Σύνολο ασκήσεων 1. Άλγεβρα μητρών[1]

1 Άσκηση 1

Προσθέστε $A+B$ και αφαιρέστε $A-B$ τις παρακάτω μήτρες (άθροισμα μητρών ορίζεται μόνο όταν οι μήτρες έχουν το ίδιο μέγεθος δηλαδή ίδιες διαστάσεις ή ακριβώς ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών)

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 10 \\ y & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 8 & 7 \\ 2 & 8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 2

1. Πολλαπλασιάστε τις **τετραγωνικές** μήτρες

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

2. Πολλαπλασιάστε τις **τετραγωνικές** μήτρες

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Έστω a μία σταθερά. Υπολογίστε το γινόμενο

$$a \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} =;$$

[1] Ρίξτε μία ματιά στο `https://www.symbolab.com/solver/matrix-calculator`

4. Πολλαπλασιάστε τα **διανύσματα** $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

5. Πολλαπλασιάστε τα **διανύσματα** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. Πολλαπλασιάστε τα **διανύσματα** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & ... & T \end{bmatrix}$

7. Πολλαπλασιάστε τα **διανύσματα** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & ... & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ T \end{bmatrix}$

8. Έστω η 3×3 **τετραγωνική** μήτρα

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε τις

$$AA = A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = ...$$

και

$$A^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = ...$$

Τι παρατηρείτε;

9. Βρείτε "εύκολα" χωρίς άλγεβρα την $B \cdot B \cdot B \cdot B \cdot B = B^5$ όταν

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

10. Έστω ότι $\mathbf{i}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ δηλαδή $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}'$ ή

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπου **ο τόνος** $'$ συμβολίζει **αναστροφή**. Υπολογίστε το **εσωτερικό γινόμενο**

$$\mathbf{i}'\mathbf{i} =;$$

και το **εξωτερικό γινόμενο**

$$\mathbf{i}\mathbf{i}' =;$$

11. Παρομοίως, βρείτε (και γράψτε υπό μορφή αθροίσματος) το εσωτερικό γινόμενο

$$\underset{1\times T}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix}} \underset{T\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο ενός μοναδιαίου διανύσματος T στοιχείων.

12. Έστω ότι

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \\ x_4 & z_4 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε την μήτρα Xb.

13. Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο[2] $a'b$ και $b'a$ των διανυσμάτων a, b όπου

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

14. Έστω ότι $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

[2] θα διαπιστώσετε ότι ισχύει $a'b = b'a$.

Δείξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο $x'x$ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των στοιχείων του διανύσματος

$$x'x = \sum_i x_i^2$$

15. Έστω ότι

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο $y'x$ είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων των διανυσμάτων, δηλαδή

$$y'x = \sum_i x_i y_i$$

16. Παρομοίως, έστω ότι $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & t-1 & t \end{pmatrix}'$. Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{t}'\mathbf{t} = \sum_{;}^{;} ;$$

και το εξωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{t}\mathbf{t}' =;$$

17. Παρομοίως, έστω ένα διάνυσμα $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}'$. Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο

$$\alpha'\alpha = \sum_{;}^{;} ;$$

και το εξωτερικό γινόμενο

$$\alpha\alpha' =;$$

18. Για τα διανύσματα $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ υπολογίστε τα **μέτρα**

$$\|x\|_1\ ,\ \|x\|_2\ ,\ \|x\|_3\ ,\ \|x\|_\infty$$

και

$$\|y\|_1\ ,\ \|y\|_2\ ,\ \|y\|_3\ ,\ \|y\|_\infty$$

19. Αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ μία τετραγωνική μήτρα με $a \neq b \neq c \neq d$, βρείτε την ανάστροφη A', την AA' και την $A'A$. Είναι **συμμετρικές οι μήτρες** AA' και $A'A$;

20. Έστω η $n \times k$ μήτρα

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,k} \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι η $k \times k$ μήτρα $X'X$ μπορεί να γραφεί ως

$$X'X = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i'$$

όπου x_i είναι το διάνυσμα στήλη $x_i = \begin{bmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ \vdots \\ x_{i,k} \end{bmatrix}$.

Θα γράφατε $X = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ ή $X' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ ή είναι και τα δύο "νόμιμα";

Άσκηση 3

Έστω το $n \times 1$ τυχαίο διάνυσμα (δηλαδή ένα διάνυσμα με στοιχεία τυχαίες μεταβλητές)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Γράψτε τη μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ_x (τι διαστάσεων ; ×; είναι;) του διανλυσματος x χρησιμοποιώντας τους "κατάλληλους" συμβολισμούς. Τι ιδιότητες έχει η συγκεκριμένη μήτρα;
- Επαναλάβετε την άσκηση για την περίπτωση που το τυχαίο διάνυσμα περιέχει τυχαίες μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$ που κατανέμονται **ανεξάρτητα** και **ετερογενώς**.
- Επαναλάβετε την άσκηση για την περίπτωση που το τυχαίο διάνυσμα είναι $i.i.d$ δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$ κατανέμονται **ανεξάρτητα** και **ομοιογενώς**.

Άσκηση 4

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές x, y με διακύμανση $Var\left(x\right) = \sigma_x^2$ και $Var\left(y\right) = \sigma_y^2$ αντίστοιχα. Έστω ότι $Cov\left(x, y\right) = \sigma_{xy}$ συμβολίζει την συνδιακύμανση των δύο τυχαίων μεταβλητών όπου λόγω συμμετρίας

$$Cov\left(x, y\right) = Cov\left(y, x\right) = \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

ενώ $-1 \leq \rho \leq 1$ είναι ο συντελεστής συσχέτισης ο οποίος δίνεται από

$$\rho = \frac{Cov\left(x, y\right)}{\sqrt{Var\left(x\right)}\sqrt{Var\left(y\right)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Η μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ_z του διανύσματος $z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}'$ δίνεται από την

$$\begin{aligned} \Sigma_z &= var\left(z\right) \\ &= \begin{pmatrix} Var\left(x\right) & Cov\left(x, y\right) \\ Cov\left(y, x\right) & Var\left(y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα από την (βασίζεται στη συσχέτιση και όχι στη συνδιακύμανση)

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

Υπάρχει μία συγκεκριμένη παραγοντοποίηση της μήτρας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων $\Sigma_z = LL'$ όπου

$$L = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ \rho\sigma_y & \sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_y \end{pmatrix}$$

και

$$L' = \begin{pmatrix} \sigma_x & \rho\sigma_y \\ 0 & \sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_y \end{pmatrix}$$

είναι **τριγωνικές κάτω** και **άνω** αντίστοιχα.

- Δείξτε ότι $LL' = \Sigma_z$ (προβείτε στον πολ/σμό)
- Χρησιμοποιήστε την παρακάτω ιδιότητα

  Αν x ένα 2×1 τυχαίο διάνυσμα με $Var\left(x\right) = \Sigma_x$
  και A μία μήτρα με σταθερές (μη-τυχαίες μεταβλητές) τότε

  $$Var\left(Ax\right) = AVar\left(x\right)A' = A\Sigma_x A'$$

  για να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός $z = L^{-1}x$ παράγει δύο τυχαίες μεταβλητές z_1 και z_2 οι οποίες πληρούν

  $$Var\left(z\right) = \mathbf{I}_2$$

  όπου

  $$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$