Περίγραμμα διάλεξης 6

1 Βελτιστοποίηση συναρτήσεων με δύο και περισσότερες (ανεξάρτητες) μεταβλητές

1.1 Συνθήκες πρώτης τάξης, Σ.Π.Τ.

Στην μονομεταβλητή συνάρτηση (με μία ανεξάρτητη μεταβλητή και δισδιάστατο γράφημα) $y = f(x)$, το **στάσιμο σημείο** ορίστηκε από την τιμή x^* που ικανοποιεί τη **Σ.Π.Τ**

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

δηλαδή

$$f'(x^*) = 0$$

ή

$$dy = f'(x^*)\, dx = 0 \cdot dx = 0$$

Παρομοίως, αν για κάποιες τιμές x_1, x_2 το ολικό διαφορικό

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

της $y = f(x_1, x_2)$ είναι μηδενικό όταν μετακινηθούμε είτε προς **μία** κατεύθυνση, π.χ. $dx_1 \neq 0$ ή $dx_2 \neq 0$, είτε προς **δύο** κατευθύνσεις, π.χ. $dx_1, dx_2 \neq 0$, τότε έχουμε τις **αναγκαίες συνθήκες** - αλλά όχι ικανές - για τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης,

$$dy = 0 \quad \text{γιά} \quad dx_1, dx_2 \neq 0 \quad \text{αν} \quad f_1 = f_2 = 0$$

Οι τιμές x_1^*, x_2^* που ικανοποιούν το σύστημα των **Σ.Π.Τ**, δηλαδή τις εξισώσεις

$$f_1 = f_2 = 0$$

μαζί με την τιμή $y^* = f(x_1^*, x_2^*)$ ορίζουν το **στάσιμο σημείο** (x_1^*, x_2^*, y^*).

1.2 Συνθήκες δεύτερης τάξης (Σ.Δ.Τ) ή ικανές συνθήκες για βελτιστοποίηση

Όπως ορίσαμε την πρώτη μερική παράγωγο μίας συνάρτησης ως προς μία μεταβλητή μπορούμε να ορίσουμε και τη **δεύτερη** (και μεγαλύτερης τάξης) μερική παράγωγο ως προς μία μεταβλητή αλλά και τη **σταυροειδή** μερική παράγωγο

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \\ f_{22} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ f_{12} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\ ,\ \text{σταυροειδής} \\ f_{21} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\ ,\ \text{σταυροειδής} \end{aligned}$$

1.2.1 Θεώρημα Young

Αν οι σταυροειδείς μερικές παράγωγοι f_{21} και f_{12} είναι συνεχείς τότε

$$f_{21} = f_{12}$$

Άρα η σειρά των μεταβλητών με την οποία γίνεται η μερική παραγώγιση δεν θα μας ενδιαφέρει αφού για τις συναρτήσεις που θα συναντήσουμε η συνέχεια θα ικανοποιείται. Γενικότερα, αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους στο $x \in \mathbb{R}^n$ τότε $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ έχουμε

$$f_{ij}(x) = f_{ji}(x)$$

Το θεώρημα διευκολύνει υπολογιστικά την εύρεση των δεύτερων μερικών παραγώγων. Σημειώστε ότι υπάρχουν n^2 **δεύτερες** μερικές παράγωγοι για μία συνάρτηση n μεταβλητών. Ευτυχώς, λόγω της συμμετρίας του θεωρήματος χρειάζεται να υπολογίσουμε τις n δεύτερες μερικές παραγώγους κάθε μεταβλητής και τις $n(n-1)/2$ **αντί για όλες** τις $n(n-1)$ **σταυροειδείς**.

1.2.2 Παράδειγμα

Βρείτε τις μερικές παραγώγους (όλες, δηλαδή και τις n πρώτες και τις $n + n(n-1)/2$ δεύτερες) των συναρτήσεων

$$\begin{aligned} z &= f(y, x) = x^2 + 5xy + y^3 \\ y &= g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2^2 \end{aligned}$$

Για την πρώτη συνάρτηση υπάρχουν $n^2 = 4$ συνολικά παράγωγοι. Θα υπολογίσουμε όμως μόνο τις $n = 2$ παραγώγους f_{xx}, f_{yy} και τις $n(n-1)/2 = 1$ σταυροειδείς f_{yx},

$$\begin{array}{ll} f_y = 5x + 3y^2 & f_x = 2x + 5y \\ f_{yy} = 6y & f_{xx} = 2 \\ f_{yx} = 5 & \end{array}$$

Για την δεύτερη συνάρτηση υπάρχουν $n^2 = 9$ συνολικά παράγωγοι. Θα υπολογίσουμε όμως μόνο τις $n = 3$ παραγώγους g_{11}, g_{22}, g_{33} και τις $n(n-1)/2 = 3$ σταυροειδείς g_{12}, g_{13}, g_{23},

$$\begin{array}{ccc} g_1 = x_2x_3 + 2x_1x_2^2 & g_2 = x_1x_3 + 2x_1^2x_2 & g_3 = x_1x_2 \\ g_{11} = 2x_2^2 & g_{22} = 2x_1^2 & g_{33} = 0 \\ g_{12} = x_3 + 4x_1x_2 & g_{13} = x_2 & g_{23} = x_1 \end{array}$$

1.2.3 Διαφορικό δεύτερης τάξης

Το διαφορικό δεύτερης τάξης και ειδικότερα το προσημό μου καθορίζει τις Σ.Δ.Τ.

