Διάλεξη 1 - Σημειώσεις[1]

1 Σύνολα

Πως διαβάζουμε κάποιους συμβολισμούς:

- $\in$ **ανήκει** και $\notin$ η άρνηση, δηλαδή **δεν ανήκει**
- $\exists$ **υπάρχει**
- $\forall$ **για κάθε**
- : **τέτοιο ώστε**. Επίσης το σύμβολο $|$ έχει την ερμηνεία **«τέτοιο ώστε»**
- $\wedge$ **και**, $\vee$ **ή**
- $\Rightarrow$ **υπονοεί**

1. **Σύνολο.** Κάθε συλλογή (σαφώς) διακριτών αντικειμένων που θεωρούμε ως ολότητα π.χ. $T = \{1, b, 4, q\}$
2. **Συμβολισμός.** Συνήθως με κεφαλαία γράμματα, π.χ. σύνολο S ή σύνολο Ψ κ.ο.κ
3. **Στοιχεία συνόλου.** Τα σαφώς διακριτά αντικείμενα που περιέχονται στο σύνολο καλούνται **στοιχεία του συνόλου**.
   Στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να είναι άλλα σύνολα ή και σύνολα συνόλων κ.ο.κ.
   Όταν το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο T γράφουμε $x \in T$ και όταν δεν ανήκει γράφουμε $x \notin T$. π.χ. $4 \in T$, $q \in T$, $7 \notin T$
4. **Παραδείγματα ...**
5. **Κενό σύνολο.** Συμβολίζεται με $\varnothing$ και είναι το σύνολο το οποίο δεν έχει στοιχεία, $\varnothing = \{\}$
   Προσοχή το σύνολο $\{0\}$ δεν είναι κενό. Περιέχει το μηδέν!. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μόνο ένα κενό σύνολο.

[1] Πολύ υλικό από το online βιβλίο *«Lecture Notes on Introduction to Mathematical Economics»* του Walter Bossert, 2002, από το Πανεπιστήμιο του Μόντρεαλ, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών, `http://pages.videotron.com/wbossert/math_econ_aug02.pdf`

6. **Τρόπος γραφής και παρουσίασης συνόλων**

   (α') **Απαρίθμηση (ή συστηματικά)**
   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ή $A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$
   $\Phi = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$
   $M = \{$Ιανουάριος, Φεβρουάριος,...,Δεκέμβριος$\}$
   φυσικοί αριθμοί: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ και $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
   ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ή $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$

   (β') **Περιγραφή ιδιότητας (ή κατηγορηματικά)**

   Παρ. 1 $A = \{x :$ μονοψήφιος φυσικός αριθμός$\}$

   Παρ. 2 ή $A = \{x|$ μονοψήφιος φυσικός αριθμός$\}$

   Παρ. 3 $\Phi = \{x :$ φωνήεν Ελληνικού αλφαβήτου$\}$

   Παρ. 4 $M = \{x :$ ονομασία μήνα του έτους$\}$

   Παρ. 5 $\mathbb{N} = \{x : x$ είναι φυσικός αριθμός$\}$

   Παρ. 6 $\mathbb{Z} = \{y - x : y, x \in \mathbb{N}\}$ σύνολο ακέραιων αριθμών

   Παρ. 7 $\mathbb{N}_0 = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$

   Παρ. 8 $\mathbb{Z}_+ = \{y - x : y, x \in \mathbb{N} \wedge y \geq x\}$ σύνολο **μη-αρνητικών ακέραιων** αριθμών

   Παρ. 9 $\mathbb{Z}_{++} = \{y - x : y, x \in \mathbb{N} \wedge y > x\}$ σύνολο **θετικών ακέραιων** αριθμών

   Παρ. 10 Τώρα είναι ευκολότερο (με περιγραφή δηλαδή) να ορίσουμε και το σύνολο των **ρητών** αριθμών

   $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\mu}{\nu} : \mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{Z} \text{ και } \nu \neq 0\right\}$$

7. **Υποσύνολο και γνήσιο υποσύνολο.**
   Όταν
   $$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$
   τότε το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B και γράφουμε $A \subseteq B$.

   - Έτσι αν $A = \{1, -2, 0, 4\}$ και $B = \{1, -2, 0, 4, -1\}$ έχουμε $A \subseteq B$
   - Αν $\Gamma = \{4, -2, 0, 1\}$ τότε επίσης $A \subseteq \Gamma$.
   - Το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου
   - Επίσης, κάθε σύνολο, έστω A, είναι υποσύνολο του εαυτού του $A \subseteq A$
   - Αν το A είναι υποσύνολο του B αλλά $A \neq B$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε το σύνολο A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B και γράφουμε $A \subset B$.

- Με βάση τα παραπάνω σύνολα, $A \subset B$ και $A \subseteq \Gamma$

8. **Ισότητα συνόλων.** Τα σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία τότε είναι ίσα και γράφουμε $A = B$. Επίσης έχουμε

$$\text{αν } A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A \text{ τότε } A = B$$

Με βάση τα σύνολα στην προηγούμενη παράγραφο (7) έχουμε ότι $A = \Gamma$. Επίσης $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_+$ και $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++}$

9. **Γενικό σύνολο και συλλογή συνόλων.** Έστω ότι S είναι ένα «γενικό» σύνολο από όπου επιλέγουμε στοιχεία και σχηματίζουμε υποσύνολα $A_i \subseteq S$ γιά $i = 1, ..., n$. Αν σχηματίσουμε το σύνολο

$$F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$$

τότε αυτό καλείται **συλλογή συνόλων**.

