Περίγραμμα διάλεξης 5

1 Μερική παραγώγιση και μερική παράγωγος

Έστω η **πολυμεταβλητή** συνάρτηση

$$y = f(\mathbf{x})$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ή εναλλακτικά γράφουμε

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

με το διάνυσμα $\mathbf{x}$ να περιέχει τις n (τουλάχιστον 2) ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$.

- Για (οικονομικό) παράδειγμα, έστω η συνάρτηση χρησιμότητας $U(c, l)$ για έναν αντιπροσωπευτικό καταναλωτή (τον μέσο καταναλωτή δηλαδή)

$$u = U(c, l) = A \cdot c^a \cdot l^\beta$$

όπου $A > 0$, $0 < a < 1$, $0 < \beta < 1$ είναι θετικές **σταθερές**, ή μία **συγκεκριμένη** περίπτωση της συνάρτησης χρησιμότητας με τις βαρύτητες των προτιμήσεων να αθροίζουν στην μονάδα ($a + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - a$)

$$u = U(c, l) = A \cdot c^a \cdot l^{1-a}$$

με τις **μεταβλητές** c : η **κατανάλωση** (**consumption**) και l : η "**σχόλη**" (**leisure**) αντίστοιχα.

- **Συμβολισμός μερικής παραγώγου**

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \left.\frac{dy}{dx_i}\right|_{dx_j=0, j\neq i} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{ή} \quad f_i$$

Για παράδειγμα

$$\frac{\partial u}{\partial c} = \left.\frac{du}{dc}\right|_{dl=0} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial U(c, l)}{\partial c} \quad \text{ή} \quad U_c$$

Αντίστοιχα

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left.\frac{du}{dl}\right|_{dc=0} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial U(c, l)}{\partial l} \quad \text{ή} \quad U_l$$

- **Ερμηνεία μερικής παραγώγου**

$$\left.\frac{dy}{dx_i}\right|_{dx_j=0, j\neq i}$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, .., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, .., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

- **Παράδειγμα** μερικής παραγώγισης. Έστω η συνάρτηση 2 μεταβλητών $z(y,x)$ με $y,x \in \mathbb{R}$

$$z(y,x) = \ln\left(x^2 + 2y^2 + 15\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(y,x)}{\partial y} &= \frac{4y}{x^2+2y^2+15} \quad , \quad \text{μερική παράγωγος ως προς } y \\ \frac{\partial z(y,x)}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+2y^2+15} \quad , \quad \text{μερική παράγωγος ως προς } x \end{aligned}$$

- **Παράδειγμα** μερικής παραγώγισης

$$z(y,x) = \ln(2x+3) + 3xy^4 + e^y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(y,x)}{\partial y} &= 12xy^3 + e^y \\ \frac{\partial z(y,x)}{\partial x} &= \frac{2}{2x+3} + 3y^4 \end{aligned}$$

- **Παράδειγμα** μερικής παραγώγισης.
Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f\left(x;\mu,\sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

για μία κανονικά κατανεμόμενη τυχαία μεταβλητή

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

δηλαδή η πιθανότητα

$$P(a < X < b) = \int_a^b f\left(x;\mu,\sigma^2\right) dx$$

Μερική παράγωγος ως προς τη μέση τιμή[1]

$$f_\mu = \frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2(x-\mu)(-1)}{2\sigma^2}\right) = \frac{(x-\mu)}{2\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

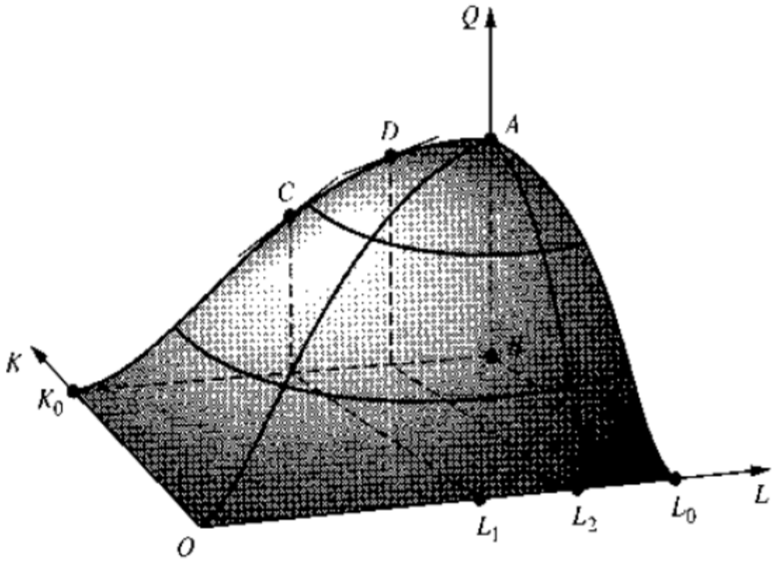
Μερική παράγωγος ως προς τη διακύμανση

$$f_{\sigma^2} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^2} = \cdots \ (\text{υπολογίστε το ...})$$

[1] Θεωρούμε ότι η $f\left(x;\mu,\sigma^2\right)$ είναι συνάρτηση των παραμέτρων $f\left(\mu,\sigma^2;x\right)$ για δεδομένες τιμές της x όπως γίνεται, π.χ., σε συγκεκριμένες μεθόδους στατιστικής εκτίμησης.