Σημείωση: Οι μεταβολές dx, dy θεωρούνται δοσμένες άρα δεν διαφορίζονται ως προς τις μεταβλητές και τις μεταχειριζόμαστε ως "σταθερές".

Έστω συνεχής και τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών $z = f(y, x)$ με διαφορικό πρώτης τάξης

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

Το **δεύτερο διαφορικό** $d(dz) = d^2z$ δίνεται από την

$$d(dz) = \frac{\partial (dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial (dz)}{\partial y} dy$$

$$= \frac{\partial (f_x dx + f_y dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial (f_x dx + f_y dy)}{\partial y} dy$$

$$= (f_{xx} dx + f_{yx} dy) dx + (f_{xy} dx + f_{yy} dy) dy$$

$$\Rightarrow$$

$$d^2 z = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2$$

Αντίστοιχα, αν είχαμε μία συνεχή και τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών $z = f(y, x, w)$ το δεύτερο διαφορικό λαμβάνει την αναλυτική μορφή

$$d^2 z = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2 + 2 f_{xw} dx dw + 2 f_{yw} dy dw + f_{ww} dw^2$$

1.2.4 Παράδειγμα: Απλή αλγεβρική εξάσκηση.

Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$ με $f(x, y) = x^2 e^{-y}$. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης $d^2 z$ της z.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης,

$$\begin{array}{cc} f_x = 2xe^{-y} & f_y = -x^2e^{-y} \\ f_{xx} = 2e^{-y} & f_{yy} = x^2e^{-y} \\ f_{xy} = -2xe^{-y} & \end{array}$$

και υιοθετούμε τον τύπο

$$d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

Αναλυτικά

$$\begin{aligned} d^2z &= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 \Rightarrow \\ d^2z &= \left(2e^{-y}\right)dx^2 + 2\left(-2xe^{-y}\right)dxdy + \left(x^2e^{-y}\right)dy^2 \\ &= 2e^{-y}dx^2 - 4xe^{-y}dxdy + x^2e^{-y}dy^2 \end{aligned}$$

1.2.5 Συνθήκες δεύτερης τάξης, Σ.Δ.Τ

Γενικά λοιπόν, για συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες τουλάχιστον δύο φορές στο στάσιμο σημείο έχουμε τις παρακάτω **Σ.Δ.Τ**

Αν $d^2z < 0$ σε συγκεκριμένο στάσιμο σημείο τότε
έχουμε **τοπικό μέγιστο** (στο στάσιμο σημείο)

Αν $d^2z > 0$ σε συγκεκριμένο στάσιμο σημείο τότε
έχουμε **τοπικό ελάχιστο** (στο στάσιμο σημείο)

- **Παρατηρήστε** ότι το δεύτερο διαφορικό d^2z μπορεί να γραφεί μέσω **διανυσμάτων-μητρών** ως

$$\begin{aligned} d^2z &= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 \\ &= \lambda' A \lambda \end{aligned}$$

όπου το **διάνυσμα στήλη** λ και το ανάστροφό του λ' δίνονται από

- $$\lambda' = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

και η **τετραγωνική συμμετρική μήτρα** A από

- $$A = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- Η **συμμετρική μήτρα** A που περιέχει τις **δεύτερες μερικές παραγώγους** συμβολίζεται συνήθως με H

$$A = H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

  και καλείται **Εσσιανή μήτρα (Hessian matrix)** ή **μήτρα δεύτερων μερικών παραγώγων** (second partial derivatives matrix).

Τετραγωνική μορφή και θετικά (αρνητικά) ορισμένες (ημι-ορισμένες) μήτρες (οριστικότητα) Ο παραπάνω συμβολισμός για το δεύτερο διαφορικό γενικεύεται σε συναρτήσεις n μεταβλητών του τύπου

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

σε

$$\underset{1\times 1}{d^2 z} = \underset{1\times n}{\lambda'} \cdot \underset{n\times n}{H} \cdot \underset{n\times 1}{\lambda}$$

όπου

$$\lambda' = \begin{pmatrix} dx_1 & \cdots & dx_n \end{pmatrix}$$

και $n \times n$ **Εσσιανή μήτρα**

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & f_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & f_{n-1,n} \\ f_{n1} & \cdots & f_{n,n-1} & f_{nn} \end{pmatrix}$$

και ονομάζεται **τετραγωνική μορφή**. Άρα το δεύτερο διαφορικό - το πρόσημο του οποίου θα καθορίζει τις Σ.Δ.Τ είναι μία τετραγωνική μορφή.

- Γενικά, (για οποιαδήποτε τετραγωνική **συμμετρική** μήτρα H) η σχέση

$$\underset{1\times 1}{q} = \underset{1\times n}{\lambda'} \cdot \underset{n\times n}{H} \cdot \underset{n\times 1}{\lambda}$$

  καλείται **τετραγωνική μορφή** και ισχύουν τα παρακάτω σχετικά **με το πρόσημο** του βαθμωτού q

- $q = \lambda' H \lambda > 0$ (θετικό) αν η μήτρα H είναι **Θ.Ο.** Τότε, η τετραγωνική μορφή ονομάζεται **θετικά ορισμένη**

- $q = \lambda' H \lambda \geq 0$ (μη-αρνητικό) αν η μήτρα H είναι **Θ.Η.Ο.** Τότε, η τετραγωνική μορφή ονομάζεται **θετικά ημι-ορισμένη**