10. **Πράξεις συνόλων**

(α′) **Ένωση**

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Παράδειγμα. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{4, 5, 6, 7\}$ τότε

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Παράδειγμα. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 5, 1, 7\}$ τότε

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

Παράδειγμα. Έστω ότι $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ μία **συλλογή συνόλων**. Τότε $\bigcup_{i=1}^{n} F$ συμβολίζει την ένωση

$$\bigcup_{i=1}^{n} F = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

(β′) **Τομή**

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Παράδειγμα. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{4, 5, 6, 7\}$ τότε

$$A \cap B = \{\} = \varnothing$$

Παράδειγμα. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 5, 1, 7\}$ τότε

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

Παράδειγμα. Ξένα σύνολα ή αποσύνδετα σύνολα: αυτά που δίνουν

$$A \cap B = \varnothing$$

Παράδειγμα. Έστω ότι $F = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ μία **συλλογή συνόλων.** Τότε

$$\bigcap_{i=1}^{n} F = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

(γ΄) **Συμπληρωματικό σύνολο.** Έστω ότι S είναι ένα γενικότερο σύνολο. Το σύνολο όλων των στοιχείων του S που δεν ανήκουν στο $A_i \subset S$ λέγεται **συμπλήρωμα του συνόλου** A_i **στο** S και συμβολίζεται με A_i^c ή $\bar{A}_i$

$$A_i^c = \{x : x \in S \wedge x \notin A_i\}$$

$$\text{ιδιότητα συμπληρώματος:}\;\; (A^c)^c = A$$

Παράδειγμα. Αν $W = \{a, b, c, d, e, f\}$ και $T = \{d, e\}$ τότε το **συμπλήρωμα του συνόλου** T **στο** W δίνεται από

$$T^c = \{a, b, c, f\}$$

(δ΄) **Διαφορά.** $A - B$ ή $A \backslash B$

$$\begin{aligned} A - B &= \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \\ &\;\text{ή} \\ A - B &= \{x : x \in A \wedge x \in B^c\} \end{aligned}$$

Παραδείγματα.

$$\begin{aligned} A - B &= \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 4\} = \{1, 3\} \\ B - A &= \{2, 4\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \varnothing \end{aligned}$$

$$A - B = \{a, b, c, d\} \setminus \{d, e, f\} = \{a, b, c\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3\} \setminus \{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$$

$$A - A = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2, 3\} = \varnothing$$

(ε′) **Συμμετρική διαφορά** $A \triangle B$ (ισχύει ότι $A \triangle B = B \triangle A$)

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Παράδειγμα. $A = \{1, 2, 3, 6\}$ και $B = \{2, 3, 4, 5\}$ τότε

$$\begin{aligned} A \backslash B &= \{1, 6\} \\ B \backslash A &= \{4, 5\} \\ A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) &= \{1, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

11. **Γραφήματα Venn.** (στον πίνακα γράφημα 1.2 - 1.6 από βιβλίο Bossert, σελ. 7)

12. **Σύνολο πραγματικών αριθμών** $\mathbb{R}$ (real numbers)

    - Περιέχει το σύνολο των ρητών αριθμών (rational numbers) και ... όλων των υπόλοιπων (άρρητοι αριθμοί - irrational numbers)
    - Το σύνολο των άρρητων αριθμών δεν έχει σύμβολο αλλά μπορούμε να το εκφράσουμε ως $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
    - Οι άρρητοι αριθμοί είναι δεκαδικοί **με δεκαδικά ψηφία που δεν τελειώνουν ποτέ** και **δεν επαναλαμβάνονται περιοδικά**
    - Το σύνολο των άρρητων αριθμών περιέχει δύο περαιτέρω (υποσύνολα) αριθμών (και όλα μαζί περιέχονται στο $\mathbb{R}$). Τους **αλγεβρικούς αριθμούς** και τους **υπερβατικούς αριθμούς**. Οι **αλγεβρικοί αριθμοί** (algebraic numbers) ($\mathbb{A}_R$ ή $\mathbb{A}$ ή $\bar{\mathbb{Q}}$) αποτελούν τις λύσεις πολυωνύμων με συντελεστές που είναι ακέραιοι (integer numbers)

Παράδειγμα. π.χ. ο διασημότερος άρρητος αριθμός που είναι και αλγεβρικός είναι η (θετική) ρίζα του 2 (σταθερά του Πυθαγόρα[2])

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

ή με ακρίβεια 25 δεκαδικών ψηφίων χωρίς στρογγυλοποίηση

$$\sqrt{2} \approx \pm 1,4142135623730950488016887 2$$

και αποτελεί το *μήκος* της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με μήκος πλευρών (ισοσκελών) ίσο με 1

[2]Σημείωση: $\sqrt{2}$: numberphile βίντεο `https://www.youtube.com/watch?v=5sKah3pJnHI`

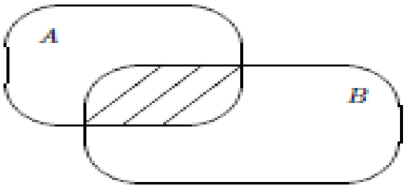


Figure 1.2: $A \cap B$.

