Άσκηση 1 (25%)

Υπολογίστε την αντίστροφη μήτρα

$$(X'X)^{-1}$$

όταν

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Απάντηση Άσκηση 1 (25%)

Έχουμε

$$\underset{4\times 3}{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\underset{3\times 4}{X'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

άρα

$$\underset{3\times 3}{X'X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

με ορίζουσα

$$\begin{aligned} |X'X| &= \left| \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 8 \left| \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| - 4 \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= 8 \cdot 9 - 4 \cdot 8 = 40 \end{aligned}$$

άρα αντιστρέφεται και

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & -8 \\ 4 & -8 & 24 \end{pmatrix}$$

$$Adj\,(X'X) = C' = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & -8 \\ 4 & -8 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (X'X)^{-1} &= \frac{1}{|X'X|} Adj\,(X'X) = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & -8 \\ 4 & -8 & 24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9}{40} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 2 (25%)

(2i). (20%) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα **Cramer** ώστε να λύσετε το παρακάτω σύστημα μακροοικονομικών εξισώσεων ως προς την κατανάλωση

$$\begin{aligned} C &= \alpha + \beta Y \\ Y &= C + I \\ I &= \gamma - \delta r \end{aligned}$$

όπου Y το εισόδημα, C η κατανάλωση, και I η επένδυση (*ενδογενείς* μεταβλητές), r η *εξωγενής* μεταβλητή του επιτοκίου και $\alpha > 0, 0 < \beta < 1, \gamma > 0, \delta > 0$ παράμετροι.

(2ii). (5%) Πως μεταβάλλεται η κατανάλωση αν μεταβληθεί το επιτόκιο;

Απάντηση Άσκηση 2 (25%)

(2i) Το παρακάτω μακροοικονομικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} C &= \alpha + \beta Y \\ Y &= C + I \\ I &= \gamma - \delta r \end{aligned}$$

γράφεται (ενδογενείς αριστερά, εξωγενείς και σταθερές δεξιά, κρατάμε τη σειρά C, Y, I όπως δόθηκε στην εκφώνηση[1])

$$\begin{aligned} C - \beta Y &= \alpha \\ -C + Y - I &= 0 \\ I &= \gamma - \delta r \end{aligned}$$

Άρα σε μορφή μητρών

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ Y \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \gamma - \delta r \end{pmatrix}$$

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \beta \neq 0$$

Σύμφωνα με τον κανόνα Cramer για να λύσουμε μόνο ως προς την πρώτη μεταβλητή (την C) αντικαθιστούμε το διάνυσμα των σταθερών στην πρώτη στήλη της A, έστω A_C,

$$A_C = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \gamma - \delta r & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με ορίζουσα

$$|A_C| = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \gamma - \delta r & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha + \beta\gamma - r\beta\delta$$

[1] Μη κάνουμε τη ζωή μας δύσκολη χωρίς λόγο.

Άρα (κανόνας Cramer)

$$C^* = \frac{|A_C|}{|A|} = \frac{\alpha + \beta\gamma - r\beta\delta}{1-\beta}$$

(2ii) Έχουμε

$$\frac{dC^*}{dr} = -\frac{\beta\delta}{1-\beta} < 0$$

Επειδή $\frac{dC^*}{dr} < 0$ έχουμε αντίστροφη σχέση μεταξύ κατανάλωσης και επιτοκίου. Αύξηση του επιτοκίου κατά μία μονάδα μειώνει την κατανάλωση κατά $\frac{\beta\delta}{1-\beta}$ και μείωση του επιτοκίου κατά 1 μονάδα αυξάνει την κατανάλωση κατά $\frac{\beta\delta}{1-\beta}$. Επίσης, η παράγωγος δεν εξαρτάται από το επίπεδο του r. Δηλαδή η παραπάνω σχέση δεν εξαρτάται από το ύψος του επιτοκίου όταν συμβαίνει η μεταβολή. Εξαρτάται μη-γραμμικά από την οριακή ροπή προς κατανάλωση β και γραμμικά από το δ, τον συντελεστή επίδρασης του επιτοκίου στην επένδυση.

Άσκηση 3 (25%)

Έστω, ότι η αντιπροσωπευτική επιχείρηση κάποιου κλάδου αντιμετωπίζει τη συνάρτηση κόστους

$$C = 2K + 5L$$

και πρέπει να παράξει 100 μονάδες προϊόντος, δηλαδή

$$K^{0.5}L^{0.5} = 100$$

(3i)(10%) Προβείτε σε επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους της επιχείρησης

(3ii)(10%) Βεβαιωθείτε ότι η λύση σας αντιστοιχεί, τουλάχιστον, σε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους

(3iii)(5%) Πόσο μεταβάλλεται το ελάχιστο κόστος αν αυξηθεί το επίπεδο παραγωγής κατά 10 μονάδες;

Απάντηση Άσκηση 3 (25%)

(3i) Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$\mathcal{L} = 2K + 5L + \lambda\left(100 - K^{0.5}L^{0.5}\right)$$

Σ.Π.Τ

$$(1) : \mathcal{L}_K = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 2 - 0.5\lambda K^{-0.5}L^{0.5} = 0 \Rightarrow \lambda K^{-0.5}L^{0.5} = 4$$

$$(2) : \mathcal{L}_L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 5 - 0.5\lambda K^{0.5}L^{-0.5} = 0 \Rightarrow \lambda K^{0.5}L^{-0.5} = 10$$

$$(3) : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 100 - K^{0.5}L^{0.5} = 0$$

Η (1)/(2) δίνει τη σχέση ισορροπίας στο βέλτιστο

$$\frac{L}{K} = \frac{2}{5} \Rightarrow L = \frac{2}{5}K$$

Αντικαθιστούμε στην (3) και

$$K^{0.5}L^{0.5} = 100 \Rightarrow K^{0.5}\left(\frac{2}{5}K\right)^{0.5} = 100 \Rightarrow K^* = 100 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 158.11$$

οπότε

$$L^* = \frac{2}{5} \cdot 158.11 \approx 63$$

Προσοχή, η χρήση του $\approx$ (περίπου) γίνεται λόγω της εργασίας L (να είναι ακέραιος αριθμός).

(3ii) Σ.Δ.Τ

Έστω $g(K, L) = 100$ ο περιορισμός

$$K^{0.5}L^{0.5} = 100$$

Η φραγμένη Εσσιανή δίνεται από

$$H^B = \begin{pmatrix} 0 & -g_K & -g_L \\ -g_K & \mathcal{L}_{KK} & \mathcal{L}_{KL} \\ -g_L & \mathcal{L}_{LK} & \mathcal{L}_{LL} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -0.5K^{-0.5}L^{0.5} & -0.5K^{0.5}L^{-0.5} \\ -0.5K^{-0.5}L^{0.5} & 0.25\lambda K^{-1.5}L^{0.5} & -0.25\lambda K^{-0.5}L^{-0.5} \\ -0.5K^{0.5}L^{-0.5} & -0.25\lambda K^{-0.5}L^{-0.5} & 0.25\lambda K^{0.5}L^{-1.5} \end{pmatrix}$$

και θα πρέπει η ορίζουσά της στο στάσιμο σημείο να είναι αρνητική, δηλαδή

$$\left|H^B\right|_{\{K,L,\lambda\}=\{K^*,L^*,\lambda^*\}} < 0$$

για να έχουμε τοπικό ελάχιστο. Δεν χρειάζεται να προβούμε σε αντικατάσταση των K^*, L^*, λ^*. Βλέπουμε ότι

$$\left|H^B\right| = \underbrace{g_K}_{(+)} \underbrace{\begin{vmatrix} -g_K & \mathcal{L}_{KL} \\ -g_L & \mathcal{L}_{LL} \end{vmatrix}}_{(-)} - \underbrace{g_L}_{(+)} \underbrace{\begin{vmatrix} -g_K & \mathcal{L}_{KK} \\ -g_L & \mathcal{L}_{LK} \end{vmatrix}}_{(+)} < 0$$

για κάθε $K, L, \lambda > 0$ άρα και για το K^*, L^*, λ^*.

(3iii) Από το θεώρημα της περιβάλλουσας γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\partial C^*}{\partial Q} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q}\right|_{\{K,L,\lambda\}=\{K^*,L^*,\lambda^*\}} = \lambda^*$$

η σκιώδης τιμή του περιορισμού (στο βέλτιστο σημείο, αν χαλαρώσουμε ή αυστηροποιήσουμε τον περιορισμό, πώς επηρεάζεται η λύση μας για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης;).

Οπότε από την (1)

$$\begin{aligned} \lambda^* K^{*-0.5} L^{*0.5} &= 4 \Rightarrow \\ \lambda^* K^{*-0.5} L^{*0.5} &= 4 \Rightarrow ... \Rightarrow \lambda^* = 4\sqrt{\frac{5}{2}} = 6.32455532 \end{aligned}$$

Οπότε μία αύξηση της παραγωγής κατά 10 μονάδες θα σήμαινε αύξηση του κόστους (ελάχιστου κόστους) κατά 63.245 μονάδες.

Άσκηση 4 (25%)

Προβείτε σε επίλυση της μη-γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y' + y + \sqrt{y} = 0 \quad , \quad y(0) = 1$$

Υπόδειξη: Για μία *γραμμική* (πρώτου βαθμού), πρώτης τάξης, με χρονικά μεταβαλλόμενους συντελεστές διαφορική εξίσωση

$$y' + u(t)y = w(t)$$

είναι γνωστός ο τύπος της γενικής λύσης

$$y\left(t\right) = e^{-\int u(t)dt}\left[A + \int w(t)e^{\int u(t)dt}dt\right]$$

Ο όρος $Ae^{-\int u(t)dt}$ έχει το ρόλο της συμπληρωματικής συνάρτησης.

Απάντηση Άσκηση 4 (25%)

Μετατρέπουμε τη μη-γραμμική εξίσωση σε γραμμική. Πολλαπλασιάζουμε με $y^{-\frac{1}{2}}$ και

$$y^{-\frac{1}{2}}y' + y^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$$

Έστω τώρα ότι

$$z(t) = y^{\frac{1}{2}}$$

με παράγωγο (ως προς τον χρόνο)

$$z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$$

Αντικαθιστούμε στην

$$y^{-\frac{1}{2}}y' + y^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$$

και

$$\begin{aligned} y^{-\frac{1}{2}}y' + y^{\frac{1}{2}} + 1 &= 0 \Rightarrow \\ z' + \frac{1}{2}z &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τα ολοκληρώματα (δεν χρειάζονται οι σταθερές της ολοκλήρωσης αφού περιλαμβάνονται στο τέλος σε μία μόνο σταθερά)

$$e^{\int u(t)dt} = e^{\int \frac{1}{2}dt} = e^{\frac{1}{2}t}$$

$$e^{-\int u(t)dt} = e^{-\int \frac{1}{2}dt} = e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\int w(t)e^{\int u(t)dt}dt = -\int \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}dt = -e^{\frac{1}{2}t}$$

Οπότε, η λύση για το $z(t)$ είναι

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-\int u(t)dt}\left[A + \int w(t)e^{\int u(t)dt}dt\right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}t}\left[A - e^{\frac{1}{2}t}\right] \\ &= Ae^{-\frac{1}{2}t} - 1 \end{aligned}$$

Άρα για το $y(t)$ είναι

$$y(t) = \left(Ae^{-\frac{1}{2}t} - 1\right)^2$$

Η αρχική συνθήκη μας δίνει

$$y(0) = 1 \Rightarrow (A-1)^2 = 1 \Rightarrow A = 2$$

Οπότε η ειδική λύση για την $y(t)$ είναι

$$y(t) = \left(2e^{-\frac{1}{2}t} - 1\right)^2$$