- $q = \lambda' H \lambda < 0$ (αρνητικό) αν η μήτρα H είναι **Α.Ο.** Τότε, η τετραγωνική μορφή ονομάζεται **αρνητικά ορισμένη**

- $q = \lambda' H \lambda \leq 0$ (μη-θετικό) αν η μήτρα H είναι **Α.Η.Ο.** Τότε, η τετραγωνική μορφή ονομάζεται **αρνητικά ημι-ορισμένη**

▶ **Σε ποιές περιπτώσεις είναι η Εσσιανή μήτρα H θετικά ορισμένη Θ.Ο και πότε Α.Ο;**

★ Θυμηθείτε ότι αν, στο στάσιμο σημείο, η H είναι **Θ.Ο** (γράφουμε $H > 0$) τότε $d^2z > 0$, ικανή συνθήκη (και έχουμε **τοπικό ελάχιστο** στο στάσιμο σημείο)

★ Θυμηθείτε ότι αν, στο στάσιμο σημείο, η H είναι είναι **Α.Ο** (γράφουμε $H < 0$) τότε $d^2z < 0$, ικανή συνθήκη (και έχουμε **τοπικό μέγιστο** στο στάσιμο σημείο)

Χρησιμοποιούμε τις **πρώτιστες κύριες ελάσσονες ορίζουσες** (**leading principal minors**) της Εσσιανής H οι οποίες συμβολίζονται με $H_1, H_2, H_3, \ldots$ και στην περίπτωση των συναρτήσεων δύο μεταβλητών (η Εσσιανή H είναι 2×2) δίνονται από

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \ , \ H_1 = f_{xx} \ , \ H_2 = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

ή

$$H = \begin{pmatrix} f_{yy} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{xx} \end{pmatrix} \ , \ H_1 = f_{yy} \ , \ H_2 = \begin{pmatrix} f_{yy} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{xx} \end{pmatrix}$$

▶ Ισχύει ότι η H είναι Θ.Ο και γράφου με $H > 0$ όταν $|H_1| > 0$, $|H_2| > 0$ δηλαδή όταν $f_{xx} > 0, f_{yy} > 0$ και $f_{xx}f_{yy} - (f_{yx})^2 > 0$

▶ Ισχύει ότι η H είναι Α.Ο και γράφουμε $H < 0$ όταν $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$ δηλαδή όταν $f_{xx} < 0, f_{yy} < 0$ και $f_{xx}f_{yy} - (f_{yx})^2 > 0$

1.2.6 Μεθοδολογία βελτιστοποίησης για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

▶ Άρα από το σύστημα εξισώσεων των **Σ.Π.Τ:**

$$f_x = f_y = 0$$

υπολογίζουμε το στάσιμο σημείο[1] x^*, y^*.

▶ **Σ.Δ.Τ:** Στη συνέχεια υπολογίζουμε την **Εσσιανή** μήτρα H και προβαίνουμε σε αντικατάσταση του στάσιμου σημείου x^*, y^* στην H για να έχουμε στη διάθεσή μας την H^*

▶ Ελέγχουμε αν

[1] και $f(x^*, y^*)$ που δίνει το τοπικό βέλτιστο (ελάχιστο ή μέγιστο) της συνάρτησης ενδιαφέροντος.

♣ $f^*_{xx} > 0, f^*_{yy} > 0$, $f^*_{xx} f^*_{yy} - \left(f^*_{yx}\right)^2 > 0$ για **τοπικό ελάχιστο** και

♣ $f^*_{xx} < 0, f^*_{yy} < 0$, $f^*_{xx} f^*_{yy} - \left(f^*_{yx}\right)^2 > 0$ για **τοπικό μέγιστο**

Στην περίπτωση που οι Σ.Δ.Τ **ικανοποιούνται για οποιεσδήποτε τιμές** x, y **στο πεδίο ορισμού** της $f(x, y)$ τότε το μέγιστο ή ελάχιστο είναι **ολικό**.

Παράδειγμα

$$z = f(x, y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$$

Σ.Π.Τ

$$f_x = 0 \Rightarrow 24x^2 + 2y - 6x = 0$$

$$f_y = 0 \Rightarrow 2x + 2y = 0$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των Σ.Π.Τ. **Αντικαθιστούμε** τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη και

$$24x^2 - 2x - 6x = 0 \Rightarrow 8x(3x - 1) = 0 \Rightarrow x^* = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

άρα **αντικαθιστώντας** το x^* στην δεύτερη (ή στην πρώτη αν και είναι αλγεβρικά πιό δύσκολο!) εξίσωση των Σ.Π.Τ έχουμε το **στάσιμο σημείο**

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{3} \end{cases}, y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

ενώ **η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης** $z = f(x, y)$ στο στάσιμο σημείο είναι

- στο στάσιμο σημείο (x_1^*, y_1^*) λαμβάνουμε

$$z^* = f(x_1^* = 0, y_1^* = 0) = 1$$

- και στο στάσιμο σημείο (x_2^*, y_2^*) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} z^* &= f\left(x_2^* = \frac{1}{3}, y_2^* = -\frac{1}{3}\right) \\ &= 8\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{23}{27} = 0.85185 \end{aligned}$$

Σ.Δ.Τ
Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι δίνονται από

$$f_{xx} = 48x - 6 \quad , \quad f_{yy} = 2 > 0$$
$$f_{xy} = 2$$

- και στο **στάσιμο σημείο** $(x_1^* = 0, y_1^* = 0)$ έχουμε

$$f_{xx}^* = -6 < 0 \quad , \quad f_{yy}^* = 2 > 0$$
$$f_{xy}^* = 2$$

με

$$f_{xx}^* f_{yy}^* - \left(f_{yx}^*\right)^2 = -6 \cdot 2 - 2^2 = -16 < 0$$

Άρα δεν αποτελεί ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο

- Ενώ στο **στάσιμο σημείο** $\left(x_2^* = \frac{1}{3}, y_2^* = -\frac{1}{3}\right)$ έχουμε

$$f_{xx}^* = 10 > 0 \quad , \quad f_{yy}^* = 2 > 0$$
$$f_{xy}^* = 2$$

με

$$f_{xx}^* f_{yy}^* - \left(f_{yx}^*\right)^2 = 10 \cdot 2 - 2^2 = 16 > 0$$

Άρα το $\left(x^* = \frac{1}{3}, y^* = -\frac{1}{3}\right)$ με

$$\begin{aligned} z^* &= f\left(x^*, y^*\right) \\ &= 8\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \\ &= 0.85185 \end{aligned}$$

αποτελεί **τοπικό ελάχιστο** με **ελάχιστη τιμή συνάρτησης**

$$z^* = 0.85185$$

Παράδειγμα Προβείτε σε βελτιστοποίηση της παρακάτω συνάρτησης

$$z = f\left(x, y\right) = x + 2ey - e^x - e^{2y}$$

δηλαδή βρείτε τις τιμές x^*, y^* που μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν την $f\left(x, y\right)$.
Σ.Π.Τ

$$f_x = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \Rightarrow x^* = 0$$
$$f_y = 0 \Rightarrow 2e - 2e^{2y} = 0 \Rightarrow y^* = \tfrac{1}{2}$$

Έχουμε λοιπόν το στάσιμο σημείο $(x^*, y^*) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $z^* = f\left(x^*, y^*\right) = -1$

Σ.Δ.Τ

Έχουμε

$$f_{xx} = -e^x$$
$$f_{yy} = -4e^{2y}$$
$$f_{xy} = 0$$

και στο στάσιμο σημείο $(x^*, y^*) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ έχουμε

$$f_{xx}^* = -1 < 0$$
$$f_{yy}^* = -4e < 0$$
$$f_{xy}^* = 0$$

με

$$f_{xx}^* f_{yy}^* - \left(f_{yx}^*\right)^2 = 4e > 0$$

Άρα το $(x^*, y^*, z^*) = \left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$ αποτελεί **τοπικό μέγιστο**.

Παρομοίως, χρησιμοποιώντας την Εσσιανή H και την H^* έχουμε

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x & 0 \\ 0 & -4e^{2y} \end{pmatrix}$$

$$H^* = \begin{pmatrix} f_{xx}^* & f_{xy}^* \\ f_{xy}^* & f_{yy}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4e \end{pmatrix}$$

με

$$\begin{aligned} |H_1^*| &= -1 < 0 \\ |H_2^*| &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4e \end{vmatrix} \\ &= (-1)(-4e) \\ &= 4e > 0 \end{aligned}$$

1.2.7 Γενίκευση όταν έχουμε περισσότερες από δύο μεταβλητές στη συνάρτηση ενδιαφέροντος

Έστω

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Σ.Π.Τ

Επίλυση συστήματος Σ.Π.Τ

$$\left.\begin{array}{c} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \vdots \\ f_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^*, x_2^*, .., x_n^*$$

δίνει το στάσιμο σημείο $x_1^*, ..., x_n^*$, άρα και $y^* = f(x_1^*, ..., x_n^*)$.

Σ.Δ.Τ

Υπολογίζουμε την **Εσσιανή μήτρα**

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & f_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & f_{n-1,n} \\ f_{n1} & \cdots & f_{n,n-1} & f_{nn} \end{pmatrix}$$

και τις **πρώτιστες κύριες ελάσσονες ορίζουσες** $|H_i|$ για $i = 1, 2, ..., n$ και κατόπιν αντικαθιστούμε τις τιμές των $x_1^*, x_2^*, .., x_n^*$ από το στάσιμο σημείο ώστε να βρούμε το πρόσημο των $|H_i^*|$ για $i = 1, 2, ..., n$.

Οι Σ.Δ.Τ υποδηλώνουν ότι έχουμε:

ελάχιστο στο $y^*, x_1^*, ..., x_n^*$ αν $|H_i^*| > 0$ για $i = 1, 2, ..., n$

μέγιστο στο $y^*, x_1^*, ..., x_n^*$ αν $(-1)^i |H_i^*| > 0$ για $i = 1, 2, ..., n$

δηλαδή

- όλες οι πρώτιστες κύριες ελάσσονες ορίζουσες είναι θετικές $|H_1^*| > 0, |H_2^*| > 0, |H_3^*| > 0, ...$ **για τοπικό ελάχιστο**
- ή εναλλάσονται πρόσημο αρχίζοντας με μείον (-), δηλαδή $|H_1^*| < 0, |H_2^*| > 0, |H_3^*| < 0, ...$ **για τοπικό μέγιστο**
- σε κάθε άλλη περίπτωση με $|H_n^*| \neq 0$ όπου n η **μέγιστη τάξη της Εσσιανής** ή ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών τότε έχουμε **σαγματικό σημείο**[2], **saddle point**, αλλιώς **δεν μπορούμε να αποφασίσουμε** (inconclusive).

[2] το σάγμα: (λόγιος τύπος) (Ελληνιστική σημασία:) το σαμάρι, (αρχαία σημασία:) παλτό

1.2.8 Παράδειγμα

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$$

Σ.Π.Τ

$$f_1 = 4x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$f_2 = x_1 + 8x_2 = 0$$

$$f_3 = x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_1^*, x_2^*, x_3^* = 0, y^* = 2$$

Σ.Δ.Τ

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H^* = H$$

$$|H_1^*| = 4 > 0$$

$$|H_2^*| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 31 > 0$$

$$\begin{aligned} |H_3^*| &= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -8 + 62 \\ &= 54 > 0 \end{aligned}$$

Άρα το σημείο

$$x_1^*, x_2^*, x_3^* = 0, y^* = 2$$

αποτελεί **τοπικό (και ολικό) ελάχιστο**.

1.2.9 Παράδειγμα με δύο μεταβλητές

Προβείτε σε μεγιστοποίηση

$$\max_{K,L} \Pi\,(K, L)$$

ως προς τους συντελεστές παραγωγής κεφάλαιο K και εργασία L της συνάρτησης κέρδους

$$\Pi = pAK^{\gamma}L^{\gamma} - wL - rK \quad , \quad 0 < \gamma <;$$

- **(ωραίο)** Για ποιές τιμές της παραμέτρου γ είναι το πρόβλημα καλά ορισμένο;

Σ.Π.Τ

$$\left.\begin{array}{rll} (1):\Pi_K = & \gamma pAK^{\gamma-1}L^{\gamma}-r=0 & \Rightarrow \quad \gamma pAK^{\gamma-1}L^{\gamma}=r \\ (2):\Pi_L = & \gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-1}-w=0 & \Rightarrow \quad \gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-1}=w \end{array}\right\} \Rightarrow$$

διαιρούμε τις εξισώσεις $\dfrac{(1)}{(2)}$ για να λύσουμε εύκολα!!!

$$\frac{\gamma pAK^{\gamma-1}L^{\gamma}}{\gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-1}}=\frac{r}{w}\Rightarrow$$

$$\frac{L}{K}=\frac{r}{w}\Rightarrow L=\frac{r}{w}K$$

Οπότε στο βέλτιστο ισχύει **η σχέση**

$$L=\frac{r}{w}K \quad \acute{\eta} \quad K=\frac{w}{r}L$$

Προσοχή δεν είναι το στάσιμο σημείο. Δίνει την σχέση των μεταβλητών ενδιαφέροντος στο βέλτιστο σημείο και όχι την λύση τους.

Με αντικατάσταση της $L=\frac{r}{w}K$ στην (2): $\Pi_L=0$ (ή στην σχέση (1) - δεν έχει σημασία) έχουμε

$$\gamma pAK^{\gamma}L^{\gamma-1}-w=0\Rightarrow \gamma pAK^{\gamma}\left(\frac{r}{w}K\right)^{\gamma-1}-w=0\Rightarrow$$

$$\gamma pAK^{2\gamma-1}\left(\frac{r}{w}\right)^{\gamma-1}=w\Rightarrow K^{2\gamma-1}=\frac{1}{\gamma pA}w\left(\frac{r}{w}\right)^{1-\gamma}\Rightarrow$$

$$K^{2\gamma-1}=\frac{1}{\gamma pA}w^{\gamma}r^{1-\gamma}\Rightarrow K^*=\left(\frac{1}{\gamma pA}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}}\left(w^{\gamma}r^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}}\Rightarrow$$

$$K^*=\left(\frac{1}{\gamma pA}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}}w^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}}r^{\frac{1-\gamma}{2\gamma-1}}$$

Άρα από τις Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{r}{w}K^*\Rightarrow \\ L^* &= \left(\frac{1}{\gamma pA}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}}w^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}}r^{\frac{1-\gamma}{2\gamma-1}}rw^{-1}\Rightarrow \end{aligned}$$

$$L^*=\left(\frac{1}{\gamma pA}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}}w^{\frac{1-\gamma}{2\gamma-1}}r^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}}$$

Συμμετρία !!! Στάσιμο σημείο (**ζήτηση κεφαλαίου και ζήτηση εργασίας από την επιχείρηση**)

$$\begin{aligned} K^* &= \left(\frac{1}{\gamma p A}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}} w^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}} r^{\frac{1-\gamma}{2\gamma-1}} \\ L^* &= \left(\frac{1}{\gamma p A}\right)^{\frac{1}{2\gamma-1}} w^{\frac{1-\gamma}{2\gamma-1}} r^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}} \end{aligned}$$

Σ.Δ.Τ (**Παρατηρήστε** σε λίγο ότι μέγιστο λαμβάνουμε **μόνο** όταν $\gamma < 1/2$, φθίνουσες αποδόσεις κλίμακος ...)