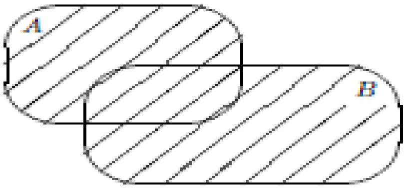


Figure 1.3: $A \cup B$.

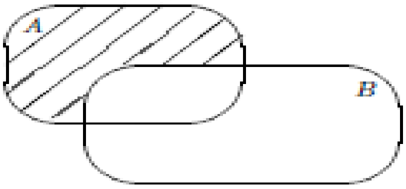


Figure 1.4: $A \setminus B$.

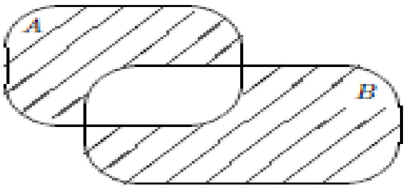


Figure 1.5: $A \triangle B$.

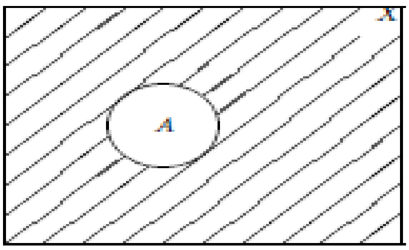
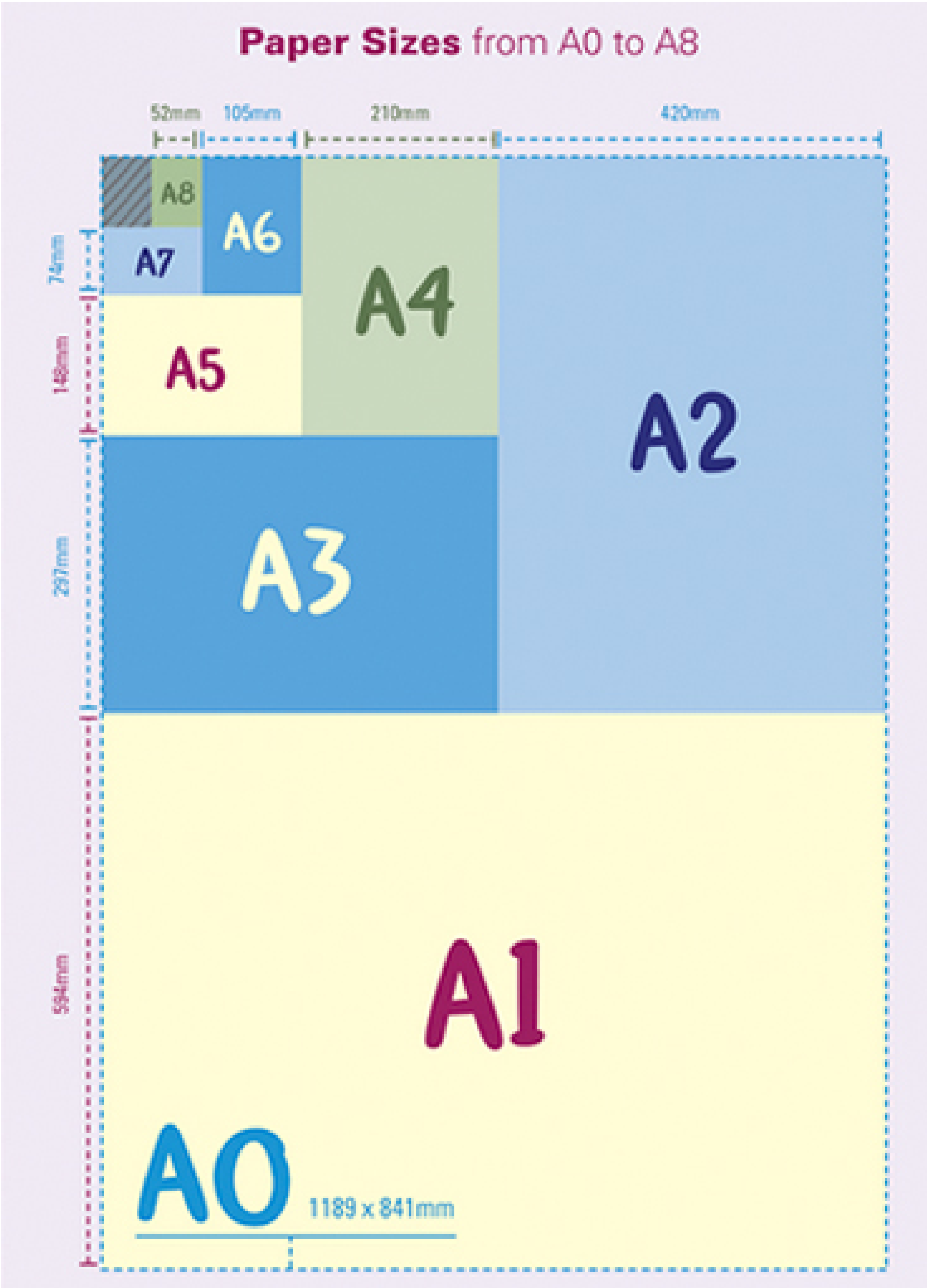
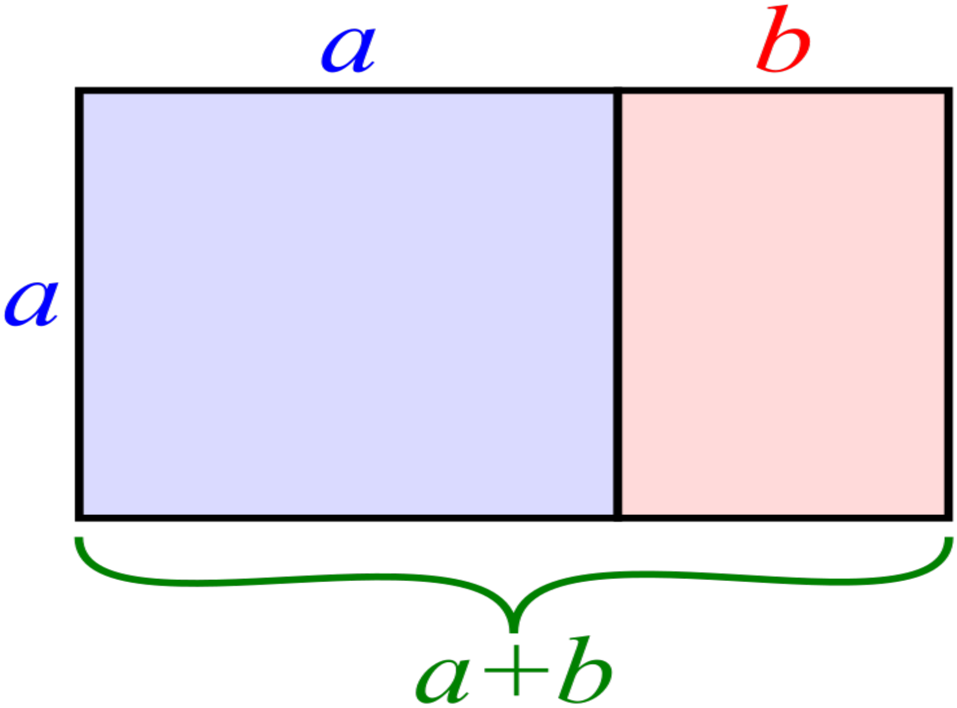