- **Γράφημα 7.4 από το βιβλίο Chiang...** . Μερική παράγωγος συνάρτησης παραγωγής $Q = F(K, L)$ ως προς την εργασία L, Π.χ. κίνηση μεταξύ των σημείων A, D, C ...)

FIGURE 7.4



1.1 Παραδείγματα

Συνάρτηση παραγωγής[2], έστω τύπου **Cobb-Douglas** $Q = f\left(K^a L^\beta\right) = AK^a L^\beta$. Οριακό φυσικό προϊόν κεφαλαίου και εργασίας[3] (οριακή παραγωγικότητα κεφαλαίου και οριακή παραγωγικότητα εργασίας) MPP_K, MPP_L ή **οριακό προϊόν** MP_K, MP_L

$$\begin{aligned} MP_K &= \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} = f_K \\ MP_L &= \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} = f_L \end{aligned}$$

Το οριακό φυσικό προϊόν ενός συντελεστή παραγωγής (εισροής) είναι το επιπλέον προϊόν που παράγεται αν απασχολήσουμε μία επιπλέον μονάδα της εισροής αυτής, ενώ όλες οι υπόλοιπες εισροές παραμένουν σταθερές.

Αντίστοιχα, υιοθετώντας τη συνάρτηση χρησιμότητας[4], ορίζουμε την **οριακή χρησιμότητα** κάθε αγαθού ως την επιπλέον χρησιμότητα που απολαμβάνει ο καταναλωτής από μία επιπλέον μονάδα του αγαθού που καταναλώνει κρατώντας την κατανάλωση του άλλου αγαθού σταθερή

$$u = U(x, y) \quad , \quad MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

[2]Production function
[3]Marginal Physical Product (of capital or of labor) ή Marginal Product (of capital or of labor)
[4]Utility function

2 Διάνυσμα κλίσης (gradient vector)

Τα διανύσματα συμβολίζονται συνήθως στη βιβλιογραφία με έντονη γραφή και μικρά γράμματα (για παράδειγμα $\mathbf{x}$ αντί του x). Τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης μίας συνάρτησης $y = f(\mathbf{x})$, τις τοποθετούμε συχνά (για αλγεβρική ευκολία) **μαζί** σε ένα διάνυσμα γραμμής ή στήλης το οποίο συμβολίζεται ως

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{ή} \quad \nabla y \quad \text{ή} \quad \nabla f$$

Αναλυτικά

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

2.1 Εφαρμογές

Απλώς υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης. Οι απαντήσεις δίνονται δεξιά...

$$\begin{aligned}
U(y,x) &= y^a x^b \quad , \quad \nabla U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a y^{a-1} x^b \\ b y^a x^{b-1} \end{pmatrix} \\
U(y,x) &= ay + b\sqrt{x} \quad , \quad \nabla U = \begin{pmatrix} a \\ \frac{b}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} \\
U(y,x) &= a\ln(y - c_1) + b(x - c_2) \quad , \quad \nabla U = \begin{pmatrix} \frac{a}{y - c_1} \\ b \end{pmatrix} \\
Q(K,L) &= AK^2 + bL \quad , \quad \nabla Q = \begin{pmatrix} 2AK \\ b \end{pmatrix} \\
y &= f(x,w,z) = xwz \quad , \quad \nabla f = \begin{pmatrix} wz \\ xz \\ xw \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.2 Γενίκευση με n συναρτήσεις

Έστω n συναρτήσεις f^i, $i = 1, ..., n$ με n ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= f^1(x_1, x_2, ..., x_n) \\
y_2 &= f^2(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\vdots \\
y_n &= f^n(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}$$

Η **Ιακωβιανή μήτρα** J του παραπάνω συστήματος καθώς και η **Ιακωβιανή ορίζουσα** $|J|$ δίνονται παρακάτω αναλυτικά

$$J = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (y_1, ..., y_n)}{\partial (x_1, ..., x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Ένας έλεγχος για τη συναρτησιακή εξάρτηση (γραμμική ή μη-γραμμική) των συναρτήσεων/εξισώσεων ενός συστήματος n εξισώσεων με n **ανεξάρτητες** (ας τις θεωρήσουμε **ενδογενείς** εδώ) μεταβλητές στηρίζεται στην Ιακωβιανή ορίζουσα $|J|$ (αν είναι μηδενική ή όχι).