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι δίνονται από

$$\begin{aligned} \Pi_{KK} &= (\gamma-1)\,\gamma p A K^{\gamma-2} L^{\gamma} \\ \Pi_{LL} &= (\gamma-1)\,\gamma p A K^{\gamma} L^{\gamma-2} \\ \Pi_{KL} &= \gamma^2 p A K^{\gamma-1} L^{\gamma-1} \end{aligned}$$

και η Εσσιανή μήτρα γράφεται ως

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \Pi_{KK} & \Pi_{KL} \\ \Pi_{KL} & \Pi_{LL} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma-1)\,\gamma p A K^{\gamma-2} L^{\gamma} & \gamma^2 p A K^{\gamma-1} L^{\gamma-1} \\ \gamma^2 p A K^{\gamma-1} L^{\gamma-1} & (\gamma-1)\,\gamma p A K^{\gamma} L^{\gamma-2} \end{pmatrix} \\ &= (\gamma-1)\,\gamma p A \begin{pmatrix} K^{\gamma-2} L^{\gamma} & \frac{\gamma}{(\gamma-1)} K^{\gamma-1} L^{\gamma-1} \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)} K^{\gamma-1} L^{\gamma-1} & K^{\gamma} L^{\gamma-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Η σταθερά $(\gamma-1)\,\gamma p A$ έχει "βγει" αριστερά της Εσσιανής μήτρας H ως κοινός παράγοντας για να απλοποιήσει σημαντικά τις αλγεβρικές πράξεις.

Η πρώτη **πρώτιστη κύρια ελάσσονα ορίζουσα** (leading principal minor) είναι αρνητική (στο στάσιμο σημείο) όταν

$$|H_1^*| = (\gamma-1)\,\gamma p A K^{*\gamma-2} L^{*\gamma} < 0$$
δηλαδή όταν $\gamma < 1$

Η δεύτερη **πρώτιστη κύρια ελάσσονα ορίζουσα** δίνει[3]

$$\begin{aligned}
|H_2| &= \left|(\gamma-1)\,\gamma p A \begin{pmatrix} K^{\gamma-2}L^{\gamma} & \frac{\gamma}{(\gamma-1)}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} & K^{\gamma}L^{\gamma-2} \end{pmatrix}\right| \\
&= (\gamma-1)^2\,\gamma^2 p^2 A^2 \begin{vmatrix} K^{\gamma-2}L^{\gamma} & \frac{\gamma}{(\gamma-1)}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)}K^{\gamma-1}L^{\gamma-1} & K^{\gamma}L^{\gamma-2} \end{vmatrix} \\
&= (\gamma-1)^2\,\gamma^2 p^2 A^2 \left(K^{2\gamma-2}L^{2\gamma-2} - \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2}K^{2\gamma-2}L^{2\gamma-2}\right) \\
&= \underbrace{(\gamma-1)^2\,\gamma^2 p^2 A^2 K^{2\gamma-2}L^{2\gamma-2}}_{(+)}\left(1 - \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Άρα η $|H_2^*|$ είναι θετική (και $|H_1^*| < 0, |H_2^*| > 0$ **εναλλάσονται** πρόσημο) όταν

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\gamma^2}{(\gamma-1)^2} &> 0 \Rightarrow \\
(\gamma-1)^2 - \gamma^2 &> 0 \Rightarrow \\
\gamma^2 - 2\gamma + 1 - \gamma^2 &> 0 \Rightarrow \\
-2\gamma + 1 &> 0 \Rightarrow \\
\gamma &< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

1.3 Παράδειγμα (s.o.s*) Σ.Π.Τ και πεπλεγμένες συναρτήσεις

Υποθέστε ότι μία επιχείρηση λειτουργεί σε **καθεστώς τέλειου ανταγωνισμού** (που σημαίνει ότι η τιμή πώλησης p του προϊόντος που παράγει θεωρείται σταθερή από την επιχείρηση) και υποθέστε ότι χρησιμοποιούνται οι συντελεστές παραγωγής κεφάλαιο και εργασία σύμφωνα με τη συνάρτηση παραγωγής

$$Q = Q(K, L) : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}_{++}$$

Το **οριακό προϊόν** του κεφαλαίου και της εργασίας δίνεται από

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = Q_K > 0 \quad , \quad \forall K \in \mathbb{R}_{++}$$

και

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = Q_L > 0 \quad , \quad \forall L \in \mathbb{R}_{++}$$

[3]**Ιδιότητα ορίζουσας:** Αν λ μία σταθερά και A μία $n \times n$ μήτρα, τότε $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

αντίστοιχα και είναι θετικό ενώ οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι αρνητικές

$$Q_{KK} < 0 \ \text{ και } \ Q_{LL} < 0 \quad , \quad \forall K, L \in \mathbb{R}_{++}$$

φθίνουσα οριακή παραγωγικότητα των συντελεστών

Το **κόστος της εργασίας** συμβολίζεται με w (οι πληρωμές της εργασίας) και r συμβολίζει τις πληρωμές του κεφαλαίου (το **κόστος του κεφαλαίου**).

Ερώτηση: Πώς μεταβάλλεται η **ζήτηση εργασίας και κεφαλαίου** από μία εξωγενή μεταβολή στο κόστος εργασίας (δηλαδή στο w);

Υπόδειξη: για να ικανοποιούνται οι συνθήκες δεύτερης τάξης, Σ.Δ.Τ, για τοπικό μέγιστο, πρέπει $Q_{KK} < 0$, $Q_{LL} < 0$ και $Q_{LL}Q_{KK} - (Q_{LK})^2 > 0$ στο στάσιμο σημείο (δηλαδή $Q^*_{KK} < 0$,$Q^*_{LL} < 0$ και $Q^*_{LL}Q^*_{KK} - (Q^*_{LK})^2 > 0$). Υποθέστε ότι η ανισότητα $Q^*_{LL}Q^*_{KK} - (Q^*_{LK})^2 > 0$ ισχύει.

Απάντηση: Ζητείται ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων (**συγκριτική στατική ανάλυση**)

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} \quad \text{και} \quad \frac{\partial K^*}{\partial w}$$

Δεν έχουμε περισσότερα στοιχεία για την αναλυτική μορφή της συνάρτησης παραγωγής $Q\left(K, L\right)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τις **Σ.Π.Τ** του προβλήματος ως δύο πεπλεγμένες εξισώσεις F^1 και F^2 και να εφαρμόσουμε τον τύπο

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial F}{\partial x_j} \quad \text{ή} \quad J\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial F}{\partial x_j}$$

όπου $y = \begin{pmatrix} K & L \end{pmatrix}$ το διάνυσμα των **ενδογενών μεταβλητών** και $x = \begin{pmatrix} w & r & p \end{pmatrix}$ το διάνυσμα των **εξωγενών μεταβλητών και παραμέτρων** του προβλήματος (εδώ μόνο παραμέτρων).

Έχουμε λοιπόν την **συνάρτηση κέρδους (=έσοδα μείον κόστος)**

$$\Pi = pQ\left(K, L\right) - wL - rK$$

ενώ οι συνθήκες πρώτης τάξης για μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους δίνονται ως πεπλεγμένες συναρτήσεις

$$\mathbf{\Sigma.\Pi.T} \ : \ \Pi_L = 0 \ \text{ και } \ \Pi_K = 0$$

ή

$$F^1(K, L, w, r, p) = 0 \Rightarrow pQ_L - w = 0 \Rightarrow pQ^*_L - w = 0$$

$$F^2(K, L, w, r, p) = 0 \Rightarrow pQ_K - r = 0 \Rightarrow pQ^*_K - r = 0$$

Το ολικό διαφορικό των δύο πεπλεγμένων δίνεται από

$$dF^1 = 0 \Rightarrow F^1_K dK + F^1_L dL + F^1_w dw + F^1_r dr + F^1_p dp = 0$$

$$dF^2 = 0 \Rightarrow F^2_K dK + F^2_L dL + F^2_w dw + F^2_r dr + F^2_p dp = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$pQ_{LK}dK + pQ_{LL}dL - 1dw + 0 \cdot dr + Q_L \cdot dp = 0 \Rightarrow$$
$$pQ_{LK}dK + pQ_{LL}dL = dw - Q_L dp$$

και

$$pQ_{KK}dK + pQ_{KL}dL + 0 \cdot dw - 1dr + Q_K \cdot dp = 0 \Rightarrow$$
$$pQ_{KK}dK + pQ_{KL}dL = dr - Q_K dp$$

άρα στο στάσιμο σημείο

$$\begin{pmatrix} pQ^*_{LL} & pQ^*_{LK} \\ pQ^*_{KL} & pQ^*_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dL^*}{dw} \\ \frac{dK^*}{dw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - Q_L \frac{dp}{dw} \\ \frac{dr}{dw} - Q_K \frac{dp}{dw} \end{pmatrix}$$

Εφόσον το ζητούμενο είναι η επίδραση μιας μεταβολής στο w **ceteris paribus** (θέτουμε $dr = 0$, $dp = 0$ και μερική παραγώγιση δηλαδή αντικατάσταση του συμβόλου d με το σύμβολο της μερικής παραγώγισης ∂) έχουμε:

$$\begin{pmatrix} pQ^*_{LL} & pQ^*_{LK} \\ pQ^*_{KL} & pQ^*_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*}{\partial w} \\ \frac{\partial K^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Εναλακτικά, καταλήγουμε στο ίδιο σύστημα εξισώσεων εφαρμόζοντας τον τύπο από τα συστήματα πεπλεγμένων στο παραπάνω σύστημα πεπλεγμένων

$$F^1(K, L, w, r, p) = 0$$
$$F^2(K, L, w, r, p) = 0$$

Ειδικότερα, ο τύπος

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial F}{\partial x_j} \textbf{ υπονοεί ότι}$$

$$\begin{pmatrix} pQ^*_{LL} & pQ^*_{LK} \\ pQ^*_{KL} & pQ^*_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*}{\partial w} \\ \frac{\partial K^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε[4] η λύση Cramer για το παραπάνω σύστημα εξισώσεων και για τη διεξαγωγή **συγκριτικής στατισκής ανάλυσης** δίνει

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & pQ^*_{LK} \\ 0 & pQ^*_{KK} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pQ^*_{LL} & pQ^*_{LK} \\ pQ^*_{KL} & pQ^*_{KK} \end{vmatrix}} = \frac{\overbrace{pQ^*_{KK}}^{(-)}}{\underbrace{p^2\left(Q^*_{LL}Q^*_{KK} - (Q^*_{LK})^2\right)}_{(+)}}$$

$$= \frac{Q^*_{KK}}{p\left(Q^*_{LL}Q^*_{KK} - (Q^*_{LK})^2\right)} < 0$$

$$\frac{\partial K^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} pQ^*_{LL} & 1 \\ pQ^*_{KL} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pQ^*_{LL} & pQ^*_{LK} \\ pQ^*_{KL} & pQ^*_{KK} \end{vmatrix}} = -\frac{\overbrace{pQ^*_{KL}}^{(;)}}{\underbrace{p^2\left(Q^*_{LL}Q^*_{KK} - (Q^*_{LK})^2\right)}_{(+)}}$$

$$= -\frac{\overbrace{Q^*_{KL}}^{(;)}}{p\underbrace{\left(Q^*_{LL}Q^*_{KK} - (Q^*_{LK})^2\right)}_{(+)}} =;$$

Παρατηρούμε ότι η ζήτηση εργασίας ‘‘λογικά’’ μειώνεται όσο το κόστος εργασίας w αυξάνεται, δηλαδή έχουμε το αναμφίβολο αποτέλεσμα προσήμου $\frac{\partial L^*}{\partial w} < 0$.

Παρατηρήστε όμως ότι για το πρόσημο της μεταβολής στη ζήτηση κεφαλαίου

$$\frac{\partial K^*}{\partial w} =;$$

δεν είμαστε σίγουροι (είναι αμφίβολο).

Εξαρτάται από το πρόσημο της σταυροειδούς δεύτερης μερικής παραγώγου Q^*_{KL}. Αν έχουμε **συμπληρωματικότητα** $Q_{KL} > 0$ των συντελεστών παραγωγής (των εισροών) υπονοείται ότι περισσότερη εργασία αυξάνει την οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου.

Σημείωση: Στις συναρτήσεις τύπου Cobb-Douglas

$$Q\left(K, L\right) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

[4]Αν θέλαμε να υπολογίσουμε **ολική μεταβολή**, τότε ο αριθμητής του κλάσματος στη λύση Cramer για το $\frac{dL^*}{dw}$ θα έπαιρνε τη μορφή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} 1 - Q_L\frac{dp}{dw} & pQ^*_{LK} \\ \frac{dr}{dw} - Q_K\frac{dp}{dw} & pQ^*_{KK} \end{vmatrix}$

έχουμε

$$Q_{KL} = Q_{LK} = \alpha\beta A K^{\alpha-1} L^{\beta-1} > 0$$

Ενώ με μία γραμμική συνάρτηση παραγωγής (δηλαδή με **τέλεια υποκατάστατες εισροές** και γραμμικές καμπύλες ίσου προϊόντος)

$$Q(K,L) = \alpha K + \beta L$$

έχουμε

$$Q_{KL} = Q_{LK} = 0$$

1.4 Εναλλακτική μεθοδολογία Σ.Δ.Τ μέσω χαρακτηριστικών τιμών ή ιδιοτιμών

Πρακτικά[5], η συγκεκριμένη μεθοδολογία (μέσω ιδιοτιμών) είναι ικανοποιητική υπολογιστικά μόνο για συναρτήσεις **δύο ή το πολύ τριών μεταβλητών**. Το γιατί θα γίνει κατανοητό σε λίγο.

Ιδιοτιμές $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα A είναι τα $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ που λύνουν την χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A - \lambda \mathbf{I}_n| = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι ένα πολυώνυμο n-οστής τάξης. Ισχύει ότι

- Η τετραγωνική μορφή $q = \lambda' A \lambda > 0 (< 0)$, δηλαδή A Θ.Ο (Α.Ο), αν και μόνο αν κάθε ιδιοτιμή $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ της A είναι θετική (αρνητική)
- Η τετραγωνική μορφή $q = \lambda' A \lambda \geq 0 (\leq 0)$, δηλαδή A Θ.Η.Ο (Α.Η.Ο), αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ της A είναι μη-αρνητικές (μη-θετικές)
- Η τετραγωνική μορφή $q = \lambda' A \lambda$ είναι απροσδιόριστη (αόριστη) αν και μόνο αν κάποιες ιδιοτιμές είναι θετικές και κάποιες αρνητικές

Το πρόβλημα είναι ότι για παραπάνω από τρεις μεταβλητές έχουμε να υπολογίσουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου 4ης, 5ης κ.ο.κ. τάξης κάτι το οποίο είναι εξαιρετικά δύσκολο αλγεβρικά.

1.4.1 Παράδειγμα

Βρείτε και χαρακτηρίστε - μέσω ιδιοτιμών - το στάσιμο σημείο της συνάρτησης

$$z = f(x,y) = e^{2x} - 2x + 2y^2 + 3$$

Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} f_x &= 2e^{2x} - 2 = 0 \Rightarrow x^* = 0 \\ f_y &= 4y = 0 \Rightarrow y^* = 0 \end{aligned}$$

[5] Σημαίνει όταν λύνουμε ασκήσεις στο χαρτί...

Σ.Δ.Τ (με ελάσσονες ορίζουσες της Εσσιανής)

$$f_{xx} = 4e^{2x}, f_{yy} = 4, f_{yx} = 0$$

οπότε

$$H = \begin{pmatrix} 4e^{2x} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad H^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

και

$$|H_1^*| = 4 > 0 \quad , \quad |H_2^*| = 16 > 0$$

δηλαδή το στάσιμο σημείο $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 4)$ αντιστοιχεί σε **τοπικό ελάχιστο**.

Σ.Δ.Τ (με ιδιοτιμές της Εσσιανής)
Παρομοίως, οι Σ.Δ.Τ χρησιμοποιώντας **ιδιοτιμές** δίνουν

$$|H^* - \lambda \mathbf{I}_n| = 0 \Rightarrow$$

$$\left| \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\left| \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$(4-\lambda)^2 = 0$$

άρα οι δύο ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = 4 > 0$ της Εσσιανής στο στάσιμο σημείο H^* είναι θετικές οπότε η H^* είναι θετικά ορισμένη άρα έχουμε **τοπικό ελάχιστο**.