Σύνολο ασκήσεων 4

Άσκηση 1

Γράψτε τα παρακάτω συστήματα υπο μορφή μητρών $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - 5 \\ x_2 + x_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 &= 2x_2 + 5 \\ x_1 + x_2 &= -x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= \frac{x_4}{2} - 5 \\ 2x_1 + x_4 &= 8 \\ -9x_3 + x_2 &= 1 - 3x_1 \\ x_1 - x_2 &= \frac{2}{3}x_3 - 4\frac{x_4}{9} \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Βρείτε[1] την κλιμακωτή RE_A (υπάρχουν πολλές) και ανηγμένη κλιμακωτή REE_A (είναι μοναδική) όταν η μήτρα A είναι:

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dots$$

$$RE_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{-1}{4} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} \end{bmatrix}$$

$$REE_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

$$\dots$$

$$RE_A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$REE_A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[1] Δείτε εδώ για online υπολογισμούς
https://matrix.reshish.com/gauss-jordanElimination.php

3.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \\
&\ldots \\
RE_A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
REE_A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\ldots \\
RE_A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
REE_A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

5.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\dots$$

$$RE_A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{45}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$REE_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

- Γράψτε τα παρακάτω συστήματα εξισώσεων στη μορφή $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

1.

$$\begin{aligned} Q &= \alpha - \beta P + k\bar{A} \\ P &= \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{\delta} Q \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 \\ C &= 0.8\,(Y - T) \\ T &= 0.35Y \end{aligned}$$

- Λύστε τα παραπάνω συστήματα ως προς $x = \begin{pmatrix} Q & P \end{pmatrix}'$ και $x = \begin{pmatrix} Y & C & T \end{pmatrix}'$ χρησιμοποιώντας απλή αντικατάσταση
- Λύστε τα παραπάνω συστήματα ως προς $x = \begin{pmatrix} Q & P \end{pmatrix}'$ και $x = \begin{pmatrix} Y & C & T \end{pmatrix}'$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Cramer
- Προβείτε στην παρακάτω **συγκριτική στατική ανάλυση**.
  - Στην περίπτωση που αυξηθούν οι διαφημιστικές δαπάνες, υπολογίστε τις μεταβολές (επίδραση στην ποσότητα και τιμή **ισορροπίας**)

$$\frac{dQ^*}{d\bar{A}} =; \text{ και } \frac{dP^*}{d\bar{A}} =;$$

  - Στην περίπτωση που αυξηθεί η επένδυση, υπολογίστε τις μεταβολές (επίδραση στο **εισόδημα ισορροπίας** καθώς και στην **κατανάλωση** και **φορολογία** ισορροπίας μίας **εξωγενούς μεταβολής στην επένδυση**.

$$\frac{dY^*}{dI_0} =; \quad , \quad \frac{dC^*}{dI_0} =; \quad \text{και} \quad \frac{dT^*}{dI_0} =;$$

  - **Ποιό** το **πρόσημο** των παραπάνω μεταβολών;
  - Επίσης, **λειτουργεί πολλαπλασιαστικά** η μεταβολή; (δηλαδή έχουμε αποτελέσματα > 1;)

Άσκηση 4

- Θυμηθείτε ότι ο **βαθμός** $r(A)$ της A στο σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ δίνεται από τον **αριθμό των μη-μηδενικών γραμμών** της κλιμακωτής μήτρας (row Echelon form), έστω RE_A.
- Θυμηθείτε ότι ο βαθμός $r(A|b)$ του επαυξημένου πίνακα $A|b$ στο σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ δίνεται από τον αριθμό των μη-μηδενικών γραμμών της κλιμακωτής μήτρας (row Echelon form), έστω $RE_{A|b}$.

Αν θέλετε να απαντήσετε σε ερώτημα κατά πόσο το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ έχει μία λύση, άπειρες ή δεν είναι συμβιβαστό:
Χαρακτηρισμός λύσεων. Έστω ότι A είναι μία $m \times n$ μήτρα. Τότε

- $r(A|b) = r(A) = n \Rightarrow$ **συμβιβαστό, μία μοναδική λύση**
- $r(A|b) = r(A) < n \Rightarrow$ **συμβιβαστό, άπειρες (πολλαπλές) λύσεις**
- $r(A|b) = r(A) + 1 \Rightarrow$ **μη-συμβιβαστό, δεν υπάρχουν λύσεις**

Αν θέλετε να βρείτε τη λύση (τις λύσεις) ή και να δείτε την έννοια του αδύνατου, τότε προχωράτε ένα βήμα παραπέρα και δημιουργείτε μέσω απαλοιφής Gauss-Jordan τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα του επαυξημένου, δηλαδή βρίσκετε τον πίνακα $RRE_{A|b}$. Ακολουθούν παραδείγματα:

