Σύνολο ασκήσεων 3

1 Άσκηση

Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= Ae^{2x^2+5} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \\
f(x) &= (x^2+1)^4 e^{x^2+c} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \\
f(x) &= \ln(5x+2) \quad , \quad x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right) \\
f(x) &= \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2+x+1)} \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+ \\
f(x) &= \sqrt{xa^{2x+4}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+, a > 0 \\
f(x) &= \sin\left(2x^2 + \cos(2x)) + 1\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

όπου A, a, c συμβολίζουν σταθερές.

2 Άσκηση

Έστω ότι $y = \ln z$ και $z = \frac{x^2}{2}$. Εφαρμόστε τον **αλυσωτό κανόνα** και βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

3 Άσκηση

Εφαρμόστε τον αλυσωτό κανόνα παραγώγισης (μία φορά) και βρείτε την παράγωγο της $y = (2x^3 + \cos 5x)^{-\frac{1}{2}}$. **Σημείωση:** Υιοθετήστε την αντικατάσταση $y = u^{-\frac{1}{2}}$ και $u = 2x^3 + \cos 5x$ και υπολογίστε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

4 Άσκηση

Βρείτε το σημείο x^* όπου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

έχει κλίση ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x^*) = 0$. **Υπόδειξη:** Βρείτε την παράγωγο $f'(x)$. Θέστε $f'(x) = 0$ και λύστε την εξίσωση ως προς x. Θα βρείτε ότι $x^* = \mu$.

(α) **Σχεδιάστε** τη συνάρτηση $f(x)$ στο Excel για $x \in [-4.00\ ,\ 4.00]$ με βήμα 0.01 και (πρώτον:) $\mu = 0$, $\sigma = 1$ (δεύτερον:) $\mu = 1$, $\sigma = 1$. Σχολιάστε το γράφημα.

(β) **Σχεδιάστε** τη συνάρτηση $f(x)$ στο Excel για $x \in [-4.00\ ,\ 4.00]$ με βήμα 0.01 και (πρώτον:) $\mu = 0$, $\sigma = 1$ (δεύτερον:) $\mu = 0$, $\sigma = \sqrt{2}$. Σχολιάστε το γράφημα.

Παρακάτω βλέπετε ένα γράφημα με χρήση του `gretl`

5 Άσκηση

Θεωρήστε τη λογιστική συνάρτηση $L(x; \gamma, c)$ (ή *σιγμοειδής συνάρτηση* αφού έχει την μορφή S ή *σιγμοειδής καμπύλη*)

$$L(x) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma(x-c)}}$$

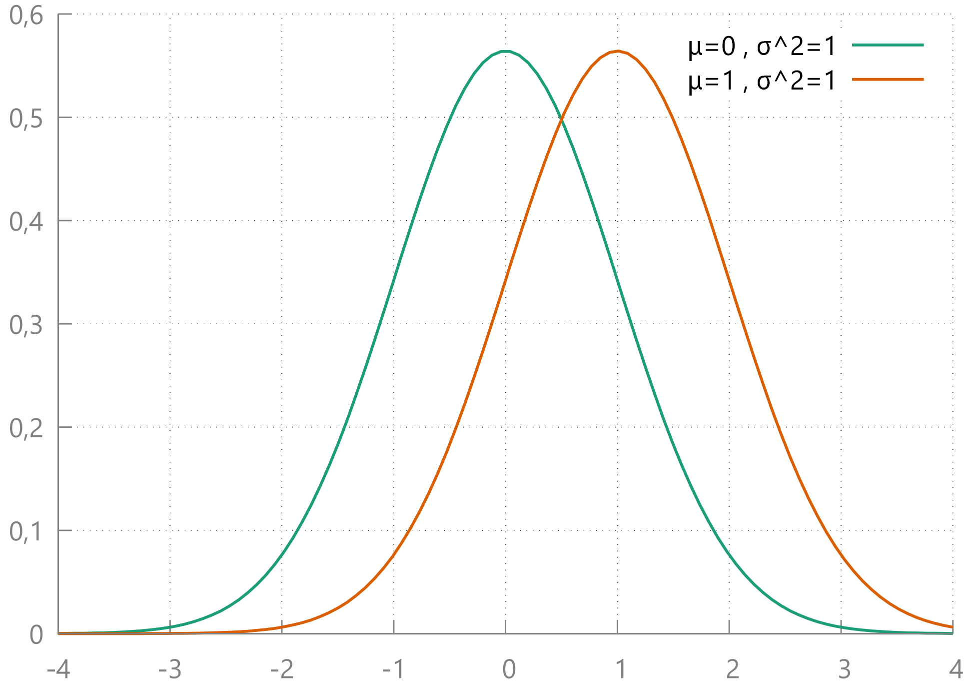
ως συνάρτηση της παραμέτρου γ η οποία εκφράζει την ταχύτητα μετακίνησης της συνάρτησης $L(x)$ από το σημείο $\lim_{x\to-\infty} L(x)$ στο σημείο $\lim_{x\to+\infty} L(x)$. Δηλαδή θεωρήστε την $L(x; \gamma, c)$ ως συνάρτηση $L(\gamma) = \frac{1}{1+e^{-\gamma(x-c)}}$.