- Για παράδειγμα, έστω το σύστημα (**παρατηρήστε** τη **γραμμική** σχέση των δύο εξισώσεων, η δεύτερη εξίωση είναι 6 φορές η πρώτη ή $y_2 = 6y_1$)

$$\begin{aligned} y_1 &= ax + 5z \\ y_2 &= 6ax + 30z \end{aligned}$$

με ανεξάρτητες μεταβλητές τις x, z. Η Ιακωβιανή ορίζουσα $|J|$ δίνεται από

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5 \\ 6a & 30 \end{vmatrix} = 0$$

ενώ **και για το μη-γραμμικό σύστημα** (υπάρχει **μη-γραμμική σχέση** μεταξύ των εξισώσεων τώρα, $y_2 = y_1^2$)

$$\begin{aligned} y_1 &= ax + 5z \\ y_2 &= a^2x^2 + 10axz + 25z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & 5 \\ 2a^2x + 10az & 10ax + 50z \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι για ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n μεταβλητές, η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι ίση με την ορίζουσα της μήτρας των συντελεστών των μεταβλητών, δηλαδή με την $|J| = |A|$ όταν θεωρήσουμε κάθε γραμμική εξίσωση των n μεταβλητών x_i, $i = 1, ..., n$ ως μία συνάρτηση

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + ... + a_{i,n}x_n = b_i$$

3 Ολικά διαφορικά

Έστω η συνάρτηση

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Γενικός τύπος ολικού διαφορικού

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$

ή

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n$$

- **Για παράδειγμα**, έστω η συνάρτηση **ζήτησης χρήματος**

  $$\frac{M}{P} = L\left(\underset{+}{Y}, \underset{-}{r}\right)$$

  όπου η ζήτηση χρήματος M έχει **αποπληθωριστεί** με το επίπεδο των τιμών P άρα $\frac{M}{P}$ η **πραγματική ζήτηση χρήματος**.

  – Σύμφωνα με τον παραπάνω συμβολισμό προσήμων (και σύμφωνα με την θεωρία) η πραγματική ζήτηση χρήματος $\frac{M}{P}$ εξαρτάται θετικά από το εισόδημα Y (ζήτηση για συναλλακτικούς σκοπούς) και αρνητικά από το επιτόκιο r

  – **Η συνολική μεταβολή στη ζήτηση χρήματος** αναλύεται με βάση το ολικό διαφορικό σε

  $$\begin{aligned} d\left(\frac{M}{P}\right) &= \frac{\partial L}{\partial Y}dY + \frac{\partial L}{\partial r}dr \Rightarrow \\ d\left(\frac{M}{P}\right) &= \underset{+}{L_Y}dY + \underset{-}{L_r}dr \\ &; \end{aligned}$$

  – Μερική παραγώγιση, στην περίπτωση που το εισόδημα παραμένει αμετάβλητο έχουμε

  $$\begin{aligned} d\left(\frac{M}{P}\right)\bigg|_{dY=0} &= L_r dr \Rightarrow \\ \frac{d(M/P)}{dr}\bigg|_{dY=0} &= L_r \\ &= \frac{\partial L}{\partial r} \end{aligned}$$

3.1 Παραδείγματα

1. Βρείτε το ολικό διαφορικό της **συνάρτησης χρησιμότητας** δύο αγαθών x_1, x_2 με τις παραμέτρους να ικανοποιούν τους οικονομικά απαραίτητους περιορισμούς $0 < k, a, b < 1$.

$$u = U(x_1, x_2) = k \ln x_1 + (1-k)\, x_1^a x_2^b$$

Απάντηση: Ο τύπος του ολικού διαφορικού αναλύει την du σε

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 \\ &= U_1 dx_1 + U_2 dx_2 \end{aligned}$$

με πρώτη μερική παράγωγο ως προς το x_1 (η οριακή χρησιμότητα του x_1)

$$U_1 = \frac{k}{x_1} + a(1-k) x_1^{a-1} x_2^b$$

και πρώτη μερική παράγωγο ως προς το x_2 (η οριακή χρησιμότητα του x_2)

$$U_2 = b\,(1-k)\, x_1^a x_2^{b-1}$$

άρα

$$du = \left[\frac{k}{x_1} + a(1-k) x_1^{a-1} x_2^b\right] dx_1 + \left[b\,(1-k)\, x_1^a x_2^{b-1}\right] dx_2$$

3.2 Ολική παράγωγος (σε αντιδιαστολή με τη μερική)

- **Ολικό αποτέλεσμα = άμεσο αποτέλεσμα + έμμεσο αποτέλεσμα**

$$\begin{aligned} y &= f(x,z) \quad , \quad x = g(z) \\ y &= f(g(z), z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= f_x dx + f_z dz \Rightarrow \\ \frac{dy}{dz} &= f_x \frac{dx}{dz} + f_z \end{aligned}$$

1. **Άμεσο αποτέλεσμα** $= f_z$ (ceteris paribus ή αυτόνομο αποτέλεσμα)
2. **Έμμεσο αποτέλεσμα** $= f_x \frac{dx}{dz}$ (από τον αλυσωτό κανόνα)
3. **Ολικό αποτέλεσμα** $= \frac{dy}{dz}$

3.2.1 Παραδείγματα

1. Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = f(K, L, t) \quad , \quad K = K(t) \quad , \quad L = L(t)$$

όπου t συμβολίζει χρόνο. Άρα έχουμε μία δυναμική συνάρτηση παραγωγής. Συμβολίζουμε τη μεταβολή ενός μεγέθους στο χρόνο με $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