Άσκηση 4α

Πρώτον, χαρακτηρίστε τη λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Δεύτερον, προβείτε σε επίλυση (με όλους τους δυνατούς τρόπους)

- μέσω αντικατάστασης
- μέσω απαλοιφής Gauss-Jordan
- μέσω μεθόδου Cramer (γίνεται αν $r(A) = 3$ διότι $m = 3 = n$)
- μέσω $x^* = A^{-1}b$ (γίνεται αν $r(A) = 3$ και $m = 3 = n$ διότι τότε υπάρχει η A^{-1})
- (**υπόδειξη:**) αν $m > n$ και $r(A) = n$ τότε $x^* = (A'A)^{-1} \cdot A' \cdot b$

Άσκηση 4β

Χαρακτηρίστε τη λύση των παρακάτω συστημάτων και προβείτε σε **επίλυση** μέσω απαλοιφής Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 9x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 5x_1 + 9x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Άσκηση[2] 5

Ένας καταναλωτής αγοράζει τρία αγαθά: εμφιαλωμένο νερό (μικρό μπουκάλι), αναψυκτικά (κουτάκια) και σοκολάτες σε σύνολο 100 **τεμάχια**. Το **συνολικό κόστος** είναι 100 **ευρώ**. Το νερό κοστίζει 0.5 ευρώ/μπουκάλι, τα αναψυκτικά 1.3€ και οι σοκολάτες 3.5 ευρώ ανά σοκολάτα. Πόσα τεμάχια αγόρασε από κάθε αγαθό;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.3 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{τεμάχια} \\ € \end{matrix}$$

Απάντηση

Έχουμε 2 εξισώσεις με 3 αγνώστους. Έχουμε ήδη γράψει το σύστημα στη μορφή

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο της A (της μήτρας συντελεστών του συτήματος)

$$(A|b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.5 & 1.3 & 3.5 & 100 \end{pmatrix}$$

και βρίσκουμε την μορφή echelon της A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.5 & 1.3 & 3.5 & 100 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0.8 & 3 & 50 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3.75 & 62.5 \end{pmatrix}$$

Δεν μπορούμε να βρούμε τα x_1, x_2, x_3 όμως μπορούμε να θεωρήσουμε το τρίτο αγαθό x_3 ως ελεύθερη παράμετρο (έστω $x_3 = \lambda$)) και

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 62.5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - \lambda \\ 62.5 - 3.75\lambda \end{pmatrix}$$

Άρα $x_2 = 62.5 - 3.75\lambda$ και $x_1 + x_2 = 100 - \lambda \Rightarrow x_1 = 37.5 + 2.75\lambda$. Για παράδειγμα, αν αγοράστηκε μία μονάδα από το x_3 τότε $x_3 = 1$ και $x_2 = 58.75$, $x_1 = 40.25$.

Επειδή τα αγαθά x_1, x_2, x_3 πρέπει να ικανοποιούν την ανισότητα (θετικότητας) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ έχουμε ότι $\lambda \geq 0$ και $\lambda \leq 16.67$. Αν θεωρήσουμε ότι όλα τα αγαθά αγοράζονται σε ακέραιες ποσότητες τότε το x_3 είναι αναγκαστικά ίσο με έναν από τους ακέραιους $1, 2, 3, 4, 5, ..., 16$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα με τον περιορισμό της ακέραιας και θετικής λύσης έχει 4 δυνατές λύσεις

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 43 & 55 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 54 & 40 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 65 & 25 & 10 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 76 & 10 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[2] 1Το πρόβλημα πάρθηκε από το βιβλίο (σελ. 143): Adabir , K.M., Magnus, J.R., (2005). Matrix Algebra, Econometric Exercises, Volume 1. Cambridge University Press.

Επιπλέον πληροφόρηση μειώνει ακόμα περισσότερο την αβεβαιότητα ως προς το τελικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τον περιορισμό ότι ο συγκεκριμένος καταναλωτής αγοράζει - πάντοτε -περισσότερα x_2 από x_1 αγαθά τότε το σύστημα έχει **μία και μοναδική λύση** $\begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 55 & 2 \end{pmatrix}$.

Σημείωση: Για τον περιορισμό σε ακέραιες και θετικές λύσεις χρησιμοποιήστε το `Excel` ή το `gretl`.

Άσκηση 6

- Για ποιές τιμές της σταθεράς λ (η οποία δεν είναι προσδιορισμένη), το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων ως προς τις x, y

$$\begin{aligned} 2y - x &= 10 \\ -\lambda y + 2x &= 5 \end{aligned}$$

  (i) δεν έχει λύση ή **(ii) έχει μία μοναδική λύση** x^*, y^*

- Έστω τώρα ότι

$$\begin{aligned} 2y - x &= 10 \\ -\lambda y + 2x &= a \end{aligned}$$

  όπου α μία άλλη μη-προσδιορισμένη σταθερά. Πώς μεταβάλλεται η απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα;