Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ. Διδάσκων: Ι. Βενέτης
Ομάδα Α1. Πρόοδος. 24 Απριλίου 2017. 11:00-12:00

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΑΜ:.....

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

1. (25 μονάδες) Υπολογίστε την ορίζουσα της μήτρας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 8 \\ 0 & 1 & \beta & 18 \end{pmatrix}$

i. β ii. $-\beta$ iii. 0 iv. $a\beta - 2$ v. 18 vi. $a\beta + 2$ vii. -18 viii. 5 **ix.** $-a\beta - 2$ x. 10

xi. a xii. $-a$ xiii. -5 xiv. $2a$ xv. $-2a$

2. (20 μονάδες) Υπολογίστε την $(X'X)^{-1}$ όταν $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$ iv. $\begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$ v. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

vi. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ vii. $\begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}$ viii. $\begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$ ix. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ x. $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

xi. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ xii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. (20 μονάδες) Υπολογίστε την ανηγμένη κλιμακωτή μήτρα $RRE_{A|b}$ του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 5x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 &= 4 \end{aligned}$$

i. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ii. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iv. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **v.** $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

vi. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vii. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

viii. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ix. $RRE_{A|b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. (15 μονάδες) Σας δίνεται το παρακάτω σύστημα μακροοικονομικών εξισώσεων στη μορφή πεπλεγμένων εξισώσεων $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{y}$ ένα διάνυσμα 3×1 με τις ενδογενείς μεταβλητές και x ένα διάνυσμα που περιλαμβάνει εξωγενείς μεταβλητές και όλες τις παραμέτρους του προβλήματος.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} Y & -C & & -I_0 & -G_0 & & = & 0 \\ -0.7Y & +C & +0.7T & & & -\alpha & = & 0 \\ -0.3Y & & +T & & & & -\beta & = 0 \end{array}$$

Γενικά: Y : εθνικό εισόδημα, C : κατανάλωση, T : φορολογία, I_0 : επένδυση, G_0 : κρατικές δαπάνες, α : αυτόνομη κατανάλωση, β : φορολογικά έσοδα εκτός φόρου εισοδήματος, π.χ. φόρος στον πλούτο.

Θυμηθείτε τον τύπο $\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}$ όπου $\mathbf{J}$ η Ιακωβιανή μήτρα του συστήματος των πεπλεγμένων και x_i ένα στοιχείο του διανύσματος $\mathbf{x}$. Ζητούμενο είναι να υπολογίσετε πως επιδρά στην κατανάλωση C μία μεταβολή στα φορολογικά έσοδα β. **Υπόδειξη**: $|\mathbf{J}| = 0.51$

i. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -0.65$ ii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.65$ **iii.** $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -1.372$ iv. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -0.51$ v. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -1.700$
vi. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 1.238$ vii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -1.238$ viii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.588$ ix. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -0.728$ x. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.51$
xi. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 0.728$ xii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 1.372$ xiii. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = 1.700$ xiv. $\frac{\partial C}{\partial \beta} = -0.588$

5. (20 μονάδες) Προβείτε σε βελτιστοποίηση της συνάρτησης $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - x_1 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2 + x_3^6 - 6x_3$ όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Απάντηση:

i. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 90 > 0$ άρα τοπικό ελάχιστο

ii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 90 > 0$ άρα τοπικό μέγιστο

iii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 0$, $|H_3^*| = 90 > 0$ άρα αδυναμία λήψης απόφασης

iv. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 90 > 0$ άρα τοπικό μέγιστο

v. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 2 > 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = 90 > 0$ άρα αδυναμία λήψης απόφασης

vi. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -90 < 0$ άρα τοπικό ελάχιστο

vii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$**,** $x_2^* = 1$**,** $x_3^* = 1$ **, Σ.Δ.Τ** $|H_1^*| = 2 > 0$**,** $|H_2^*| = 3 > 0$**,** $|H_3^*| = 90 > 0$ **άρα τοπικό ελάχιστο**

viii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -90 < 0$ άρα τοπικό μέγιστο

ix. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = 0$, $|H_2^*| = 0$, $|H_3^*| = 0$ άρα αδυναμία λήψης απόφασης

x. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -90 < 0$ άρα τοπικό μέγιστο

xi. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 1$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -90 < 0$ άρα αδυναμία λήψης απόφασης

xii. Σ.Π.Τ: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, Σ.Δ.Τ $|H_1^*| = -2 < 0$, $|H_2^*| = 3 > 0$, $|H_3^*| = -90 < 0$ άρα τοπικό ελάχιστο

xiii. τίποτα από τα παραπάνω