   - Τότε η συνολική μεταβολή του προϊόντος στον χρόνο δίνεται από

   $$\dot{Q} = f_K \dot{K} + f_L \dot{L} + f_t$$

   όπου f_t συμβολίζει την αυτόνομη ή άμεση μεταβολή (θα υπήρχε μεταβολή ακόμα και αν $\dot{K} = \dot{L} = 0$)

4 Πεπλεγμένες συναρτήσεις

- Αν μία συνάρτηση δίνεται στην μορφή $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ τότε λέμε ότι βρίσκεται σε λυμένη μορφή (ανηγμένη). Δίνεται καθαρά η σχέση εξαρτημένης y και ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1, x_2, ..., x_n$
- Εάν βρίσκεται στη μορφή της εξίσωσης $F(y, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ τότε λέμε ότι βρίσκεται σε **πεπλεγμένη μορφή**

4.1 Παράδειγμα

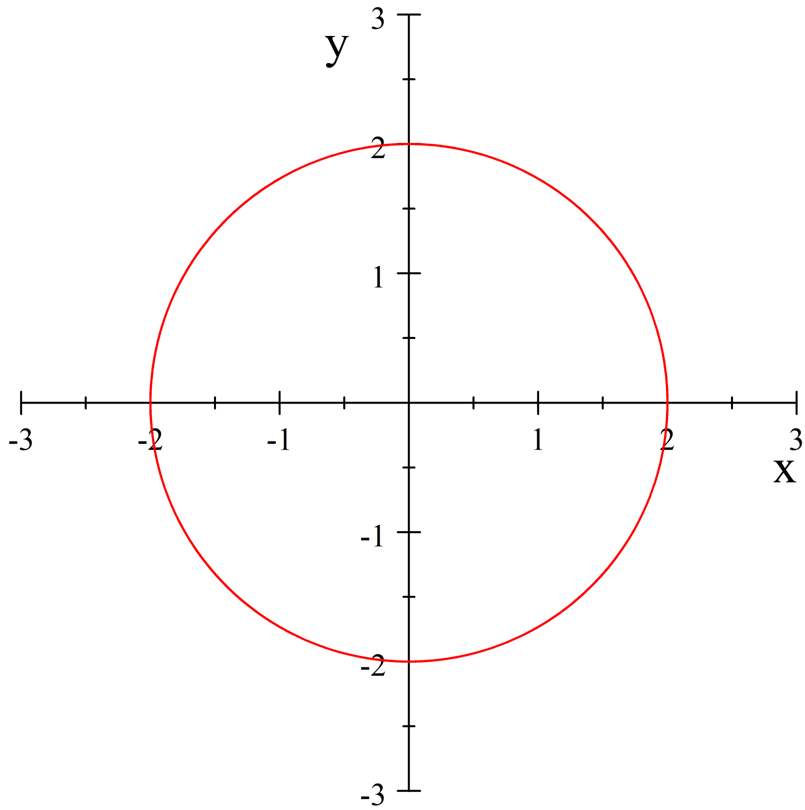
Ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση

$$y^2 = \rho^2 - x^2 \Rightarrow y = \begin{cases} \sqrt{\rho^2 - x^2} & \text{αν} \quad \rho^2 > x^2 \quad \Rightarrow \quad -\rho < x < \rho \\ -\sqrt{\rho^2 - x^2} & \text{αν} \quad \rho^2 > x^2 \quad \Rightarrow \quad -\rho < x < \rho \end{cases}$$

ή μέσω πεπλεγμένης συνάρτησης

$$F(y, x) = y^2 + x^2 - \rho^2 = 0$$

Παράδειγμα. Έστω ότι $\rho = 2$ με $y^2 + x^2 - 4 = 0$



4.2 Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Υπάρχει ένα θεώρημα που εγγυάται την επιλυσιμότητα μίας πεπλεγμένης μορφής, τουλάχιστον τοπικά στην περιοχή ενός σημείου και το οποίο μας δίνει έμμεσα και **ενδιαφέρουσες μερικές παραγώγους**.

Για παράδειγμα μπορεί να είναι δύσκολο να επιλύσουμε την

$$F(y, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

ώστε να καταλήξουμε στην

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ενώ μπορεί να είναι και τεχνικά αδύνατο αφού μπορεί **να μην έχουμε αναλυτική παρουσίαση** της συναρτησιακής μορφής της

$$F(y, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

Επιπλέον, αν μας ενδιαφέρει η παράγωγος (τιμή ή πρόσημο) $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ τι μπορούμε να κάνουμε;

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων. Έστω ότι

$$F(y, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ , \ \forall \mathbf{z} = (y, \mathbf{x}) \in A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

όπου $F(y, x_1, x_2, ..., x_n)$ μία συνεχής συνάρτηση στο A. Έστω επίσης ένα σημείο $\mathbf{z}_0 = (y_0, \mathbf{x}_0)$ τέτοιο ώστε:

1. $F(\mathbf{z}_0) = 0$
2. Οι μερικές παράγωγοι $F_y, F_1, ..., F_n$ είναι συνεχείς σε μία γειτνίαση του σημείου $\mathbf{z}_0$
3. $F_y(\mathbf{z}_0) \neq 0$

