Διάλεξη 2 - Σημειώσεις

1 Συναρτήσεις

1. **Συνάρτηση:** μία συνάρτηση f είναι ένας κανόνας που αναθέτει **σε κάθε στοιχείο** x του συνόλου A **ακριβώς ένα στοιχείο** του συνόλου B. Το σύνολο A καλείται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης ή **σύνολο ορισμού** της συνάρτησης.

2. Ο συμβολισμός $f(x)$ διαβάζεται ως «f του x» ή «f στο x» και καλείται

   (i) τιμή της f στο x,

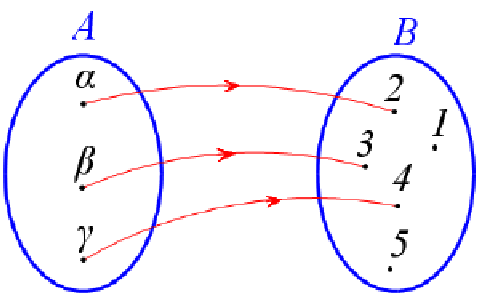
   (ii) ή **εικόνα** του x υπό την f

3. Το **πεδίο τιμών** B της f είναι το υπερσύνολο όλων των πιθανών τιμών της $f(x)$ καθώς μεταβάλλουμε το x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή περιγραφικά
$$B \supseteq f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$
όπου $f(A)$ η εικόνα της f.

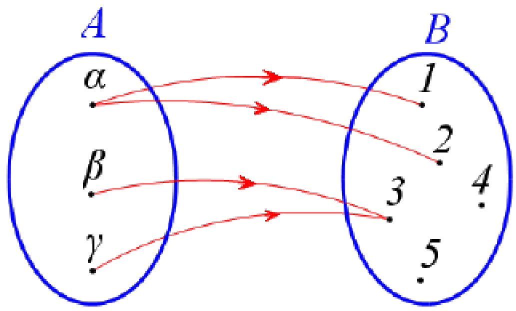
4. Το σύμβολο x που αναπαριστά μία αυθαίρετη τιμή στο πεδίο ορισμού της f καλείται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ενώ το σύμβολο y που αναπαριστά μία τιμή στο **πεδίο τιμών** της f καλείται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

   (i) Για παράδειγμα στην κλασσική τετραγωνική συνάρτηση $f(x) = x^2$, η x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ αν γράψουμε τη συνάρτηση ως εξίσωση $y = x^2$ τότε η y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Άλλα σύμβολα, όπως a, β, γ, ... κ.λ.π, θα αναπαριστούν συνήθως **σταθερές**, π.χ. $f(x) = ax^2 + \gamma$

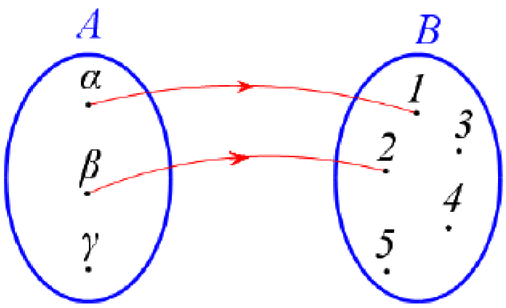
5. Επίσης, μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών το B γράφεται και ως $f : A \to B$ με $x \to y = f(x)$ ή $x \to f(x)$ και ονομάζεται **μετασχηματισμός ή απεικόνιση** του A στο B. Για παράδειγμα
$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ με } x \to y = \sqrt{x}$$
ή
$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ με } x \to \sqrt{x}$$



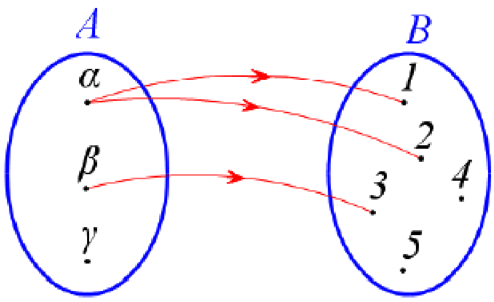
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

6. **Γραφικό παράδειγμα.** Έστω το πεδίο ορισμού $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και το πεδίο τιμών $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ποιό από τα παρακάτω *βελοδιαγράμματα* παριστάνει συνάρτηση;

   (i) Το σχήμα (α') **παριστάνει** συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B

   (ii) Το σχήμα (β') **δεν παριστάνει** συνάρτηση, αφού το $a \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του B

   (iii) Το σχήμα (γ') **δεν παριστάνει** συνάρτηση, αφού το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του B

   (iv) Το σχήμα (δ') **δεν παριστάνει** συνάρτηση. Πρώτον διότι το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του B και δεύτερον διότι το $a \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του B.

7. Στο μάθημά μας (και γενικότερα στα Μαθηματικά για Οικονομολόγους)

θα αντιμετωπίσουμε συναρτήσεις όπου τα A και B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ του συνόλου δηλαδή των πραγματικών αριθμών, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$. Οι συγκεκριμένες συναρτήσεις θα καλούνται **πραγματικές συναρτήσεις**.

