δίνεται από

$$d\ln x = \frac{1}{x}dx = \frac{dx}{x}$$

- Οι κανόνες διαφόρισης που θα δείτε στο βιβλίο προέρχονται κατευθείαν από την παραγώγιση

Παράδειγμα. αν $y = f(x)$ και $z = g(x)$ τότε

$$d(y+z) = dy + dz = f'dx + g'dx$$

Παράδειγμα.

$$d(yz) = ydz + zdy = [fg' + f'g]\,dx$$

"Πεπλεγμένες"...

$$x^3y^2 - 8xy = 5 \text{ , } \frac{dy}{dx} =;$$

$$\begin{gathered}
d(x^3y^2) - d\,(8xy) = d\,(5) \Rightarrow \\
x^3d(y^2) + y^2d(x^3) - 8\,[xdy + ydx] = 0 \Rightarrow \\
x^32ydy + y^23x^2dx - 8xdy - 8ydx = 0 \Rightarrow \\
x^32y\frac{dy}{dx} + y^23x^2 - 8x\frac{dy}{dx} - 8y = 0 \Rightarrow \\
\frac{dy}{dx} = \frac{8y - y^23x^2}{(x^32y - 8x)}
\end{gathered}$$

Παράδειγμα. Προσέγγιση

$$(dy \approx)\, \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\, \Delta x$$

Προσεγγίστε την $f(1.5)$ όταν $f(x) = 4x \ln x$. Επιλέξτε $x_0 = 1$ για να "απλοποιηθεί" η αρχική συνάρτηση στο x_0 (η $f(1) = 4 \cdot 1 \cdot \ln 1 = 0$). Άρα (προσεγγιστικά)

$$f(1.5) \approx f(1) + f'(x_0)\, dx$$

ή

$$f(1.5) - f(1) \approx f'(x_0)\, dx$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \cdot 1 \cdot \ln 1 = 0 \\ f'(x) &= 4 \ln x + 4 \\ f'(1) &= 4 \ln 1 + 4 = 4 \cdot 0 + 4 = 4 \\ dx &\approx 1.5 - 1 = 0.5 \end{aligned}$$

$$f(1.5) \approx 0 + 4 \cdot 0.5 = 2$$

2.1 Εφαρμογές στην ελαστικότητα

Μία από τις ποιό συνηθισμένες χρήσεις των απλών διαφορικών είναι ο υπολογισμός της σημειακής ελαστικότητας μίας μεταβλητής y ως προς τη x

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\%\ \text{μεταβολή στην } y}{\%\ \text{μεταβολή στην } x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$$

δηλαδή

$$\%\ \text{μεταβολή στην } y\ = \varepsilon_{y,x}\ \times\ \%\ \text{μεταβολή στην } x$$

Άρα, η ελαστικότητα $\varepsilon_{y,x}$ περιγράφει την ποσοστιαία μεταβολή στην y που σχετίζεται με μία 1% ποσοστιαία μεταβολή στην x.

Χρησιμοποιώντας διαφορικά, μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα ότι

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\frac{1}{y}dy}{\frac{1}{x}dx} = \frac{d\ln y}{d\ln x}$$

αφού $d\ln y = \frac{dy}{y}$ και $d\ln x = \frac{dx}{x}$.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση ζήτησης

$$Q = \frac{a}{a+\beta}\frac{M}{P}$$

όπου a, β σταθερές που εκφράζουν προτιμήσεις, M το διαθέσιμο εισόδημα και P η τιμή του αγαθού. Βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή ε_D και την ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα ε_M.

Απάντηση. Εύκολος τρόπος. Αφού

$$\varepsilon_D = \frac{d\ln Q}{d\ln P}$$

και

$$\ln Q = \ln\left(\frac{a}{a+\beta}\right) + \ln M - \ln P$$

έχουμε

$$\varepsilon_D = \frac{d\ln Q}{d\ln P} = -1$$

και

$$\varepsilon_M = \frac{d\ln Q}{d\ln M} = 1$$

Απάντηση. Δύσκολος τρόπος.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_d &= \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = \left(-\frac{a}{a+\beta}\frac{M}{P^2}\right)\left(\frac{P}{\frac{a}{a+\beta}\frac{M}{pP}}\right) = ... = -1 \\
\varepsilon_M &= \frac{dQ}{dM}\frac{M}{Q} = \left(\frac{a}{a+\beta}\frac{1}{P}\right)\left(\frac{M}{\frac{a}{a+\beta}\frac{M}{P}}\right) = ... = 1
\end{aligned}$$

2.2 Εφαρμογές στον ρυθμό μεγέθυνσης

Έστω ότι $y = f(t)$ δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή x της συνάρτησης $f(x)$ παριστά χρόνο (διεθνώς συμβολίζεται με t). Για παράδειγμα αν η $y = y(t)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση του χρόνου τότε

$$y(t) = a + bt$$

Ο στιγμιαίος ρυθμός μεγέθυνσης ή απλώς **ρυθμός μεγέθυνσης** στον χρόνο δίνεται από τον τύπο του ποσοστιαίου ρυθμού μεταβολής της μεταβλητής ενδιαφέροντος dy/y προς τη μεταβολή του χρόνου dt, δηλαδή

$$g_y = \frac{dy/y}{dt} = \frac{d \ln y}{dt}$$

Εναλλακτικά, η πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο, $\frac{dy}{dt}$, συμβολίζεται και με $\dot{y}$ οπότε

$$g_y = \frac{dy/y}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{y} = \frac{\dot{y}}{y} \quad \left(= \frac{d \ln y}{dt} \right)$$

Παράδειγμα. Έστω ότι το απόθεμα κεφαλαίου K της επιχείρησης στον χρόνο, $K(t)$, ακολουθεί την εκθετική συνάρτηση

$$(K =)\ ,\ K(t) = K_0 e^{mt}$$

όπου m μία θετική παράμετρος και K_0 το **αρχικό** κεφαλαιακό απόθεμα. Ο **ρυθμός μεγέθυνσης** του κεφαλαιακού αποθέματος της επιχείρησης δίνεται από

$$dK(t) = mK_0 e^{mt} dt = mK(t)dt \Rightarrow$$

$$\frac{dK(t)}{K(t)} = mdt \Rightarrow$$

$$\frac{dK(t)/K(t)}{dt} = m$$

ή εναλλακτικά από

$$\frac{d \ln K(t)}{dt} = m$$

αφού

$$\ln K(t) = \ln(K_0) + mt$$

Παράδειγμα. Ρυθμός μεγέθυνσης γινομένου και λόγου. Έστω δύο μεταβλητές που είναι συναρτήσεις του χρόνου, $Y = Y(t)$ και $X = X(t)$ με ρυθμούς μεγέθυνσης g_Y και g_X αντίστοιχα. Ποιός ο ρυθμός μεγέθυνσης του γινομένου των δύο μεταβλητών $Z(t) = Y(t)X(t)$; Λογαριθμίζουμε και

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln Y + \ln X \\ \frac{d\ln Z}{dt} &= \frac{d\ln Y}{dt} + \frac{d\ln X}{dt} \Rightarrow \\ g_Z &= g_Y + g_X \end{aligned}$$

Ποιός ο ρυθμός μεγέθυνσης του λόγου των δύο μεταβλητών $Z(t) = Y(t)/X(t)$; Λογαριθμίζουμε και πάλι, οπότε

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln Y - \ln X \\ \frac{d\ln Z}{dt} &= \frac{d\ln Y}{dt} - \frac{d\ln X}{dt} \Rightarrow \\ g_Z &= g_Y - g_X \end{aligned}$$