A1

Άσκηση 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 & 8 \\ 0 & 1 & \beta & 18 \end{pmatrix}$$

Απάντηση 1

$$|A| = -\alpha\beta - 2$$

Άσκηση 2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Απάντηση 2

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Απάντηση 3

$$RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4

$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} Y & -C & & -I_0 & -G_0 & & & = & 0 \\ -0.7Y & +C & +0.7T & & & -\alpha & & = & 0 \\ -0.3Y & & +T & & & & -\beta & = & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}$$

Απάντηση 4

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} Y \\ C \\ T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.7 & 1 & 0.7 \\ -0.3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ |\mathbf{J}| = 0.51$$

$$-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \beta} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0 & 0.7 \\ -0.3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ |\mathbf{J}_2| = -0.7$$

$$\frac{\partial C}{\partial \beta} = \frac{|\mathbf{J}_2|}{|\mathbf{J}|} = -\frac{0.7}{0.51} = 1.372$$

Άσκηση 5

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_2 + x_3^6 - 6x_3 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

Απάντηση 5

$$\left.\begin{aligned} f_1 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 1 - x_2 = 0 \\ f_2 = 0 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \\ f_3 = 0 \Rightarrow 6x_3^5 - 6 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 1 \\ \Rightarrow -x_1 + 2(2x_1 - 1) - 1 = 0 \Rightarrow x_1^* = 1 \\ \Rightarrow 6x_3^5 - 6 = 0 \Rightarrow x_3^* = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 1 \Rightarrow x_2^* = 1 \\ \Rightarrow x_1^* = 1 \\ \Rightarrow x_3^* = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Άρα έχουμε ένα μόνο στάσιμο σημείο: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$

Εσσιανή μήτρα

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ \cdot & f_{22} & f_{23} \\ \cdot & \cdot & f_{33} \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους:
$f_{11} = 2$, $f_{12} = -1$, $f_{13} = 0$, $f_{22} = 2$, $f_{23} = 0$, $f_{33} = 30x_3^4$

Εσσιανή υπολογισμένη στο στάσιμο σημείο

$$H^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$|H_1^*| = 2 > 0$$

$$|H_2^*| = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 3 > 0$$

$$|H_3^*| = 0\,|\cdot| - 0\,|\cdot| + 30 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 30(4-1) = 90 > 0$$

Οπότε η συνάρτηση $f\,(x_1, x_2, x_3)$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο

$$f\,(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = -6, \quad x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 1$$

A2

Άσκηση 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 & 8 \\ 0 & 1 & \beta & 18 \end{pmatrix}$$

Απάντηση 1

$$|A| = \alpha\beta + 2$$

Άσκηση 2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Απάντηση 2

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Απάντηση 3

$$RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα (αναλυτικά)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \ , \ \frac{1}{2}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -\frac{5}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1 \ , \ R_4-R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2 \ , \ \frac{1}{2}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_2 \ , \ R_3-R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4

$\mathbf{F}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} Y & -C & & -I_0 & -G_0 & & & = & 0 \\ -0.8Y & +C & +0.8T & & & -\alpha & & = & 0 \\ -0.35Y & & +T & & & & -\beta & = & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}$$

Απάντηση 4

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} Y \\ C \\ T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.8 & 1 & 0.8 \\ -0.35 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ |\mathbf{J}| = 0.48$$

$$-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \beta} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0.8 \\ -0.35 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ |\mathbf{J}_2| = -0.8$$

$$\frac{\partial C}{\partial \beta} = \frac{|\mathbf{J}_2|}{|\mathbf{J}|} = -\frac{0.8}{0.48} = 1.666$$

Άσκηση 5

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2 + x_3^4 - 4x_3 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

Απάντηση 5

$$\left.\begin{array}{r} f_1 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 1 - x_2 = 0 \\ f_2 = 0 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \\ f_3 = 0 \Rightarrow 4x_3^3 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 1 \\ \Rightarrow -x_1 + 2(2x_1 - 1) - 1 = 0 \Rightarrow x_1^* = 1 \\ \Rightarrow 4x_3^3 - 4 = 0 \Rightarrow x_3^* = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 1 \Rightarrow x_2^* = 1 \\ \Rightarrow x_1^* = 1 \\ \Rightarrow x_3^* = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Άρα έχουμε ένα μόνο στάσιμο σημείο: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$

Εσσιανή μήτρα

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ \cdot & f_{22} & f_{23} \\ \cdot & \cdot & f_{33} \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους:
$f_{11} = 2$, $f_{12} = -1$, $f_{13} = 0$, $f_{22} = 2$, $f_{23} = 0$, $f_{33} = 12x_3^2$

Εσσιανή υπολογισμένη στο στάσιμο σημείο

$$H^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$|H_1^*| = 2 > 0$$

$$|H_2^*| = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 3 > 0$$

$$|H_3^*| = 0\,|\cdot| - 0\,|\cdot| + 12 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 12(4-1) = 36 > 0$$

Οπότε η συνάρτηση $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο

$$f\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = -4, \quad x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 1$$