(i) Για παράδειγμα, η τυποποιημένη γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$

(ii) Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$ με τύπο $f(x) = -x$ η οποία σε κάθε μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί τον αντίθετό του

8. Όταν δεν δίνονται τα σύνολα $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ αλλά μόνο η σχέση $y = f(x)$ που συνδέει τα x και y τότε θα εννοούμε ότι, ως πεδίο ορισμού, πρέπει να θεωρηθεί το μεγαλύτερο δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για το οποίο η σχέση που συνδέει τα x και y ορίζεται. Για παράδειγμα, η παρακάτω συνάρτηση που δίνεται ως εξίσωση

$$y = \frac{1}{(x-1)^2}$$

χωρίς άλλη πληροφόρηση υπονοεί

$$f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R}_{++}$$

9. **Διανυσματικές (πραγματικές) συναρτήσεις.** Μπορούμε να γενικεύσουμε όσο θέλουμε. Για παράδειγμα, έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (μία μεταβλητή) και το πεδίο τιμών είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $n > 1$. Για παράδειγμα όταν $n = 2$ υπονοείται ότι

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x \\ a_{21}x \end{pmatrix}$$

Γενικότερα, αν το πεδίο ορισμού είναι ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^\mu$ εννοούμε ότι έχουμε μ ανεξάρτητες μεταβλητές και όταν $B \subseteq \mathbb{R}^n$ εννοούμε ουσιαστικά n συναρτήσεις. Για παράδειγμα (όταν $\mu = 3$ και $n = 2$)

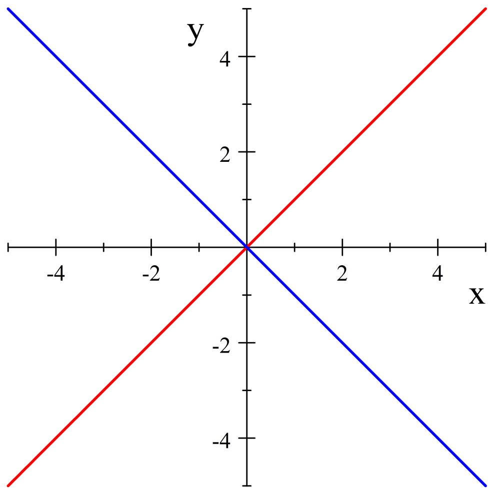
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix}$$

10. Γράφημα Γ συνάρτησης $f : A \to B$. Το γράφημα μίας συνάρτησης ορίζεται ως ένα υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $\Gamma \subseteq A \times B$ και δίνεται περιγραφικά από το σύνολο

$$\Gamma = \{(x, y) : x \in A \wedge y = f(x)\}$$

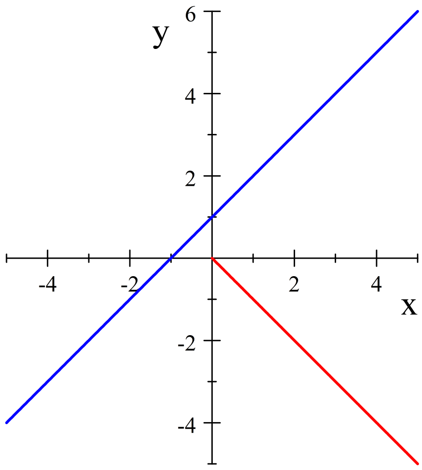
Δηλαδή **γράφημα** είναι το σύνολο όλων των ζευγών $(x, f(x))$ με $x \in A$.

(*i*) **Παράδειγμα**. Γραμμική συνάρτηση με θετική κλίση $y = x$ ($x \in \mathbb{R}$, κόκκινη γραμμή) και γραμμική συνάρτηση με αρνητική κλίση $y = -x$ ($x \in \mathbb{R}$, μπλέ γραμμή)



Εικ. 1. Η $y = x$ καλείται και γραμμή των 45^o

(*ii*) **Παράδειγμα**. $y = -x$ με $x \in \mathbb{R}_+$ (κόκκινη γραμμή) και $y = 1 + x$ με $x \in \mathbb{R}$ (μπλέ γραμμή)



11. **Συνάρτηση επί (επίρριψη)(onto ή surjective)**. Μία συνάρτηση $f : A \to B$ είναι επί, όταν και μόνο όταν $f(A) = B$. Δηλαδή για κάθε

$y \in B$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$ έτσι ώστε $y = f(x)$. **Η εικόνα της συνάρτησης είναι και το πεδίο τιμών της**. **Παράδειγμα:** η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \to x^2$$

έχει εικόνα το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ που διαφέρει του πεδίου τιμών $\mathbb{R}$ και δεν είναι επί. Η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad , \quad x \to x^2$$

είναι επί.

12. **Συνάρτηση $1-1$ ή ένα-προς-ένα (ένριφη) (one-to-one ή injective).** Μία συνάρτηση

$$f : A \to B$$

καλείται 1-1 όταν και μόνο όταν

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad , \quad x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Δηλαδή δεν υπάρχουν στοιχεία στο πεδίο ορισμού A με την ίδια εικόνα. Δύο οποιαδήποτε στοιχεία x_1, x_2 του πεδίου ορισμού A δεν έχουν την ίδια εικόνα. **Παράδειγμα:** οι συναρτήσεις

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \to x^2$$

και

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad , \quad x \to x^2$$

δεν είναι 1-1 αφού π.χ. $f(2) = f(-2) = 4$. Η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad , \quad x \to x^2$$

είναι 1-1 αλλά δεν είναι επί αφού η εικόνα δεν είναι ίση με το πεδίο τιμών. Η εικόνα $f(\mathbb{R}_+)$ είναι το $\mathbb{R}_+$ ενώ, όπως το έχουμε ορίσει, το πεδίο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

13. Μία συνάρτηση $f : A \to B$ καλείται **αμφίεση (bijective)** όταν και μόνο όταν η f είναι **επί** και **1-1. Παράδειγμα:** η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad , \quad x \to x^2$$

είναι μία αμφίεση

14. **Αντίστροφη συνάρτηση.** Έστω ότι f είναι **επί και ένα-προς-ένα (αμφίεση)** με πεδίο ορισμού A και πεδίο τιμών B. Η συνάρτηση

$$f^{-1} : B \to A \ , \ f(x) \to x$$

καλείται **αντίστροφη συνάρτηση** και ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) &= x \text{ για κάθε } x \text{ στο } A \\ f\left(f^{-1}\left(y\right)\right) &= y \text{ για κάθε } y \text{ στο } B \end{aligned}$$

Αν η f **δεν είναι αμφίεση** τότε η αντίστροφη f^{-1} μπορεί να είναι μία σχέση όχι όμως συνάρτηση. Για παράδειγμα, γενικά η $y = x^2$ δίνει αντίστροφη $x = \pm\sqrt{y}$ ενώ η $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \to x^2$ δίνει $x = \sqrt{y}$.

15. **Σταθερή συνάρτηση.** $f(x) = a$. Για παράδειγμα σχεδιάστε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις $y = -1$, $y = 1$, $y = 2$,... (**οριζόντιες γραμμές**). Παρομοίως, έστω ότι $x = 1$ ή $x = 2$ ή γενικότερα $x = a \in \mathbb{R}$ (σχεδιάζονται στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ως **κάθετες γραμμές)**

2 Συνέχεια

1. **Συνέχεια (σημειακή).** Μία συνάρτηση $f : A \to B$ με $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $|x - x_0| < \varepsilon$ τέτοιο ώστε

$$|f\left(x\right) - f\left(x_0\right)| < \delta$$

Τεχνικός ορισμός. Εξεζητημένες αποδείξεις συνέχειας. Ακόμα πιο επίσημος ορισμός

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_{++} \ , \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{++} : |f\left(x\right) - f\left(x_0\right)| < \delta \ , \ \forall \left|x - x_0\right| < \varepsilon$$

ή αν θέλετε με χρήση της έννοιας της γειτνίασης

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_{++} \ , \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{++} : f\left(x\right) \in N_\delta(f\left(x_0\right)) \ , \ \forall x \in N_\varepsilon(x_0) \cap A$$

Η συνάρτηση $f\left(x\right)$ είναι συνεχής στο A αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι η $f\left(x\right)$ είναι συνεχής.

   (i) **Παράδειγμα.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f\left(x\right) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f\left(x\right) = \alpha + \beta x$$

είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| < \delta &\Rightarrow |\alpha + \beta x - \alpha - \beta \cdot 2| < \delta \\ &\Rightarrow |\beta (x-2)| < \delta \Rightarrow |x - 2| < \frac{\delta}{|\beta|} \end{aligned}$$

Άρα ο ορισμός ικανοποιείται αν θέσουμε $\varepsilon = \frac{\delta}{|\beta|}$ το οποίο όντως είναι θετικό $\varepsilon > 0$ αφού $\delta > 0$. Παρομοίως, η σημειακή συνέχεια ισχύει για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού $\mathbb{R}$, άρα η $f(x) = \alpha + \beta x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(ii) **Παράδειγμα.** Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 \, , \, x \leq 0 \\ 2 \, , \, x > 0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Έχουμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \delta$$

και

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x| < \varepsilon$$

Δηλαδή πρέπει $f(x) \in (1-\delta, 1+\delta)$ για κάθε $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Όμως, για παράδειγμα, αν το x βρίσκεται μεταξύ του 0 και του ε τότε πρέπει η $f(x) = 2$ να βρίσκεται στο διάστημα $(1-\delta, 1+\delta)$, δηλαδή $f(x) = 2 \in (1-\delta, 1+\delta)$, κάτι το οποίο δεν ικανοποιείται για κάθε $\delta > 0$ παρά μόνο για $\delta \geq 1$.