Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ. Διδάσκων: Ι. Βενέτης
Ομάδα Α2. Πρόοδος. 24 Απριλίου 2017. 12:00-13:00

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΑΜ:.....

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

1. (25 μονάδες) Υπολογίστε την ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 & 8 \\ 0 & 1 & \beta & 18 \end{pmatrix}$

i. β ii. $-\beta$ iii. 0 iv. $a\beta - 2$ v. 18 vi. $-a\beta - 2$ **vii.** $a\beta + 2$ viii. -18 ix. 5 x. 10

xi. a xii. $-a$ xiii. -5 xiv. $2a$ xv. $-2a$

2. (20 μονάδες) Υπολογίστε την $(X'X)^{-1}$ όταν $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & \frac{24}{5} \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{24} \end{pmatrix}$ **iv.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$ v. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

vi. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ viii. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ix. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ x. $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

xi. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$ xii. $\begin{pmatrix} -1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

3. (20 μονάδες) Υπολογίστε την ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα $RRE_{A|b}$ του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= 4 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 &= 4 \end{aligned}$$

i. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ii. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **iii.** $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iv. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vi. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

vii. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ viii. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ix. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. (15 μονάδες) Σας δίνεται το παρακάτω σύστημα μακροοικονομικών εξισώσεων στη μορφή πεπλεγμένων εξισώσεων $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{y}$ ένα διάνυσμα 3×1 με τις ενδογενείς μεταβλητές και x ένα διάνυσμα που περιλαμβάνει εξωγενείς μεταβλητές και όλες τις παραμέτρους του προβλήματος.

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} Y & -C & & -I_0 & -G_0 & & & = & 0 \\ -0.8Y & +C & +0.8T & & & -\alpha & & = & 0 \\ -0.35Y & & +T & & & & -\beta & = & 0 \end{array}$$

Γενικά: Y : εθνικό εισόδημα, C : κατανάλωση, T : φορολογία, I_0 : επένδυση, G_0 : κρατικές δαπάνες, α : αυτόνομη κατανάλωση, β : φορολογικά έσοδα εκτός φόρου εισοδήματος, π.χ. φόρος στον πλούτο.

Θυμηθείτε τον τύπο $\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}$ όπου $\mathbf{J}$ η Ιακωβιανή μήτρα του συστήματος των πεπλεγμένων και x_i ένα στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{x}$. Ζητούμενο είναι να υπολογίσετε πως επιδρά στην κατανάλωση C μία μεταβολή στα φορολογικά έσοδα β. **Υπόδειξη**: $|\mathbf{J}| = 0.48$

i. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -0.68$ ii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.68$ iii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -0.48$ iv. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -0.80$ **v.** $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -1.666$
vi. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 1.666$ vii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 2.285$ viii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -2.285$ ix. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.729$ x. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -0.729$
xi. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 1.371$ xii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.48$ xiii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.80$ xiv. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -1.371$

5. (20 μονάδες) Προβείτε σε βελτιστοποίηση της συνάρτησης $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2 + x_3^4 - 4x_3$ όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Απάντηση:

i. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 0$, $|H_3^*| = 36 > 0$ άρα αδυναμία λήψης απόφασης

ii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -36 < 0$ άρα τοπικό ελάχιστο

iii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -36 < 0$ άρα τοπικό μέγιστο

iv. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 36 > 0$ άρα τοπικό μέγιστο

v. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 36 > 0$ άρα αδυναμία λήψης απόφασης

vi. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 36 > 0$ άρα τοπικό ελάχιστο

vii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 36 > 0$ άρα τοπικό μέγιστο

viii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -36 < 0$ άρα αδυναμία λήψης απόφασης

ix. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$ **, Σ.Δ.Τ** $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 36 > 0$ **άρα τοπικό ελάχιστο**

x. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -36 < 0$ άρα τοπικό μέγιστο

xi. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 0$, $|H_2^*| = 0$, $|H_3^*| = 0$ άρα αδυναμία λήψης απόφασης

xii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -36 < 0$ άρα τοπικό ελάχιστο

xiii. τίποτα από τα παραπάνω