Figure 1.6: $\overline{A}$.

Εικ. 1. Μερικά γραφήματα Venn



Εικ. 2. Τετραγωνική ρίζα του 2 και Διαστάσεις χαρτιού ... , A4 , ... $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha/2}$



Εικ. 3. Ο χρυσός αριθμός, ... $\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$

Παράδειγμα. Ένας άλλος «γνωστός» αλγεβρικός αριθμός είναι ο (χρυσός αριθμός ή χρυσός λόγος[3]) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ που αποτελεί μία από τις δύο ρίζες του πολυωνύμου

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Σημείωση: Οι **ρητοί είναι αλγεβρικοί** αφού

$$\nu x - \mu = 0 \Rightarrow x = \frac{\mu}{\nu} \quad , \quad \mu, \nu \in Z \ \wedge \ \nu \neq 0$$

- Γενικότερα, οι φυσικοί αριθμοί, τα κλάσματα (ρητοί) και οι ρίζες είναι όλα **αλγεβρικοί** αριθμοί, αφού αποτελούν λύσεις πολυωνύμων αυτού του είδους.

  Σημείωση: Υπερβατικοί αριθμοί[4]: όσοι δεν είναι αλγεβρικοί.

[3] Βλ. `http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html`, golden number or golden ratio

[4] e, π: numberphile βίντεο `https://www.youtube.com/watch?v=seUU2bZtfgM`

Τα κυριότερα παραδείγματα, οι αριθμοί[5]

$$\pi \approx 3,14159 \quad (\approx 3.14159265358979323846264 33)$$
$$e \approx 2,71828 \quad (\approx 2.71828182845904523536028 74)$$

Σημείωση: συζήτηση περί π (Αρχιμήδης $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ και e).

- Όλοι οι υπερβατικοί αριθμοί (transcendental numbers) είναι άρρητοι (irrational) όχι όμως και το αντίστροφο (για παράδειγμα ο $\sqrt{2}$ δεν είναι υπερβατικός).

  Ο μαθηματικός Georg Cantor απέδειξε ότι υπάρχουν πολύ περισσότεροι υπερβατικοί αριθμοί από ό,τι υπάρχουν αλγεβρικοί αριθμοί, παρόλο που υπάρχουν απείρως πολλοί και στα δύο σύνολα.

- Γεωμετρικά, το σύνολο $\mathbb{R}$ παριστάνεται από τα σημεία μίας ευθείας γραμμής που εκτείνεται προς το $-\infty$ και προς το $+\infty$.

  Σημείωση: συζήτηση περί «απείρου»[6]. Είναι το σύμπαν άπειρο; χμμμμ

  Σημείωση: Δεν γνωρίζουμε αν οι αριθμοί $\pi + e$ ή $\frac{\pi}{e}$ ή $\ln \pi$ είναι άρρητοι. Όμως δεν ικανοποιούν καμμία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ≤ 8 με ακέραιους συντελεστές μέσου μεγέθους 10^9 (δέκα στην ενάτη).

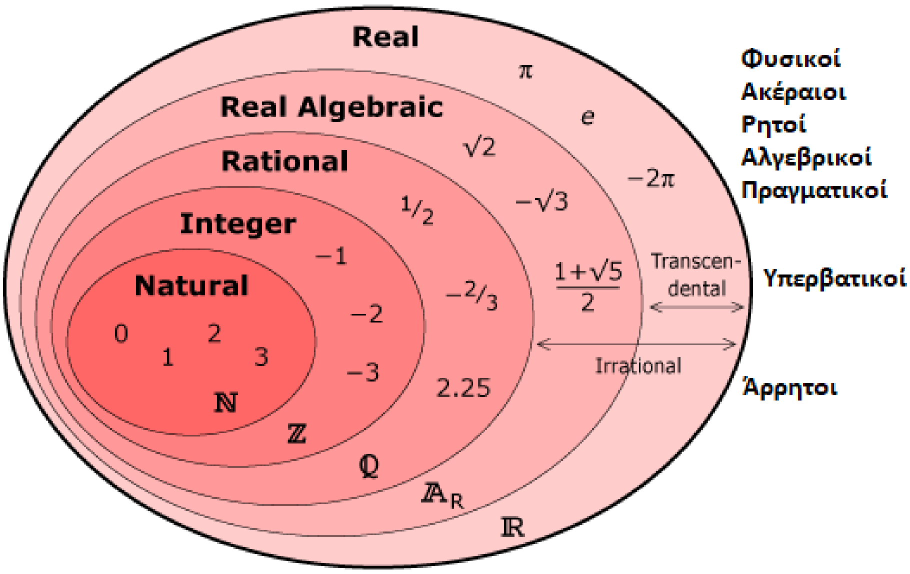
Σημείωση: το γράφημα 4 λήφθηκε από την ιστοσελίδα `http://thinkzone.wlonk.com/Numbers/NumberSets.htm`.

(α′) **Διαστήματα.** Πρόκειται για υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Έχουμε

- **ανοιχτό**
$$(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < \beta\}$$
- **κλειστό**
$$[a, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq \beta\}$$

[5] e: numberphile βίντεο `https://www.youtube.com/watch?v=AuA2EAgAegE`, π: numberphile βίντεο `https://www.youtube.com/watch?v=yJ-HwrOpIps`

[6] Βλ. numberphile βίντεο στο youtube `https://www.youtube.com/watch?v=elvOZm0d4H0`



Εικ. 4. Σύνολα αριθμών

- **ανοιχτό δεξιά**

$$[a, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < \beta\}$$

- **ανοιχτό αριστερά**

$$(a, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq \beta\}$$

- Επίσης με το «συν άπειρο» $+\infty$ και το «μείον άπειρο» $-\infty$ ορίζονται τα

$$[a, +\infty) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ και } x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ και } x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ και } x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ και } x \leq a\}$$

- καθώς και τα διαστήματα $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_{++} = (0, +\infty)$ (αντίστοιχα τα $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_{--}$). **Το ίδιο το $\mathbb{R}$ είναι το διάστημα** $(-\infty, +\infty)$.
- Ως «εκφυλισμένα διαστήματα» ορίζονται υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με ένα μόνο στοιχείο ή το κενό σύνολο.

13. **Καρτεσιανό σύνολο.** Γιά δύο σύνολα A και B, το Καρτεσιανό γινόμενο των A και B ορίζεται ως

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ και } y \in B\}$$

όπου (x, y) είναι όλα τα **διατεταγμένα** ζεύγη με το πρώτο στοιχείο να ανήκει στο A και το δεύτερο στοιχείο να ανήκει στο B.

Παράδειγμα. Αν $A = \{1, 2, 4\}$ και $B = \{2, 3\}$ τότε

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3)\}$$

ενώ

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$$

άρα

$$A \times B \neq B \times A$$

εκτός και αν $A = B$ ή ένα εκ των δύο είναι το κενό σύνολο.