Βρείτε την πρώτη, δεύτερη, τρίτη και τέταρτη παράγωγο ως προς γ (οκ αλγεβρικά επίπονο!!!).

Στη συνέχεια προβείτε στην αντικατάσταση $\gamma = 0$ δηλαδή υπολογίστε τις

$$L'(0)\ ,\ L''(0)\ ,\ L'''(0)\ ,\ L''''(0)$$

Σχεδιάστε τη λογιστική συνάρτηση $L(x)$ στο Excel για $x \in [0, 1]$ με βήμα 0.01 και $\gamma = 1$, $c = 0.5$



Εικ. 1. Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μ.

6 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση συνολικού κόστους

$$TC(Q) = 3Q^2 + 7Q + 24$$

ενώ γνωρίζουμε ότι το **οριακό κόστος** δίνεται ως

$$MC(Q) = \frac{dTC(Q)}{dQ} = TC(Q)'$$

και το **μέσο κόστος** ορίζεται ως

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$$

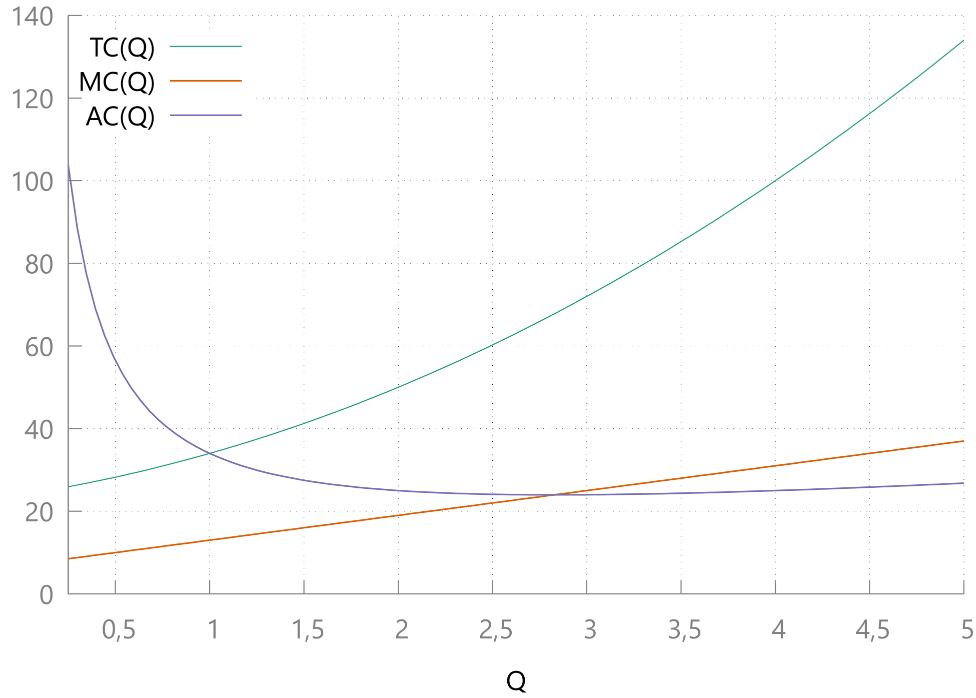
Δείξτε ότι:

(α) $MC < AC$, το οριακό κόστος MC είναι μικρότερο του μέσου κόστους AC όταν το μέσο κόστος μειώνεται δηλαδή όταν $AC'(Q) < 0$

(β) $MC = AC$ όταν το μέσο κόστος είναι επίπεδο (έχει μηδενική κλίση), δηλαδή όταν $AC'(Q) = 0$