Τότε υπάρχει περιοχή $B \subseteq \mathbb{R}^n$ του $\mathbf{x}_0$ και μια συνάρτηση $y = f(\mathbf{x}) : B \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(α)

$$y_0 = f\left(\mathbf{x}_0\right)$$

(β)

$$F\left(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\right) = 0, \forall \mathbf{x} \in B$$

(γ)

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_i}{F_y}$$

Χρησιμοποιώντας το ολικό διαφορικό

$$F_y dy + F_1 dx_1 + ... + F_n dx_n = d\left(0\right) \Rightarrow$$

$$F_y dy + F_1 dx_1 + ... + F_n dx_n = 0 \Rightarrow$$

$$(\text{ όταν } \; dx_j = 0 \;\; \forall j \neq i)$$

$$F_y dy + F_i dx_i = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{dy}{dx_i}\right|_{dx_j = 0 \; \forall j \neq i} = -\frac{F_i}{F_y} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_i}{F_y}$$

4.2.1 Παράδειγμα

Ένα παράδειγμα όπου είναι δύσκολο να βρεθεί η λυμένη μορφή $y = f(x, w)$ η οποία, επιπλέον, δεν μας ενδιαφέρει. Θέλουμε να υπολογίσουμε την μερική παράγωγο $\frac{\partial y}{\partial x}$ και $\frac{\partial y}{\partial w}$. Έστω λοιπόν ότι η πεπλεγμένη μορφή δίνεται από

$$F(y, x, w) = y^3 x^2 + w^3 + yxw - 3 = 0$$

Οι μερικές παράγωγοι δίνονται από

$$\begin{aligned} F_y &= 3y^2x^2 + xw \\ F_x &= 2y^3x + yw \\ F_w &= 3w^2 + yx \end{aligned}$$

Τότε η $y = f(x, w)$ υπάρχει $\forall x, y, w \neq 0$ και

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2y^3x + yw}{3y^2x^2 + xw} \\ \frac{\partial y}{\partial w} &= -\frac{F_w}{F_y} = -\frac{3w^2 + yx}{3y^2x^2 + xw} \end{aligned}$$

4.2.2 Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση παραγωγής σε πεπλεγμένη μορφή

$$F(Q, K, L) = 0$$

Αν ισχύει το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων τότε ορίζεται η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = f(K, L)$$

Πώς μπορώ να βρω το **οριακό φυσικό προϊόν** εργασίας MP_L και κεφαλαίου MP_K;

$$MP_L \left(= \frac{\partial Q}{\partial L} = f_L \right) = -\frac{F_L}{F_Q}$$

$$MP_K \left(= \frac{\partial Q}{\partial K} = f_K \right) = -\frac{F_K}{F_Q}$$

Επίσης πως μπορώ να βρω τον, **οικονομικά σημαντικό**, **οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης**;[5]

$$MRTS_{K,L} = \frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{F_L}{F_K} = -\frac{MP_L}{MP_K}$$

Υποκαταστασιμότητα/Συμπληρωματικότητα εισροών. Πόσο πρέπει να μειωθεί το κεφάλαιο όταν αυξηθεί η εργασία ώστε το προϊόν να παραμείνει σταθερό;

Κίνηση πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος

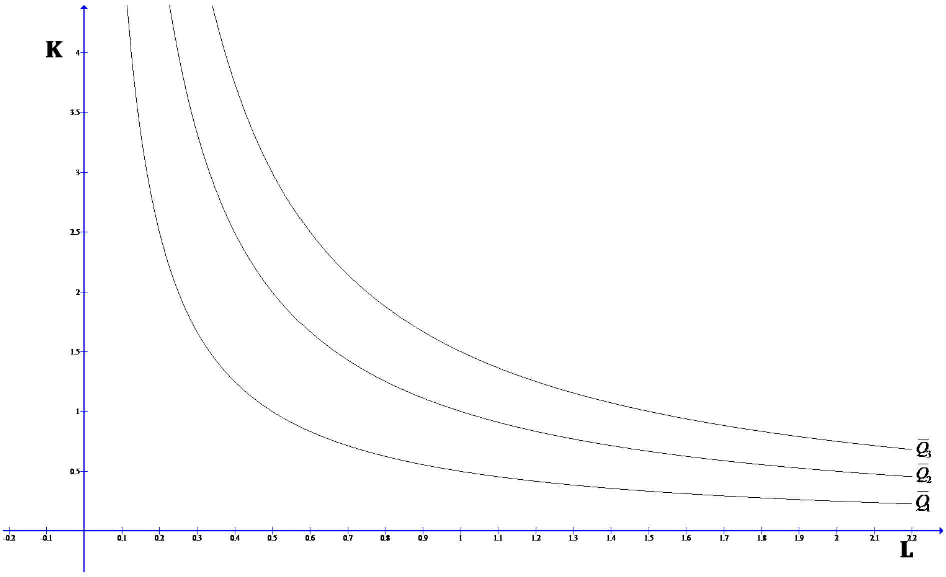
$$\begin{aligned} F_Q dQ + F_L dL + F_K dK &= 0 \Rightarrow \\ \left. \frac{dK}{dL} \right|_{dQ=0} &= -\frac{F_L}{F_K} \Rightarrow \\ \frac{\partial K}{\partial L} &= -\frac{F_L}{F_K} \end{aligned}$$

