Άσκηση 1

Άσκηση 1.1 (15%)

Έστω $a, \beta \neq 0$. Για ποιές τιμές του λ είναι η ορίζουσα της παρακάτω μήτρας μηδενική;

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Απάντηση

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 10 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 10 \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ \beta & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 10 \cdot \lambda \cdot \beta \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 10 \cdot \lambda \cdot \beta \cdot (-1 - 3) \\
&= -40\lambda\beta
\end{aligned}
$$

Άρα $|A| = 0$ για $\lambda = 0$.

Άσκηση 1.2 (15%)

Βρείτε την $(M'M)^{-1}$ όταν

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Απάντηση

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M'M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(M'M)^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{46} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{1}{23} & \frac{5}{46} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2 (20%)

Προβείτε σε επίλυση του παρακάτω συστήματος μέσω απαλοιφής Gauss

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -5 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

Υπόδειξη: Λύσεις εκτός της μεθόδου Gauss ΔΕΝ βαθμολογούνται. Δείξτε τα βήματα της επίλυσης αναλυτικά.

Απάντηση

Επαυξημένος

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 5 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

... εμπρός λύση

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

... προς-τα-πίσω

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

άρα

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= -4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Άσκηση 3 (25%)

Βρείτε και χαρακτηρίστε το(α) στάσιμο(α) σημείο(α) της παρακάτω συνάρτησης $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$$

Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + 2x - y = 0 \\ f_y &= -x + 2y = 0 \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x - \left(\frac{x}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \\ 3x^2 + \frac{3}{2}x &= 0 \Rightarrow \\ x\left(3x + \frac{3}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \\ x_1^* &= 0, x_2^* = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

και

$$y_1^* = 0, y_2^* = -\frac{1}{4}$$

Σ.Δ.Τ

$$f_{xx}(x,y) = 6x + 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = -1$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 6x+2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 12x + 3$$

Οπότε

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, y_1^* = 0 \Rightarrow \\ f_{xx}^* &= 2 > 0, f_{yy}^* = 2 > 0 \\ \text{και } |H^*| &= 3 > 0 \\ & \text{άρα } \min \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2^* &= -\frac{1}{2}, y_2^* = -\frac{1}{4} \Rightarrow \\ f_{xx}^* &= -1 < 0, f_{yy}^* = 2 > 0 \\ \text{και } |H^*| &= -3 < 0 \\ & \text{άρα ούτε } \max \text{ ούτε } \min \end{aligned}$$

Άσκηση 4 (25%)

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας

$$u(x, y) = ax + \beta \ln y$$

και ο εισοδηματικός περιορισμός

$$x + p_y y = M$$

ενός αντιπροσωπευτικού καταναλωτή όπου $a, \beta, p_y, M > 0$ και $M - \frac{\beta}{a} > 0$, ενώ $x, y \in \mathbb{R}_{++}$.

(4α)(10%) Προβείτε σε επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του καταναλωτή

(4β)(5%) Βεβαιωθείτε ότι η λύση σας αντιστοιχεί, τουλάχιστον, σε τοπικό μέγιστο της συνάρτησης χρησιμότητας

(4γ)(5%) Πως μεταβάλλεται η βέλτιστη χρησιμότητα όταν μεταβληθεί το εισόδημα; Σχολιάστε

(4δ)(5%) Πως μεταβάλλεται η βέλτιστη χρησιμότητα όταν μεταβληθεί η παράμετρος προτιμήσεων β; Σχολιάστε

Απάντηση

$$\mathcal{L} = ax + \beta \ln y + \lambda [M - x - p_y y]$$

Σ.Π.Τ

$$
\begin{aligned}
(1) \quad &: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow a - \lambda = 0 \\
(2) \quad &: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{y} - \lambda p_y = 0 \\
(3) \quad &: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow M - x - p_y y = 0
\end{aligned}
$$

άρα

$$
\begin{aligned}
\lambda^* &= a \\
y^* &= \frac{\beta}{a p_y} \\
M - x - p_y \left(\frac{\beta}{a p_y} \right) = 0 &\Rightarrow x^* = M - \frac{\beta}{a}
\end{aligned}
$$

Σ.Δ.Τ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} &= -\frac{\beta}{y^2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
H^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p_y \\ 1 & 0 & 0 \\ p_y & 0 & -\frac{\beta}{y^2} \end{pmatrix}
$$

$$
\left| H^{B,*} \right| = -1 \left(\frac{\beta}{(y^*)^2} \right) = \frac{\beta}{(y^*)^2} > 0
$$

άρα τοπικό μέγιστο της συνάρτησης χρησιμότητας για ζήτηση x^*, y^*

Θεώρημα Περιβάλλουσας

$$
\frac{du^*}{dM} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} = \lambda^* = \alpha > 0
$$

Στη συγκεκριμένη ημι-γραμμική (quasi-linear) συνάρτηση χρησιμότητας μόνο η βέλτιστη ζήτηση του x^* εξαρτάται από το διαθέσιμο εισόδημα M. Έτσι βλέπουμε ότι μία αύξηση του εισοδήματος κατά μία μονάδα θα αυξήσει (**πάντα**) την βέλτιστη χρησιμότητα u^* που απολαμβάνει ο καταναλωτής κατά α μονάδες (δηλαδή κατά την παράμετρο προτιμήσεων που αντιστοιχεί στο αγαθό x στη συνάρτηση χρησιμότητας $u(.,.)$.

Θεώρημα Περιβάλλουσας

$$\frac{du^*}{d\beta} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda=\lambda^*} = \ln\left(y^*\right) = \ln\left(\frac{\beta}{ap_y}\right)$$

Μία αύξηση στην τιμή της παραμέτρου β που εκφράζει την βαρύτητα του y στη συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας οδηγεί σε αύξηση της βέλτιστης χρησιμότητας **μόνο** όταν $\ln\left(\frac{\beta}{ap_y}\right) > 0$ δηλαδή όταν $p_y < \frac{\beta}{a}$.