Παράδειγματα. (Σχεδίαδη στον πίνακα. Οριζόντιος άξονας: x, κάθετος άξονας: y)

- Διαστήματα: $A = (1, 2)$ και $B = [0, 1]$, τότε

$$A \times B = \{(x, y) : (1 < x < 2) \text{ και } (0 \leq y \leq 1)\}$$

- $A = \{1\}$ και $B = [1, 2]$,

$$A \times B = \{(x, y) : x = 1 \text{ και } (1 \leq y \leq 2)\}$$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ... Δύο διαστάσεις (**επίπεδο**). Συντεταγμένες ονομάζονται οι τιμές x και y
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ ... Τρεις διαστάσεις (**χώρος**). Γενίκευση καρτεσιανού γινομένου σε διατεταγμένες ν-άδες

14. (n θετικός ακέραιος) Ένα **διάνυσμα** στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ καλείται η συλλογή n αριθμών $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα μπορεί να γραφεί και **χωρίς κόμματα**: $x = (x_1\ x_2\ ...\ x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Το άθροισμα των στοιχείων του x συμβολίζεται, για συντομία, με

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Παρόμοια το γινόμενο $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ συμβολίζεται με

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

- Ισχύουν οι παρακάτω κανόνες (όπου c μία σταθερά δηλαδή μία ποσότητα που δεν εξαρτάται από τον δείκτη i)

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + ... + c}_{n \text{ φορές}} = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Αν ορίσουμε τον αριθμητικό μέσο («μέση τιμή») ως

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

τότε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

και μπορούμε να διαχωρίσουμε το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή ως

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = ... = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

και το άθροισμα των γινομένων των αποκλίσεων των τιμών δύο διανυσμάτων από τη μέση τιμή τους ως

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = ... = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

15. **Απόλυτη τιμή** πραγματικού αριθμού, $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Απόσταση του x από το μηδέν.

- **Ιδιότητες** (n θετικός ακέραιος), $x, y, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$

$$|-x| = |x|$$

$$|xy| = |x|\,|y|$$

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n| = |x_1|\,|x_2| ... |x_n|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ ,\ y \neq 0$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \ \text{ τριγωνική ανισότητα}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \geq |x_1| - |x_2| - ... - |x_n|$$

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x| + |y| \\ |x - y| &\geq |x| - |y| \end{aligned}$$

- Η απόλυτη τιμή ορίζει διαστήματα (ανοιχτά ή κλειστά) αφού

$$|x| < \varepsilon \Rightarrow x \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \ \text{ ή } \ -\varepsilon < x < +\varepsilon \text{ γιά } \varepsilon \in \mathbb{R}$$

- Γενικότερα

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< \varepsilon \Rightarrow x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ |x - x_0| &\leq \varepsilon \Rightarrow x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \end{aligned}$$

- Γράφημα στον πίνακα ...

- Απόσταση των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$$

Παράδειγμα.

$$d(-3, 8) = |-3 - 8| = |8 - (-3)| = 11$$

16. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα που ανήκει στο $\mathbb{R}^n$. Το (*Ευκλείδιο*) μέτρο του διανύσματος δίνεται από

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- **Μετρά απόσταση από το 0** στα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...
- Δίνει το *μέγεθος* του διανύσματος. **Παράδειγμα με σύγκριση** $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$(i) : x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$(ii) : x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(iii) : x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Επίσης, τρισδιάστατο παράδειγμα (γραφικό) της περίπτωσης (iii).
- Απόσταση (δύο διανυσμάτων)

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

- **Παράδειγμα με σχεδίαση στον πίνακα (και χρήση Excel για άλγεβρα)**

$$x = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

  Επίσης

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \\ x &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \\ x &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Γενικευμένα μέτρα ή νόρμες

$$\|x\|_k = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^k \right)^{\frac{1}{k}}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

17. ε-γειτνίαση και **εσωτερικό σημείο**. Γιά $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$ η ε-γειτνίαση του x_0 ορίζεται ως

$$N\varepsilon(x_0) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ και } |x - x_0| < \varepsilon\}$$

- Η $|x - x_0|$ ορίζει την **απόσταση** μεταξύ των x, x_0
- Έστω ότι $A \subseteq \mathbb{R}$, το $x_0 \in A$ είναι **εσωτερικό σημείο** του A αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$ τέτοιο ώστε $N\varepsilon(x_0) \subseteq A$

- Με βάση αυτό τον ορισμό ένα σημείο $x_0 \in A$ είναι εσωτερικό του A αν και μόνο αν υπάρχει μία γειτνίαση του x_0 που περιέχεται στο A
- Γιά παράδειγμα στο σύνολο $A = [0, 1)$ όλα τα σημεία $x \in (0, 1)$ είναι εσωτερικά σημεία του A αλλά το 0 δεν είναι
- Γενίκευση στο $\mathbb{R}^2$. Έστω ότι $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^2$ ένα δισδιάστατο διάνυσμα, π.χ. $x_0 = \left(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}\right)$. Γράφημα ...
- Τότε $N\varepsilon(x_0) = \{x : x \in \mathbb{R}^2$ και $\|x - x_0\|_2 < \varepsilon\}$ είναι ένας κύκλος σημείων με κέντρο το x_0 και ακτίνα ε
- Άρα $N\varepsilon(x_0) = \{x : x \in \mathbb{R}^2$ και

  $$\sqrt{\left(x^{(1)} - x_0^{(1)}\right)^2 + \left(x^{(2)} - x_0^{(2)}\right)^2} < \varepsilon\}$$

  Ο γενικός τύπος κύκλου (η γενική σχέση) με κέντρο το σημείο (x_1, y_1) και ακτίνα r:

  $$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r$$

18. **Ανοιχτά** και **κλειστά σύνολα** στο $\mathbb{R}$. Αν **όλα** τα στοιχεία ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι εσωτερικά σημεία, τότε το A καλείται **ανοιχτό σύνολο** στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, αν το συμπληρωματικό σύνολο $\bar{A}$ του $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι **ανοιχτό** στο $\mathbb{R}$, τότε το A καλείται **κλειστό** στο $\mathbb{R}$.

    $[a, b]$ κλειστά διαστήματα
    (a, b) ανοιχτά διαστήματα
    $\mathbb{R}$ ανοιχτό , $\varnothing$ ανοιχτό
    $[a, b), (a, b]$ ούτε ανοιχτά , ούτε κλειστά

    Επιπλέον, **ενώσεις μη-επικαλυπτόμενων ανοιχτών διαστημάτων** είναι **ανοιχτά** διαστήματα και **ενώσεις μη-επικαλυπτόμενων κλειστών διαστημάτων** είναι **κλειστά** διαστήματα

    $$\begin{aligned} \text{Έστω } A &= [0,1] \text{ με συμπληρωματικό } \bar{A} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ & \text{ το } \bar{A} \text{ είναι ανοιχτό άρα το } A \text{ είναι κλειστό} \end{aligned}$$

19. **Μέγιστο, άνω φράγμα, ελάχιστο, κάτω φράγμα υποσυνόλων πραγματικών αριθμών**

    (α′) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι κενό και έστω $u \in \mathbb{R}$

i. το u είναι ένα άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $x \leq u$ για κάθε $x \in A$

ii. το u είναι ένα κάτω φράγμα του A αν και μόνο αν $x \geq u$ για κάθε $x \in A$

(β′) Ένα μη-κενό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο από πάνω (από κάτω) αν και μόνο αν υπάρχει άνω (κάτω) φράγμα

(γ′) Ένα μη-κενό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν το A έχει άνω και κάτω φράγμα

(δ′) Δεν έχουν όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ άνω ή κάτω φράγματα. Π.χ. το σύνολο $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ δεν έχει άνω φράγμα

(ε′) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι κενό και έστω $u \in \mathbb{R}$

i. το u είναι το **ελάχιστο άνω φράγμα (supremum ή** sup**)** του A αν και μόνο αν το u είναι ένα άνω φράγμα του A και $u \leq u'$ για όλα τα $u' \in \mathbb{R}$ που είναι άνω φράγματα του A

ii. το ℓ είναι το **μέγιστο κάτω φράγμα (infimum ή** inf**)** του A αν και μόνο αν το ℓ είναι ένα κάτω φράγμα του A και $\ell \geq \ell'$ για όλα τα $\ell' \in \mathbb{R}$ που είναι κάτω φράγματα του A

iii. **Παράδειγμα:** Έστω $A = [0, 1)$ τότε $\sup A = 1$ αλλά ποιά τιμή παίρνει το $\max A =$;

iv. **Παράδειγμα:** Έστω $A = \left(\frac{1}{2}, 5\right)$ τότε $\sup A = 5$ και $\inf A = \frac{1}{2}$ αλλά ποιά τιμή παίρνει το $\max A =$; ή το $\min A =$;

v. **Παράδειγμα:** Έστω $A = [0, 1]$ τότε $\sup A = 1$ και $\max A = 1$ (όπως και $\inf A = 0$, $\min A = 0$)

20. **Κυρτά (convex)** υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι κυρτό αν και μόνο αν

$$[\lambda x + (1 - \lambda)y] \in A, \forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1]$$

(α′) **Γεωμετρικά**, το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι κυρτό αν για κάθε δύο σημεία $x, y \in A$, **όλα τα σημεία της γραμμής που ενώνουν** τα x και y ανήκουν στο A.

(β′) Το σημείο $\lambda x + (1 - \lambda)y$ όπου $\lambda \in [0, 1]$ καλείται κυρτός συνδυασμός των x και y (απλώς πρόκειται για έναν σταθμικό μέσο των σημείων)

(γ′) Όλα τα διαστήματα, $[\,]$, $(\,)$, $[\,)$, $(\,]$ (και το $\mathbb{R}$) είναι κυρτά

(δ′) Όλα τα σύνολα ενός σημείου είναι κυρτά και το κενό σύνολο είναι κυρτό

Παράδειγμα. Ένα παράδειγμα **μη-κυρτού** συνόλου στο $\mathbb{R}$ είναι το $A = [0,1] \cup \{2\}$

(ε΄) Παρομοίως, Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό αν και μόνο αν $[\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}] \in A$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, $\forall \lambda \in [0,1]$

Παράδειγμα. Οπτική παρουσίαση κυρτών συνόλων στο $\mathbb{R}^2$ στον πίνακα...

21. **Μιγαδικοί αριθμοί, σύνολο** $\mathbb{C}$. Έστω ο φανταστικός αριθμός $i = \sqrt{-1}$ ή $i^2 = -1$

$$\mathbb{C} \quad = \quad \left\{ z = a + bi : a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1} \right\}$$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι, στην ουσία, υποσύνολο του συνόλου των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R} \quad \subset \quad \mathbb{C}$$

αφού λαμβάνεται στην περίπτωση που $b = 0$.

Οι μιγαδικοί αριθμοί Θα χρησιμοποιηθούν πολύ (θα τους συναντήσουμε) στη λύση δευτεροβάθμιων εξισώσεων (ή στην εύρεση ριζών πολυωνυμικών συναρτήσεων), στις διαφορικές εξισώσεις και στις εξισώσεις διαφορών. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις μπορούν να παράγουν *"ωραία" κυκλική συμπεριφορά*.

(α΄) Ο αριθμός $z = a + bi$ όπου a το **πραγματικό μέρος** του αριθμού και b το **φανταστικό μέρος** του αριθμού ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός**

(β΄) Ο αριθμός $\bar{z} = a - bi$ ονομάζεται **συζυγής** του z ενώ **το μέτρο ή απόλυτη τιμή μιγαδικού (modulus)** ρ δίνεται από

$$\rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} z &= 1 + i \\ \rho &= |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

(γ΄) **Αλγεβρικές ιδιότητες μιγαδικών**

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)\,i$$
$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)\,i$$
$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)\,i}{c^2+d^2}$$

(δ΄) Γεωμετρική παράσταση μιγαδικού αριθμού (**στον πίνακα**)...

(ε΄) Αν θέσουμε

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

τότε ισχύει ότι

$$a = \rho \cos\theta \text{ και } b = \rho \sin\theta$$

(ϛ΄) Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού $z = a + bi$

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z^n &= \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \text{De Moivre formula} \end{aligned}$$

(ζ΄) Εκθετική μορφή

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Άρα

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \;\; \textbf{Euler's formula}$$

Επειδή για το ημίτονο και συνημίτονο ισχύει ότι

$\cos(-2\pi)$	$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$	$\cos(-\pi)$	$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos 0$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\cos\pi$	$\cos\frac{3\pi}{2}$	$\cos 2\pi$
1	0	−1	0	1	0	−1	0	1

$\sin(-2\pi)$	$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$	$\sin(-\pi)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\sin 0$	$\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\pi$	$\sin\frac{3\pi}{2}$	$\sin 2\pi$
0	1	0	−1	0	1	0	−1	0

έχουμε τα παρακάτω (**διάσημα**) αποτελέσματα:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

αλλά και

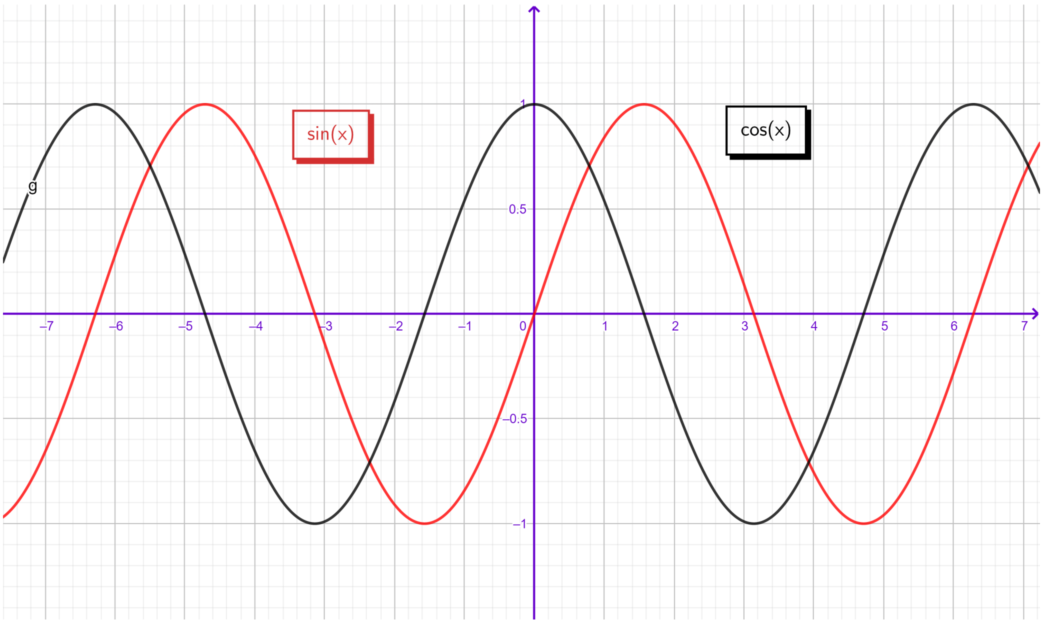
$$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 + i\cdot 0 = -1$$

Ενώ, για $\frac{\pi}{2}$ έχουμε το αποτέλεσμα:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i$$

και

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i\cdot(-1) = -i$$



Εικ. 5. Δύο βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Το ημίτονο του x: $sin\,(x)$ (κόκκινη καμπύλη), και το συνημίτονο του x: $cos\,(x)$ (μαύρη καμπύλη)

(διασκέδαση) Επίσης αποδεικνύεται ότι

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = ... = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.207879...$$

και

$$(-1)^{-i} = \left(e^{i\pi}\right)^{-i} = ... = e^{\pi} = 23.140... \quad \text{Gelfond's constant}$$

Το σχήμα 5 απεικονίζει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις **ημιτόνου:** $\sin(x)$, και **συνημιτόνου:** $\cos(x)$ αντίστοιχα.