[5] Marginal rate of technical substitution;

Σημείωση 1: *Καμπύλη ίσου προϊόντος (isoquant).* Η συγκεκριμένη καμπύλη ίσου προϊόντος απεικονίζει τους συνδυασμούς των συντελεστών παραγωγής (εισροών) K, L που μπορούν να παράγουν μία δεδομένη ποσότητα προϊόντος. Διαγραμματικά, αν για δεδομένο $Q = \bar{Q}$, σχεδιάσουμε την καμπύλη

$$K = g\left(L; \bar{Q}\right)$$

τότε σχεδιάζουμε μία καμπύλη ίσου προϊόντος[6]. Αν μεταβάλλουμε (για παράδειγμα αυξάνοντας $\bar{Q}_3 > \bar{Q}_2 > \bar{Q}_1$) το προϊόν Q τότε μετακινούμαστε σε υψηλότερη καμπύλη ίσου προϊόντος[7]. Βλ. το παρακάτω γράφημα για καμπύλες ίσου προϊόντος τύπου **Cobb-Douglas**



Σημείωση 2 : η αντίστοιχη έννοια για τη συνάρτηση χρησιμότητας $u = U(x, y)$ είναι οι *καμπύλες αδιαφορίας (indifference curves)* $y = g(x; \bar{u})$ όπου συνδυασμοί των αγαθών x, y αποδίδουν το ίδιο επίπεδο χρησιμότητας $\bar{u}$, άρα ο καταναλωτής είναι αδιάφορος ως προς το ποιόν συνδυασμό θα καταναλώσει αν ο συνδυασμός βρίσκεται στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας. Αντίστοιχα, ο **οριακός λόγος υποκατάστασης**

$$MRS_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{U_x}{U_y} = -\frac{MU_x}{MU_y}$$

(marginal rate of substitution) του αγαθού x με το αγαθό y είναι η ποσότητα του x την οποία ο καταναλωτής είναι διαθέσιμος να υποκαταστήσει (ανταλλάξει) με ποσότητα του y παραμένοντας στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας (χωρίς να μεταβάλλει το επίπεδο χρησιμότητάς του).

Ερώτηση/Άσκηση: Βρείτε τον οριακό λόγο υποκατάστασης $MRS_{x,y}$ για μία συνάρτηση χρησιμότητας τύπου **Cobb-Douglas**

$$u = U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

[6] Αντίστοιχα μπορούμε να αντιστρέψουμε τους άξονες και να σχεδιάσουμε την $L = g^{-1}\left(K; \bar{Q}\right)$.

[7] Περισσότερα στα μαθήματα της μικροοικονομικής.

μέσω πεπλεγμένων συναρτήσεων (**εύκολο**) ή έμμεσης παραγώγισης και μέσω απευθείας παραγώγισης (**δύσκολο**). **Απάντηση:**

$$MRS_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{MU_x}{MU_y} = -\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$$

ή

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= x^{\alpha} y^{\beta} \Rightarrow (\bar{u})^{\frac{1}{\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\beta}} = y \Rightarrow \\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u=\bar{u}} &= (\bar{u})^{\frac{1}{\beta}} \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) x^{-\frac{(\alpha+\beta)}{\beta}} = \left(x^{\alpha} y^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) x^{-\frac{(\alpha+\beta)}{\beta}} \Rightarrow \\
\frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

Σημείωση: Μέτρηση δυνατότητας υποκατάστασης (substitutability). Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε την δυνατότητα υποκατάστασης (ή συμπληρωματικότητας) δύο συντελεστών παραγωγής ή δύο αγαθών στη συνάρτηση χρησιμότητας. Το συχνότερα υιοθετούμενο μέτρο είναι αυτό της **ελαστικότητας υποκατάστασης (elasticity of substitution)** σ των John Hicks (1932) και Joan Robinson (1933)

$$\frac{d\ln\left(|MRTS_{K,L}|\right)}{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)} = \frac{1}{\sigma} \text{ ή } \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(MRTS_{K,L}\right)} = \sigma$$

- **μετρά** την ποσοστιαία μεταβολή (αντίδραση) στον οριακό λόγο (τεχνικής) υποκατάστασης (που μετρά υποκαταστασιμότητα ή την κλίση των καμπυλών ίσου προϊόντος ή αδιαφορίας) εξαιτίας μίας ποσοστιαίας μεταβολής στην αναλογία των συντελεστών

ή

- **μετρά** την ποσοστιαία μεταβολή στην αναλογία των συντελεστών εξαιτίας μίας ποσοστιαίας μεταβολής στην κλίση της καμπύλης (δηλαδή στον οριακό λόγο (τεχνικής) υποκατάστασης ή στον οριακό λόγο υποκατάστασης)

Είναι ένα μέτρο "ευκολίας" με την οποία ο μεταβαλλόμενος συντελεστής παραγωγής (ή αγαθό) υποκαθίσταται από έναν άλλο. Επίσης μετρά την **καμπύλωση** (curvature) της καμπύλης ίσου προϊόντος ή αδιαφορίας (Lerner, 1933). Περισσότερα στις ασκήσεις της διάλεξης

- **Ερώτηση/άσκηση:** Για μία συνάρτηση χρησιμότητας τύπου **Cobb-Douglas** $u = U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ υπολογίστε την **ελαστικότητα υποκατάστασης** (elasticity of substitution) σ;

- **Απάντηση:** Αφού
$$MRS_{y,x} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$$
με απόλυτο (για να έχει νόημα η λογαρίθμιση) έχουμε
$$|MRS_{y,x}| = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$$
και
$$\frac{d\ln\left(|MRS_{x,y}|\right)}{d\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{1}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 1$$

4.2.3 Παράδειγμα (s.o.s). Συγκριτική στατική ανάλυση σε πρόβλημα βελτιστοποίησης

- Έστω η συνάρτηση παραγωγής : $Q(L) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ με οριακό προϊόν της εργασίας θετικό (οριακή αύξηση της εισροής οδηγεί σε αύξηση του προϊόντος) $MP_L = Q_L > 0$ και δεύτερη παράγωγο αρνητική $Q_{LL} < 0$ (**φθίνουσες αποδόσεις**, η οριακή συνεισφορά της επιπλεόν εισροής βαίνει μειούμενη).

- Υποθέστε ότι $p > 0$ συμβολίζει την **τιμή** του προϊόντος. Θέλουμε να **μεγιστοποιήσουμε** τη συνάρτηση κέρδους (**έσοδα μείον κόστος**)
$$\Pi = pQ(L) - wL$$
και να προβούμε σε συγκριτική στατική ανάλυση της ζήτησης εργασίας ως προς το μισθό w (το κόστος εργασίας γενικότερα)

- Δηλαδή μας ενδιαφέρει το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\frac{\partial L^*}{\partial w}$. Η ζήτηση εργασίας L^* δίνεται από την μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους
$$L^* = \arg\max_L \Pi$$

- Πώς μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα
$$\frac{\partial L^*}{\partial w} =;$$

Από την συνθήκη πρώτης τάξης **Σ.Π.Τ**
$$\frac{d\Pi}{dL} = 0 \Rightarrow pQ_L - w = 0$$
λαμβάνουμε μία πεπλεγμένη συνάρτηση
$$F\left(L, w, p\right) = pQ_L - w = 0$$
που ικανοποιείται σίγουρα για $L = L^*$, δηλαδή $F\left(L^*, w, p\right) = 0$.

Η μερική παράγωγος της πεπλεγμένης $F(L, w, p)$ ως προς L είναι

$$F_L = \frac{\partial F}{\partial L} = pQ_{LL} < 0$$

ενώ ως προς το κόστος εργασίας w είναι

$$F_w = \frac{\partial F}{\partial w} = -1$$

Άρα

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = -\frac{F_w}{F_L^*} = -\left(\frac{-1}{pQ_{LL}^*}\right) = \frac{1}{pQ_{LL}^*} < 0$$

Δηλαδή μία αύξηση του κόστους εργασίας οδηγεί σε μείωση της ζήτησης εργασίας από την επιχείρηση (ή τις επιχειρήσεις αν είναι κλάδος).

5 Πεπλεγμένες εξισώσεις και συστήματα

Έστω το σύστημα n πεπλεγμένων εξισώσεων ως προς n **ενδογενείς** μεταβλητές $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} F^1(y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_m) &= 0 \\ F^2(y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F^n(y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_m) &= 0 \end{aligned}$$

όπου $y_1, ..., y_n$ είναι n **ενδογενείς** μεταβλητές και $x_1, ..., x_m$ είναι m **εξωγενείς** μεταβλητές. Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης γενικεύεται σε συγκεκριμένα συστήματα εξισώσεων όπως το παραπάνω.

Επιπλέον, των προϋποθέσεων για κάθε μία των εξισώσεων, δηλαδή

(α) το σημείο $\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0$ ικανοποιεί τις εξισώσεις $F^1, ..., F^n$ (μελλοντικά το συγκεκριμένο σημείο θα είναι συχνά το **στάσιμο σημείο** άρα θα ικανοποιεί εξισώσεις οι οποίες θα **αντιπροσωπεύουν συνθήκες πρώτης τάξης**)

(β) οι εξισώσεις έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, τουλάχιστον πρώτης τάξης, σε κάποιο ανοιχτό σύνολο σημείων γύρω από το $\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0$