(γ) $MC > AC$ όταν το μέσο κόστος αυξάνεται

Σχεδιάστε και τις τρεις συναρτήσεις (TC, AC, MC) στο Excel για $Q \in [0.25, 5]$ με βήμα 0.1. Παρακάτω βλέπετε ένα γράφημα με χρήση του `gretl`



Εικ. 2. Συναρτήσεις $TC(Q), AC(Q), MC(Q)$ $Q \in [0.25, 5]$

7 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση συνολικών εσόδων (ή συνάρτηση δαπάνης καταναλωτών) ως συνάρτηση της τιμής πώλησης p του αγαθού

$$TR(p) = pQ = pD(p)$$

όπου $Q_d = D(p)$ κάποια συνάρτηση ζήτησης με $D' < 0$.

1. Δείξτε ότι τα έσοδα μπορεί να **αυξηθούν**, δηλαδή δείξτε ότι $TR'(p) > 0$, **μειωθούν** ή **μείνουν αμετάβλητα** από μία μεταβολή της τιμής P

όταν η αγορά του συγκεκριμένου αγαθού είναι **ανελαστική** (δηλαδή $\varepsilon_D > -1$), **μοναδιαίας ελαστικότητας** (δηλαδή $\varepsilon_D = -1$) ή **ελαστική** (δηλαδή $\varepsilon_D < -1$).

Υπόδειξη:

$$\frac{dTR}{dp} = ... = D(p)\left[1 + \varepsilon_D\right] = D(p)\left[1 - \eta\right]$$ [redacted]

όπου $\varepsilon_D = -\eta$.

2. Δείξτε ότι η ελαστικότητας της συνάρτησης εσόδων (ή ελαστικότητα δαπάνης ως προς την τιμή) δίνεται από

$$\varepsilon_{TR,p} = 1 + \varepsilon_D = 1 - \eta$$

8 Άσκηση (s.o.s)

Έστω μία πλήρως ελαστική καμπύλη ζήτησης εργασίας $L(w)$ (από τις επιχειρήσεις) στο $\bar{w}$. Δηλαδή οι επιχειρήσεις προσλαμβάνουν μόνο με μισθό $\bar{w}$. Πλήρως ελαστική ζήτηση εργασίας σημαίνει ότι (δείτε και το παρακάτω γράφημα)

$$\frac{dL(w)}{dw}\frac{w}{L(w)} = -\infty$$

Έστω ότι η καμπύλη προσφοράς εργασίας[1] $S(w)$ έχει θετική πρώτη παράγωγο ως προς το μισθό

$$\frac{dS(w)}{dw} = S' > 0$$

που σημαίνει ότι η προσφορά εργασίας αυξάνεται με το επίπεδο του μισθού.

Έστω ότι η κυβέρνηση φορολογεί την εργασία με φορολογικό συντελεστή $\tau \in (0,1)$ και έχει έσοδα

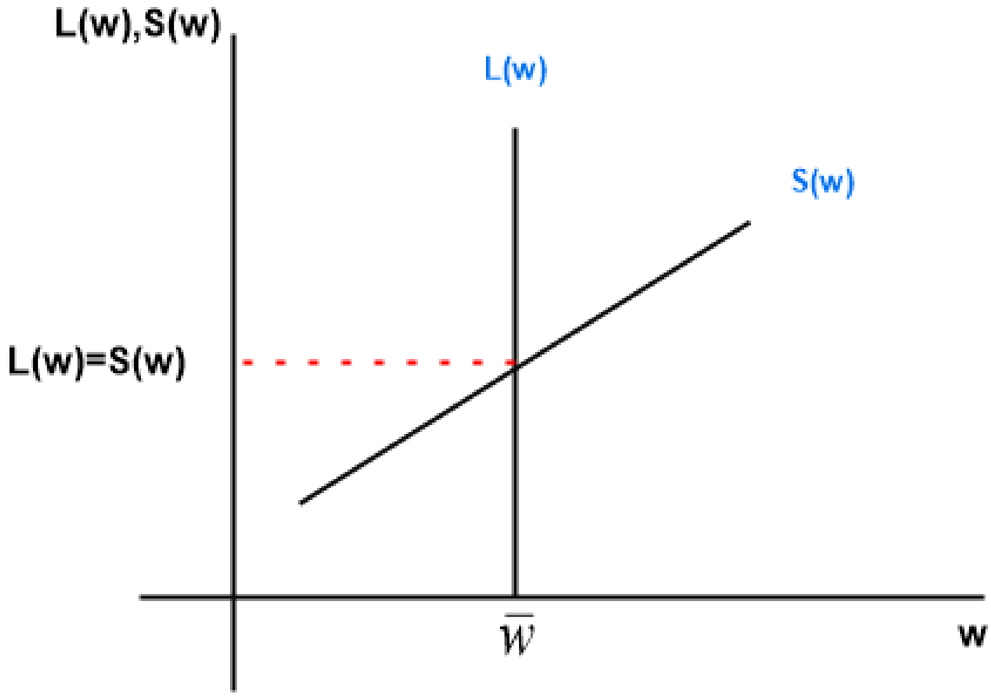
$$T(\tau) = \tau S(w)\bar{w}$$

δηλαδή το ποσό της εργασίας που προσφέρεται από τους εργαζόμενους $S(w)$, επί το δοσμένο σταθερό μισθό $\bar{w}$ που πληρώνουν οι επιχειρήσεις, επί το ποσοστό φορολόγησης τ.

Ο (πραγματικός) μισθός που λαμβάνει ο εργαζόμενος είναι συνάρτηση του φορολογικού συντελεστή τ, δηλαδή $w = W(\tau)$ και διαμορφώνεται ως

$$w = W(\tau) = (1-\tau)\bar{w}$$

[1] Από τους εργαζόμενους, δηλαδή πόση εργασία προσφέρεται από τους εργαζόμενους για κάθε επίπεδο μισθού w.



Εικ. 3. Ζήτηση L (από τις επιχειρήσεις) και προσφορά S (από τα άτομα) εργασίας.

Σύμφωνα με το **«αποτέλεσμα Laffer»** μία μείωση του φορολογικού συντελεστή τ **δύναται** να οδηγήσει σε αύξηση των φορολογικών εσόδων.

Ερώτηση

Ποιά πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ της **ελαστικότητας της προσφοράς εργασίας** $\varepsilon_{S,w}$ ως προς τον **μισθό** w καθώς και του **φορολογικού συντελεστή** τ ώστε να λαμβάνει χώρα το «αποτέλεσμα Laffer»; (**Προσοχή**, να χρησιμοποιήσετε τον αλυσωτό κανόνα).

Απάντηση

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{dT}{d\tau} < 0$ και να χρησιμοποιήσουμε την ελαστικότητα προσφοράς εργασίας

$$\varepsilon_{S,w} = \frac{dS(w)}{dw}\frac{w}{S(w)}$$

καθώς και το φορολογικό συντελεστή ως στοιχεία της μεταβολής της φορολογίας $\frac{dT}{d\tau}$ όταν μεταβάλεται ο φορολογικός συντελεστής.

Αναλυτικά, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{d\tau} &= S\bar{w} + \tau\bar{w}\left(\frac{dS}{dw}\frac{dw}{d\tau}\right) \\
&= S\bar{w} + \tau\bar{w}\frac{dS}{dw}\left(-\bar{w}\right) \\
&= S\bar{w} - \tau\frac{dS}{dw}\left(\bar{w}\right)^2 \\
&= S\bar{w}\left[1 - \tau\frac{dS}{dw}\frac{\bar{w}}{S}\right] \\
&= S\bar{w}\left[1 - \frac{\tau}{(1-\tau)}\frac{dS}{dw}\frac{w}{S}\right] \\
&= S\bar{w}\left[1 - \frac{\tau}{(1-\tau)}\varepsilon_{S,w}\right]
\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον αλυσωτό κανόνα

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dw}\frac{dW}{d\tau}$$

dw

αφού

$$S(w) = S(W(\tau))$$

Επειδή $S\bar{w} > 0$ θα έχουμε ότι $\frac{dT}{d\tau} < 0$ όταν

$$\begin{gathered}
1 - \frac{\tau}{(1-\tau)}\varepsilon_{S,w} < 0 \Rightarrow \\
1 < \frac{\tau}{(1-\tau)}\varepsilon_{S,w} \Rightarrow \\
\varepsilon_{S,w} > \frac{(1-\tau)}{\tau}
\end{gathered}$$

Για παράδειγμα, με ελαστικότητα $\varepsilon_{S,w} = 1.8$ το αποτέλεσμα Laffer ισχύει για φορολογικό συντελεστή μεγαλύτερο του $\tau = 35\%$. Δηλαδή αν η φορολόγηση είναι μεγαλυτερη του 35% τότε μείωση της φορολογίας οδηγεί σε αύξηση των εσόδων !!!.

9 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση ζήτησης

$$Q_d = a - \beta P \quad \text{με} \quad a \ , \ \beta > 0$$

και η συνάρτηση προσφοράς

$$Q_s = \gamma + \delta P \quad , \quad \delta > 0$$

Βρείτε το σημείο ισορροπίας Q^*, P^* δηλαδή το σημείο που ικανοποιεί τη συνθήκη ισορροπίας

$$Q_d = Q_s$$

1. Βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης

$$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

2. Υπολογίστε την ελαστικότητα ζήτησης όταν $P = 5$

3. Υπολογίστε την ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο ισορροπίας Q^*, P^*

4. **Σχεδιάστε** τις δύο συναρτήσεις και στο Excel για τιμές των παραμέτρων a, β, γ, δ που θα επιλέξετε αφού θέσετε $P > 0$ με $P \in [0, 10]$ και βήμα 0.1

10 Άσκηση

Έστω η συνάρτηση ζήτησης

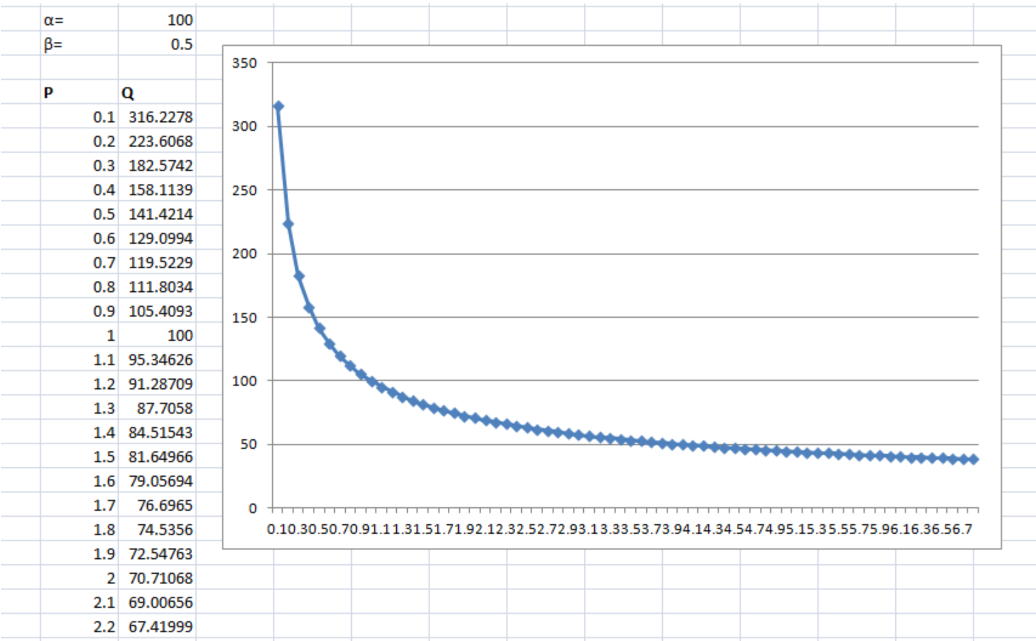
$$Q_d = aP^{-\beta}$$

1. Βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης $\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$. Εξαρτάται από την τιμή ή είναι **ισοελαστική**;

2. Σχεδιάστε τη συνάρτηση ζήτησης στο θετικό τεταρτημόριο στο Excel χρησιμοποιώντας $P > 0$ με $P \in [0, 10]$ και βήμα 0.1 καθώς και

$$a = 100, \beta = 0.5$$

Υπόδειξη: δείτε την παρακάτω εικόνα από το Excel



α=	100
β=	0.5
P	**Q**
0.1	316.2278
0.2	223.6068
0.3	182.5742
0.4	158.1139
0.5	141.4214
0.6	129.0994
0.7	119.5229
0.8	111.8034
0.9	105.4093
1	100
1.1	95.34626
1.2	91.28709
1.3	87.7058
1.4	84.51543
1.5	81.64966
1.6	79.05694
1.7	76.6965
1.8	74.5356
1.9	72.54763
2	70.71068
2.1	69.00656
2.2	67.41999

Εικ. 4. Συνάρτηση ζήτησης $Q_d = 100 \cdot P^{-0.5}$ στο θετικό τεταρτημόριο.