πρέπει να ισχύει και

μη-μηδενικότητα της Ιακωβιανής ορίζουσας (η Ιακωβιανή μήτρα είναι τετραγωνική $n \times n$)

$$|J| = \left|\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Τότε ορίζονται οι συναρτήσεις (ανηγμένες μορφές) $f^1, ..., f^n$ στο σημείο $\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0$ - και στην περιοχή γύρω από αυτό - δηλαδή ορίζονται συναρτήσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} y_1 &= f^1(x_1, ..., x_m) \\ y_2 &= f^2(x_1, ..., x_m) \\ &\vdots \\ y_n &= f^n(x_1, ..., x_m) \end{aligned}$$

ενώ ισχύει ότι (**συγκριτική στατική ανάλυση**)

$$J \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}$$

δηλαδή

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{pmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \end{pmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial x_i} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ -\frac{\partial F^n}{\partial x_i} \end{pmatrix}}_{-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}}$$

Οπότε αν θέλουμε να προβούμε σε συγκριτική στατική ανάλυση και να μελετήσουμε την ποσότητα $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ τότε **μέσω της λύσης Cramer** (ούτως ή άλλως θυμηθείτε ότι για να έχει νόημα η ανάλυση πρέπει $|J| \neq 0$) έχουμε ότι

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{|J_j|}{|J|}$$

6 (Παράδειγμα) Μακροοικονομικό σύστημα εξισώσεων

Δίνονται τρεις μακροοικονομικές εξισώσεις (συνθήκη ισορροπίας εισοδήματος, συνάρτηση κατανάλωσης και φορολογίας) οι οποίες μπορούν να γραφούν ως πεπλεγμένες συναρτήσεις (για παράδειγμα και μόνο, αφού είναι ήδη δοσμένες αναλυτικά οι εξισώσεις)

$$\begin{aligned} Y = C + I_0 + G_0 \Rightarrow Y - C - I_0 - G_0 = 0 &\qquad F^1(Y, C, T, ...) = 0 \\ C = a + b(Y - T) \Rightarrow C - a - b(Y - T) = 0 &\qquad F^2(Y, C, T, ...) = 0 \\ T = \gamma + tY \Rightarrow T - \gamma - tY = 0 &\qquad F^3(Y, C, T, ...) = 0 \end{aligned}$$

Η **Ιακωβιανή** μήτρα του παραπάνω **συστήματος πεπλεγμένων**

$$\begin{aligned} F^1(Y, C, T, ...) &= 0 \\ F^2(Y, C, T, ...) &= 0 \\ F^3(Y, C, T, ...) &= 0 \end{aligned}$$

δίνεται από την

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial T} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial T} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ενώ η **Ιακωβιανή ορίζουσα** είναι ίση με (το ποσοστό διαθέσιμου εισοδήματος που δεν καταναλώνεται)

$$|J| = 1 - b(1-t)$$

Ερώτημα 1 (Συγκριτική στατική ανάλυση όπως σε προηγούμενη διάλεξη). Υπολογίστε τη μεταβολή στο εισόδημα αλλά και στα φορολογικά έσοδα όταν μεταβληθούν (εξωγενώς) οι δημόσιες δαπάνες G_0,

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} =; \qquad \frac{\partial T}{\partial G_0} =;$$

Απάντηση 1 Θυμηθείτε από τα συστήματα πεπλεγμένων και τη συγκριτική στατική τους ανάλυση ότι ισχύει

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial T} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial T} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial C}{\partial G_0} \\ \frac{\partial T}{\partial G_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial G_0} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial G_0} \\ -\frac{\partial F^3}{\partial G_0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial C}{\partial G_0} \\ \frac{\partial T}{\partial G_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε η **λύση Cramer** δίνει

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - b(1-t)} = \frac{1}{1 - b(1-t)} > 1$$

$$\frac{\partial T}{\partial G_0} = \frac{|J_3|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1 - b(1-t)} = \frac{t}{1 - b(1-t)} < 1$$

Ερώτημα 2 Υπολογίστε τη μεταβολή στη φορολογία αλλά και στην κατανάλωση από μία αλλαγή στο ύψος της φορολόγησης από πηγές εκτός εισοδήματος (π.χ. πλούτος), δηλαδή από μεταβολές στην αυτόνομη φορολόγηση γ,

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} =; \qquad \frac{\partial C}{\partial \gamma} =;$$

Απάντηση 2

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial T} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial T} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial C}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial T}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial \gamma} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial \gamma} \\ -\frac{\partial F^3}{\partial \gamma} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial C}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial T}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = \frac{|J_3|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \color{red}{0} \\ -b & 1 & \color{red}{0} \\ -t & 0 & \color{red}{1} \end{vmatrix}}{1-b(1-t)} = \frac{1-b}{1-b(1-t)} < 1 \quad \text{Σχολιάστε...}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \gamma} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \color{red}{0} & 0 \\ -b & \color{red}{0} & b \\ -t & \color{red}{1} & 1 \end{vmatrix}}{1-b(1-t)} = -\frac{b}{1-b(1-t)} = \begin{cases} \in (0,-1) & \text{αν} \quad b < t \\ \in \left(-1, -\frac{1}{t}\right) & \text{αν} \quad b > t \end{cases}$$

Επίσης, σχολιάστε το **πρόσημο** και **μέγεθος** του αποτελέσματος...